

Летняя школа «Современная математика»  
Дубна, июль 2001

В. И. Арнольд

*Астроидальная геометрия  
гипоциклоид и гессианова топология  
гиперболических многочленов*

МЦНМО  
Москва 2001

УДК 514.74  
ББК 22.15  
А84

Проведение летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского комитета образования.

### **Арнольд В. И.**

А84 Астроидальная геометрия гипоциклоид и гессианова топология гиперболических многочленов.— М.: МЦНМО, 2001.— 80 с.: ил.  
ISBN 5-94057-012-7

Недавнее появление астроид и гипоциклоид в качестве ответов и моделей в целом ряде различных задач теории особенностей, теории каустик и волновых фронтов, теорий эволют и эвольвент, сделало ясным фундаментальное значение этих объектов и привело к открытию большого числа новых фактов, относящихся то к геометрии и анализу, то к физике и теории распространения волн, то к симплектической и контактной топологии, то к вариационному исчислению и оптимальному управлению.

Обнаружение связи между гессиановой топологией и астроидальной геометрией явилось полной неожиданностью и немедленно привело к быстрому прогрессу в обеих областях, который и описан в настоящей книге.

По материалам этой книги автором был прочитан миникурс участникам Летней школы «Современная математика» (школьникам старших классов и студентам I—II курсов) в Дубне 17—26 июля 2001 года.

Книга представляет интерес для широкого круга подготовленных читателей, интересующихся математикой.

ББК 22.15

ISBN 5-94057-012-7

© Арнольд В. И., 2001.

© МЦНМО, 2001.

## Введение

Астроидой называется гипоциклоида с четырьмя острями. Недавнее появление астроид и гипоциклоид в качестве ответов и моделей в целом ряде различных задач теории особенностей, теории каустик и волновых фронтов, теорий эволют и эвольвент сделало ясным фундаментальное значение этих объектов и привело к открытию большого числа новых фактов, относящихся то к геометрии и анализу, то к физике и теории распространения волн, то к симплектической и контактной топологии, то к вариационному исчислению и оптимальному управлению.

Простейшим примером задачи гессиановой топологии является вопрос о том, сколько компонент связности может иметь параболическая кривая графика многочлена данной степени от двух переменных. Например, для многочлена четвертой степени число компонент линии нулей гессиана не больше четырех, но многочлен с четырьмя компактными компонентами неизвестен.

Обнаружение связи между гессиановой топологией и астроидальной геометрией явилось полной неожиданностью и немедленно привело к быстрому прогрессу в обеих областях, который и описан в настоящем обзоре.

Из этой теории вытекает, например, что пространство однородных многочленов четвертой степени  $f(x, y)$ , второй дифференциал которых в каждой ненулевой точке имеет гиперболическую сигнатуру  $(+, -)$ , связно. Доказательство этого факта, описанное ниже, опирается на лемму, которую я обнаружил экспериментально, а затем доказал при некоторых специальных значениях входящих в задачу параметров. Общее доказательство, найденное позже Ф. Аикарди, использует, к сожалению, тяжелую артиллерию компьютерной коммутативной алгебры, не боящейся перемножать громоздкие многочлены от многих переменных.

Это компьютерное доказательство (громоздких алгебраических тождеств) подтверждается совпадением результатов при всех тех значениях параметров, при которых известно точное аналитическое решение, а также совпадением асимптотик, возникающих в предельных случаях; но бескомпьютерного полного доказательства пока нет.

Трудность представляет здесь тесно связанная с астроидальной геометрией теория огибающих некоторых алгебраических семейств парабол, удовлетворяющих уравнению Гессе. Хотя эти вопросы относятся к алгебраической геометрии (и, с другой стороны, к теории неравенств между производными тригонометрических многочленов фиксированной степени), успех достигается лишь за счет компьютерной алгебры.

Пространство «гиперболических» однородных многочленов степени шесть уже не связно (а имеет по меньшей мере две компоненты, различающиеся индексами полей крестиков нулей вторых дифференциалов). Вопрос о возможных значениях подобных индексов также входит в гессианову топологию, основанную в [3], [11], [12].

Гессианову топологию можно рассматривать как главу качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными (в том же смысле, в каком геометрия евклидовой плоскости — частный случай римановой). Автор стремился всюду избегать обобщений, даже напрашивающихся, ограничиваясь простейшими содержательными частными случаями, относящимися к будущей общей теории примерно так, как относится теория гармонических функций к общей теории эллиптических дифференциальных уравнений.

Автор благодарен Ф. Аикарди, А. Ортиц-Родригес и В. М. Гуровцу за помощь в компьютерной подготовке этой статьи к печати, а также тщательно отредактировавшему и кое-где разъяснивавшему мое изложение В. Клепцыну — за полезную критику.

## КАУСТИКИ И ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

### 1. Каустики периодических функций

Рассмотрим гладкую функцию  $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем обозначать точку окружности через  $\varphi \pmod{2\pi}$ , а производную по аргументу  $\varphi$  будем обозначать штрихом.

**Определение.** *Каустикой периодической функции  $g$  называется кривая на евклидовой плоскости с декартовыми ортонормированными координатами  $(A, B)$ , состоящая из тех точек плоскости, для которых функция аргумента  $\varphi$*

$$G(A, B; \varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi + g(\varphi)$$

имеет неморсовскую критическую точку:

$$\exists \varphi \in S^1: G'(A, B; \varphi) = 0, \quad G''(A, B; \varphi) = 0.$$

**Пример.** Каустикой функции  $g(\varphi) = \cos(2\varphi)$  является астроида (см. ниже)

$$\{(A = -4 \cos^3 \varphi, B = 4 \sin^3 \varphi)\}.$$

**Замечание.** Каустика естественно параметризована критической точкой  $\varphi$ .

Уравнения  $G' = G'' = 0$ , линейные относительно  $A$  и  $B$ , доставляют гладкие функции-решения

$$\begin{cases} A = g's + g''c, \\ B = -g'c + g''s, \end{cases} \quad (s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi)$$

которые выше и вычислены для  $g = \cos(2\varphi)$ .

**Теорема 1.** *Направление каустики задается вектором  $(c, s)$  направления  $\varphi$ , а именно,*

$$\frac{dA}{d\varphi} = cR, \quad \frac{dB}{d\varphi} = sR, \quad \text{где } R = g' + g''.$$

**Доказательство.** Дифференцируя приведенные выше явные формулы, получаем

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\varphi} &= g'c + g''s - g''s + g'''c, \\ \frac{dB}{d\varphi} &= g's - g''c + g''c + g'''s,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Для дальнейшего решающую роль играет ортогональность заданной на окружности функции  $R$  теоремы 1 функциям  $1$ ,  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ .

**Теорема 2.** Радиус кривизны каустики в точке  $(A(\varphi), B(\varphi))$  равен  $R(\varphi)$ .

**Доказательство.** Вектор  $(c, s)$  есть (по теореме 1) вектор скорости движения вдоль каустики со скоростью единица. Обозначим через  $S$  длину каустики (отсчитываемую в заданную этим вектором сторону). Для вектора  $z(\varphi) = (A(\varphi), B(\varphi))$  мы получим тогда

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{dz}{dS} \frac{dS}{d\varphi} = \frac{dz}{dS} / \frac{d\varphi}{dS} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} / K,$$

где  $K = \frac{d\varphi}{dS}$  есть кривизна каустики (с нужным знаком, определяемым ориентациями плоскости и каустики). Итак, по теореме 1, имеем  $R = 1/K$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Пример.** Для стандартной астроиды  $g = \cos(2\varphi)$ ,  $\{(A = -4 \cos^3 \varphi, B = 4 \sin^3 \varphi)\}$ ; поэтому ее радиус кривизны есть  $R = 6 \sin(2\varphi)$ .

Радиус кривизны обращается в 0 в четырех точках возврата астроиды. Он максимален ( $\pm 6$ ) в срединных точках каустики, лежащих на полпути между двумя соседними точками возврата (в точках  $A = \pm\sqrt{2}$ ,  $B = \pm\sqrt{2}$ ).

Рассмотрим все касательные к нашей каустике-астроиде прямые. Ортогональная траектория этого семейства прямых называется *эвольвентой* (или *волновым фронтом*) исходной астроиды (так же определяются фронты любой исходной кривой-каустики — это траектория конца сматываемой с каустики нити). Длина свободной части нити — это радиус кривизны эвольвенты (рис. 1).

*Один из волновых фронтов астроиды сам является астроидой.* Он вдвое меньше исходной астроиды и повернут на  $45^\circ$  относительно нее. Срединные точки его отрезков между его соседними точками возврата лежат на осях координат  $A$  и  $B$  на расстоянии 1 от центра астроида (так как фронт вдвое меньше каустики, а для нее расстояние от средин-

ной точки на полдороге между ее точками возврата до центра равно 2, поскольку  $4 \sin^3(\pi/4) = 4(\sqrt{2}/2)^3 = \sqrt{2}$ .

Центр кривизны фронта-эвольвенты в его точке на касательной к каустике есть точка касания этой касательной с каустикой. В нашем случае (точки фронта на оси координат) этот центр есть точка возврата каустики. Поэтому радиус кривизны фронта в такой его срединной точке равен  $4 - 1 = 3 = 6/2$ , как и должно было получиться для фронта, вдвое меньшего, чем каустика.

**Теорема 3.** *Альтернированная длина каустики равна нулю.*

*Альтернированной длиной* кривой мы называем сумму длин ее отрезков между ее точками возврата, с меняющимися при прохождении каждой точки возврата знаками. Мы предполагаем здесь, что эти точки возврата — простейшие (полукубические), что верно для функции  $g$  общего положения. В терминах функции  $R$  это условие означает простоту нулей.

**Доказательство.** Функция  $g' + g''' = R(\varphi)$ , будучи производной, ортогональна функции 1 на окружности, т. е. ее интеграл равен нулю. Но, по определению кривизны,

$$0 = \int R(\varphi) d\varphi = \int \frac{1}{K(\varphi)} d\varphi = \int \frac{1}{d\varphi/dS} d\varphi = \int dS,$$

где  $dS$  — элемент длины, ориентированной направлением вектора  $(A' = \cos \varphi, B' = \sin \varphi)$ . А это направление меняет ориентацию каустики при прохождении точки возврата, поскольку вектор  $(A', B')$  зависит от  $\varphi$  непрерывно, а ориентирующий каустику вектор меняет знак при прохождении точки возврата.  $\square$

**Теорема 4.** *Каустика периодической функции имеет не меньше 4 точек возврата.*

**Доказательство.** Функция  $R = g' + g'''$  ортогональна на окружности функциям  $(1, \cos \varphi, \sin \varphi)$ . Согласно теореме Штурма—Гурвица (см. [1], [2], [3], [4]), такая функция имеет не менее 4 нулей. Точки нулевого радиуса кривизны каустики являются ее особыми точками, а для функции  $g$  общего положения — точками возврата полукубического типа (в окрестности такой точки каустика диффеоморфна полукубической

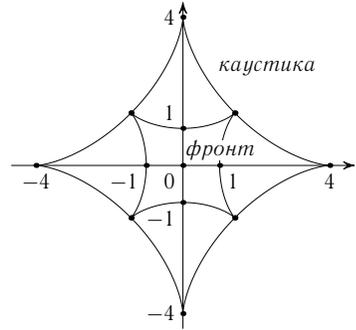


Рис. 1. Эвольвента астроида

параболе  $x^3 = y^2$ ). Таким образом, теорема 4 вытекает из теоремы Штурма—Гурвица.  $\square$

Несколько слов о теореме Штурма—Гурвица.

Эта теорема утверждает, что сумма вещественного ряда Фурье имеет не меньше нулей, чем младшая гармоника, входящая в ряд с ненулевым коэффициентом. Если эта гармоника первая, т. е. если функция ортогональна единице т. е. имеет нулевой интеграл, это утверждение есть неравенство Морса. Действительно, такая функция является производной гладкой функции, заданной на окружности, значит она имеет не меньше двух нулей, поскольку заданная на окружности функция имеет не менее двух критических точек.

Поэтому теорема Штурма—Гурвица является обобщением неравенства Морса на высшие производные. Например, если заменить первую производную суммой первой и третьей, то у такой комбинации в ряде Фурье не будет ни нулевых, ни первых гармоник, поэтому число нулей не меньше четырех. Известно много доказательств теоремы Штурма—Гурвица, но все они мало проясняют суть дела. Сам Штурм рассматривал только тригонометрические многочлены, т. е. вещественные части обычных многочленов на окружности. В этом случае теорема следует из принципа аргумента теории функций комплексного переменного, так как отсутствие младших гармоник означает присутствие корня большой кратности в нуле, т. е. внутри круга, ограниченной рассматриваемой окружностью. Значит, аргумент имеет большое приращение, а вещественная часть — много нулей.

Гурвиц перенес теорему на общие функции. Из других доказательств поучительно рассуждение с уравнением теплопроводности. Примем исходную функцию за начальное условие. Старшие гармоники умирают быстрее, поэтому вскоре останется одна минимальная. А число нулей, как вытекает из принципа максимума, при такой тепловой эволюции могло только уменьшаться, но не возрастать, так что вначале их было не меньше.

**Замечание.** Каустика функции  $\cos(3\varphi)$  — гипоциклоида с тремя точками возврата, пройденная дважды.

**Теорема 5.** *Распределим вдоль каустики массу с альтернирующей (меняющей знак в точках возврата) плотностью  $\pm 1$ . Тогда проекция полученного распределения бесконечно-малых элементов ориентированной кривой на ось  $B$  (или на любую другую прямую) имеет интегралом нуль<sup>1</sup>.*

---

<sup>1</sup> Определение векторной плотности можно посмотреть в дополнении на с. 74.

**Доказательство.** Воспользуемся ортогональностью функции  $R$  к функции  $\sin \varphi$ . Интеграл, о котором идет речь, имеет вид

$$0 = \oint (\sin \varphi) R(\varphi) d\varphi = \oint (\sin \varphi) dS = \oint dB$$

(интегрирование — по отрезкам между точками возврата, с последующим суммированием ответов с альтернирующими знаками).

Для проекции на ось  $A$  аналогично используется ортогональность  $R$  к функции  $\cos \varphi$ . Утверждение о проекциях на все прямые следует из обращения в нуль интегралов проекций на оси координат.  $\square$

**Замечание.** Центр тяжести каустики, снабженной массой с альтернирующей плотностью  $\pm 1$ , — не обязательно  $0$ , в том смысле, что не обязательно равны нулю моменты  $\oint A dS$  и  $\oint B dS$  (пример:  $g = \cos(2\varphi) + \sin(3\varphi)$ ).

**Теорема 6.** Если каустика имеет ровно 4 точки возврата, то они лежат в вершинах параллелограмма.

**Доказательство.** Обозначим эти точки возврата через  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (в этом порядке вдоль каустики);  $P_5 = P_1$ . Рассмотрим векторы  $V_j = P_j - P_{j+1}$ . В нашем случае (четырёх точек возврата) теорема 5 имеет вид

$$V_1 - V_2 + V_3 - V_4 = 0. \quad (1)$$

С другой стороны, четыре вектора  $V_j$  очевидным образом удовлетворяют условию цикла

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0. \quad (2)$$

Складывая уравнения (1) и (2), мы получаем теорему 6 в виде  $V_1 + V_3 = 0$ ,  $V_2 + V_4 = 0$ , т. е.  $V_3 = -V_1$ ,  $V_4 = -V_2$ , поэтому точки возврата каустики образуют параллелограмм.  $\square$

**Замечание.** Для каустики, имеющей ровно  $2m$  точек возврата, точно так же доказывается совпадение барицентров точек возврата с четными и с нечетными номерами:

$$P_1 + P_3 + \dots + P_{2m-1} = P_2 + P_4 + \dots + P_{2m}.$$

**Теорема 7.** Один из фронтов данной каустики имеет альтернированную длину нуль и не меньше четырех точек возврата. Все фронты обладают свойством нулевого интеграла проекции (теорема 5), фронты с 4 точками возврата — свойством параллелограмма (теорема 6), а с  $2m$  точками возврата — приведенным выше в замечании свойством совпадения барицентров.

Доказательство. Начнем со следующего (нового!) определения фронтов  $2\pi$ -периодической функции  $g$ .

**Определение.** *C-фронтом* (периодической функции  $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ) называется множество тех точек евклидовой плоскости  $\{(A, B)\}$ , для которых функция аргумента  $\varphi$

$$G(A, B; \varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi + g(\varphi)$$

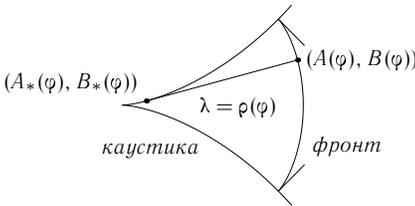
имеет критическую точку с критическим значением  $C$ :

$$\exists \varphi \in S^1: G'(A, B; \varphi) = 0, \quad G(A, B; \varphi) = C. \quad ^2$$

**Лемма.** *Радиус кривизны C-фронта равен*

$$\rho(\varphi) = C - (g''(\varphi) + g(\varphi)).$$

Доказательство леммы. Обозначим через  $(A_*(\varphi), B_*(\varphi))$  точку каустики, соответствующую неморсовской критической точке  $\varphi$  функции  $G(A, B; \cdot)$ . Мы уже вычислили выше, что  $(A_*(\varphi) = g's + g''c, B_*(\varphi) = -g'c + g''s)$ . Точка на касательной к каустике, удаленная от точки



касания на расстоянии  $\lambda$  в направлении вектора  $(c, s)$ , есть<sup>3</sup> (рис. 2)

$$(A(\lambda) = A_* + \lambda c, \quad B(\lambda) = B_* + \lambda s).$$

Когда эта точка лежит на  $C$ -фронте, определенном как нормальная траектория касательных, число  $\lambda$  — радиус его кривизны.

Рис. 2. Фронт как эвольвента каустики

Зафиксировав  $\varphi$  и рассматривая  $A$  и  $B$  как функции от  $\lambda$ , будем обозначать производные по  $\lambda$  точками.

По определению функции  $G = Ac + Bs + g$  мы находим из  $(A' = c, B' = s)$ , что при фиксированном  $\varphi$

$$\dot{G} = 1, \quad \dot{G}'' = -1,$$

поэтому  $(G + G'')(\lambda) = (G + G'')(0) = g + g''$ . Но при  $\lambda = 0$ , т. е. на каустике,  $G'' = 0$ . Поэтому  $G(0) = g + g''$ . Итак, критическое значение функции  $G$

<sup>2</sup> Эквивалентность этого определения старому будет объяснена ниже (см. замечание на с. 11) — Прим. ред.

<sup>3</sup> См. текст после замечания 1 на с. 11 — Прим. ред.

(в точке  $\varphi$ ) есть  $G(0) + \lambda = g + g'' + \lambda$ . Чтобы оно было равно  $C$ , радиус кривизны  $\lambda = \rho(\varphi)$  должен иметь указанную в лемме величину.  $\square$

**Замечание.** Ортогональность  $C$ -фронта, определенного при помощи критического значения, к касательной к каустике следует из формулы для дифференциала критического значения:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial A}\right) dA + \left(\frac{\partial G}{\partial B}\right) dB + \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right) d\varphi.$$

В критической точке  $\partial G/\partial \varphi = 0$ , а по определению функции  $G$  имеем  $\partial G/\partial A = c$ ,  $\partial G/\partial B = s$ . Поэтому условие  $dG = 0$  постоянства критического значения  $C$  имеет вид  $c dA + s dB = 0$ , что и означает ортогональность фронта к касательной к каустике. Итак, этот фронт — эвольвента каустики.

Окончание доказательства теоремы 7. Из доказанных свойств  $C$ -фронтон следует, что функция кривизны  $C$ -фронта ортогональна функциям  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  при любом  $C$ , а также, как функция от  $\varphi$ , ортогональна функции 1 при  $C$ , равно среднему значению функции  $g$ .

*Альтернированная длина  $C$ -фронта с таким выбором  $C$  равна нулю* (кстати, из леммы видно, что альтернированная длина фронта зависит от  $C$  как линейная неоднородная функция).

Теперь все утверждения теоремы 7 о фронтах доказываются так же, как предшествующие утверждения о каустиках в теоремах 3—6 — при помощи теоремы Штурма—Гурвица.  $\square$

Кроме двух намеченных выше доказательств этой удивительной теоремы, вот еще одно. Для простоты предположим, что в ряду Фурье отсутствует нулевая и две первые гармоники, т. е. что функция ортогональна единице, синусу и косинусу, и докажем, что число нулей не меньше четырех.

Если бы нулей было всего два, то функция имела бы всюду такой же знак, как некоторая линейная комбинация единицы, синуса и косинуса. Тогда произведение функции и этой комбинации имело бы ненулевой интеграл вопреки ортогональности. Полученное противоречие доказывает, что нулей не меньше четырех (случай трех нулей легко разобрать подобно случаю двух, так как один из нулей тогда кратный).

Обобщения теоремы Штурма—Гурвица обсуждаются ниже, в конце раздела 10 (с. 58).

**Замечание 1.** Было бы интересно понять, *какие кривые (скажем, соединяющие вершины параллелограммов, каковые вершины являются точками возврата кривых, и имеющие альтернированные*

длины, равные нулю) являются каустиками периодических функций. Свойство быть такой каустикой накладывает дополнительные ограничения: невырождение кривизны между точками возврата и отсутствие параллельных ориентированных касательных очевидным образом входят в их число. Касательные прямые к каустике периодической функции покрывают всю плоскость  $\{(A, B)\}$ . Это следует из теории Морса.

Действительно, функция  $G(A, B; \cdot)$ , заданная на окружности  $S^1$ , имеет там критическую точку  $c$ . Прямая, касающаяся каустики в соответствующей  $c$  точке, проходит через точку  $(A, B)$ . Дело в том, что все функции на  $S^1$ , соответствующие точкам этой касательной прямой, имеют на окружности общую критическую точку  $c$ .

Но можно, вместо того, чтобы ограничивать каустики, обобщать исходные функции, заменяя их, например, «многозначными функциями», т. е. кривыми на поверхности цилиндра  $S^1 \times \mathbb{R}$ , уже не являющимися сечениями расслоения  $(J^0(S^1, \mathbb{R}) = S^1 \times \mathbb{R}) \rightarrow S^1$  над окружностью (расслоения  $(\varphi, g) \mapsto \varphi$ ).

Можно допустить в  $J^0(S^1, \mathbb{R})$  и кривые с особенностями, даже не иммерсированные. Действительно, естественным объектом является здесь точная лагранжева кривая  $L \subset T^*S^1$ , являющаяся обобщением графика производной функции  $g$ , состоящего из точек  $\{(\varphi, p) : p = dg/d\varphi\} = L$ .

График самой функции  $g$  является для этой лагранжевой кривой фронтом ее лежандрова поднятия в трехмерное пространство 1-струй функций на окружности,  $J^1(S^1, \mathbb{R}) = \{(\varphi, y, p)\}$ , куда она поднимается в качестве 1-графика функции  $\{(\varphi, y = g(\varphi), p = g'(\varphi))\}$ . Фронт есть естественная проекция этой лежандровой кривой при отображении забывания производной,  $J^1(S^1, \mathbb{R}) \rightarrow J^0(S^1, \mathbb{R})$ , отправляющем  $(\varphi, y, p)$  в  $(\varphi, y)$ . Таким образом, лежащий в  $J^0$  псевдограф (фронт) лагранжевой кривой  $L$  сам может иметь точки возврата. Поэтому следовало бы распространить теорему Штурма—Гурвица (и ее следствия, описанные выше) на каустики таких псевдографов, а не только настоящих гладких функций, для которых все уже доказано.

**Замечание 2.** Точки возврата на каустике соответствуют точкам сферического перегиба соответствующих лагранжевых кривых в фазовом пространстве  $L \subset T^*S^1$ . А именно, для  $p = g'(\varphi)$  на  $L$  уравнение  $(g' + g''')(\varphi_0) = 0$  выражает касание повышенного порядка кривой  $L$  с графиком одной из функций  $p = a \cos \varphi + b \sin \varphi$  в точке  $\varphi_0$ .

Рассмотрим цилиндр  $T^*S^1 = \{(\varphi, p)\}$  как поверхность  $\{x^2 + y^2 = 1\}$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $(x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, p)$ .

Проецируя этот цилиндр на сферу  $X^2 + Y^2 + P^2 = 1$  лучами из начала координат,

$$\left( X = \frac{x}{r}, Y = \frac{y}{r}, P = \frac{p}{r} \right), \quad r^2 = x^2 + y^2 + p^2,$$

мы отобразим лагранжеву кривую  $L$  на сферическую кривую, а графики функций  $p = a \cos \varphi + b \sin \varphi$  — на окружности больших кругов. Точки, где  $g' + g''' = 0$ , перейдут в точки сферического перегиба спроецированной кривой (ср. [5]).

Чтобы использовать проективную геометрию фазового цилиндра  $T^*S^1 = \{(\varphi, p)\}$ , можно ввести там (локальные) аффинные координаты

$$\left( t = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \omega = \frac{p}{x} \right).$$

В этих координатах уравнение точек возврата каустики  $g''' + g' = 0$  (для  $g' = p(\varphi)$ ) принимает форму уравнения обычных точек перегиба  $\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0$

(для функции  $\omega(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{p(\varphi)}{\cos \varphi}$ ).

Было бы интересно исследовать связь между проективными геометриями этой лагранжевой кривой и каустики (их двойственность). В выпуклой геометрии функцию  $-g$  называют *опорной функцией* (своей каустики).

В [6] доказано, что *кривая, проективно двойственная астроиде, есть антиокружность*, которая задается уравнением

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$$

в подходящей системе аффинных координат  $(x, y)$  на двойственной плоскости.

## 2. Гиперболические периодические функции

**Определение 1.** Кривая  $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (отображение окружности в трехмерное пространство вещественных квадратичных форм на плоскости,  $\mathbb{R}^3 = \{\Phi = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2\}$ ) называется *гиперболической*, если каждая из квадратичных форм  $\gamma(\varphi)$ ,  $\varphi \in S^1$  ( $= \{\varphi \bmod 2\pi\}$ ) имеет гиперболическую сигнатуру  $(+, -)$ , т. е. если ее гессиан отрицателен:

$$a(\varphi)c(\varphi) - b^2(\varphi) < 0$$

для всякого  $\varphi$ .

Гиперболическая форма  $\Phi$  определяет *крест*  $\Phi=0$  на плоскости  $\{(\xi, \eta)\}$ . В структуру, называемую «крест формы  $\Phi$ », мы будем включать не только пару прямых, на которых форма обращается в 0, но и ту пару секторов, где она положительна.

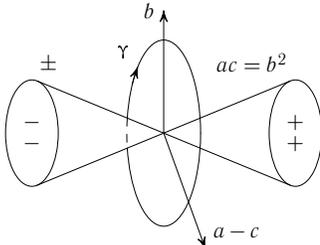


Рис. 3. Гиперболическая кривая индекса 1

**Определение 2.** Индексом гиперболической кривой  $\gamma$  называется число оборотов точки  $\gamma(\varphi)$  вокруг конуса вырожденных форм  $\{ac - b^2 = 0\}$ , т. е. (рис. 3)

$$\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg(a - c + 2bi)(\varphi) \Big|_0^{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

(эта формула фиксирует выбор ориентации кривой индекса 1, т. е. выбор коориентации оси конуса, в зависимости от ориентации плоскости  $\{(x, y)\}$ , поэтому для семейства квадратичных форм  $d^2f$  индексы от выбора этой ориентации плоскости не зависят).

**Определение 3.** Индексом крестов гиперболической кривой  $\gamma$  называется число оборотов крестов форм  $\Phi = \gamma(\varphi)$  при увеличении  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ .

**Замечание.** В отличие от индекса гиперболической кривой, индекс ее крестов — не обязательно целое число: он может быть и полуцелым,  $\text{ind}(\text{крест } \gamma(\varphi)) \in \mathbb{Z}/2$ .

Действительно, возможна *мондромия*, когда после полного обхода замкнутой кривой  $\gamma$  крест возвращается на прежнее место с перестановкой  $(\xi, \eta) \mapsto (-\xi, -\eta)$  двух своих секторов положительности (рис. 4).

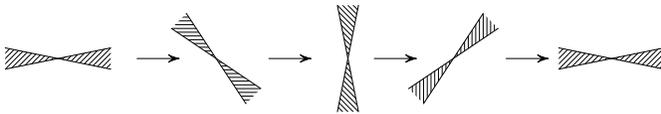


Рис. 4. Мондромия крестов

**Теорема 1.** Индексы гиперболической кривой и ее крестов не меняются при деформации кривой, оставляющей ее гиперболической.

Это следует просто из непрерывности индексов. Поскольку фундаментальная группа многообразия гиперболических форм есть  $\mathbb{Z}$ , из этой теоремы следует, что индекс крестов кривой  $\gamma$  является универсальной (и линейной) функцией индекса кривой, которую достаточно посчитать для одного (нетривиального) примера.

**Пример.** Кривая  $\gamma$ , для которой

$$a = \cos(k\varphi), \quad b = \sin(k\varphi), \quad c = -\cos(k\varphi),$$

гиперболична:  $ac - b^2 = -1 < 0$ . Индекс этой кривой есть

$$\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg(2 \cos(k\varphi) + 2i \sin(k\varphi)) \Big|_0^{2\pi} = k.$$

Квадратичная форма на  $\mathbb{R}^2 = \{(\xi, \eta)\}$ , заданная нашей кривой, есть

$$\Phi(\varphi) = \cos(k\varphi)(\xi^2 - \eta^2) + \sin(k\varphi)(2\xi\eta).$$

В точке  $(\xi = \cos \theta, \eta = \sin \theta)$  эта форма равна

$$\cos(k\varphi) \cos(2\theta) + \sin(k\varphi) \sin(2\theta) = \cos(k\varphi - 2\theta).$$

Это значение формы положительно при  $\theta = k\varphi/2$ . Следовательно,

$$\text{ind}(\text{крест } \gamma(\varphi)) = \frac{k}{2}.$$

Тем самым доказана

**Теорема 2.** *Индекс крестов любой гиперболической кривой равен половине индекса этой кривой.*

Ниже эти замечания будут применены к специальному случаю  $D$ -однородной функции  $f(x, y) = r^D F(\varphi)$  ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ ), определяющей (например, при  $r = 1$ ) гиперболическую кривую

$$\gamma: (a = f_{x,x}, \quad b = f_{x,y}, \quad c = f_{y,y}).$$

Случай, когда  $f$  — многочлен, уже интересен (и весьма нетривиален, например, для  $D = 4$ ): *какие значения индексов достигаются при подходящем выборе однородного многочлена  $f$  (или однородной функции) при фиксированной степени однородности  $D$ ?* Мы обсудим, что об этом известно, ниже, в разделах 8—10: для любого гиперболического однородного многочлена степени 4 индекс крестов окажется равным  $-1$ .

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ

### 3. Однородные функции степени $D$ и связь их гиперболичности с теорией Морса

Формулируемые здесь результаты доказываются в следующих параграфах.

**Теорема 1.** Функция  $f(x, y) = r^D F(\varphi)$  (где  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) степени  $D > 1$  определяет гиперболическую кривую ( $r = \text{const} > 0$ )

$$\gamma(\varphi) = (a = f_{x,x}, b = f_{x,y}, c = f_{y,y}),$$

если и только если  $2\pi$ -периодическая функция  $F$  везде удовлетворяет условию (\*)  $D$ -гиперболичности (гессиан должен быть отрицателен)

$$D^2 F^2 + D F F'' - (D - 1) F'^2 < 0, \quad (*)$$

где  $' = d/d\varphi$ .

Такая функция  $F$  будет называться  $D$ -гиперболической.

**Пример.** Пусть функция  $F$  —  $D$ -гиперболическая. Тогда функция  $F^\alpha$  будет  $\alpha D$ -гиперболической (там, где  $F \neq 0$  — подробнее см. в разделе 8).

**Теорема 2.** Пусть  $F$  —  $D$ -гиперболическая функция. Рассмотрим фазовый вектор  $\zeta(\varphi) \in \mathbb{R}^2$  с компонентами  $(F(\varphi), F'(\varphi))$ . Тогда

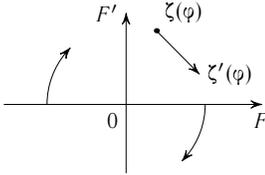


Рис. 5.  
Отрицательное вращение  
фазового вектора

направление вращения при возрастании  $\varphi$  этого фазового вектора  $\zeta$  вокруг начала координат (рис. 5) всюду отрицательно (при ориентации фазовой плоскости, заданной порядком координат  $F \wedge F'$ ), а угловая скорость  $\omega$  этого вращения по модулю всюду больше, чем  $1/D$ :

$$\omega = \frac{F F'' - F'^2}{F^2 + F'^2} < -\frac{1}{D}.$$

Лучшее описание вращения фазового вектора приведено ниже, в разделе 7.

**Теорема 3.** Индекс кривой  $\gamma$ , соответствующей  $D$ -гиперболической функции  $F$ , равен

$$\text{ind}(\gamma) = 2 + \text{ind}(M + iN),$$

где функции  $M$  и  $N$  угла  $\varphi$  определены формулами

$$M = D(D - 2)F - F'', \quad N = (2D - 2)F'.$$

Входящий в эту теорему индекс плоской кривой  $M + iN$  описывается теорией Морса:

**Теорема 4.** Индекс кривой  $M + iN$  отрицателен, и его модуль равен половине числа критических точек функции  $F$  (которое четно, потому что все эти критические точки для  $D$ -гиперболической функции невырождены):

$$\text{ind}(M + iN) = -\frac{1}{2} \#(\varphi_0 : F'(\varphi_0) = 0).$$

#### 4. Доказательства теорем об однородных функциях

Для полярного угла  $\varphi = \text{arctg}(y/x)$  мы имеем  $d\varphi = r^{-2}(x dy - y dx)$ . С другой стороны,

$$d(r^D) = d(r^2)^{D/2} = \frac{D}{2} (r^2)^{(D/2-1)}(2x dx + 2y dy) = Dr^{D-2}(x dx + y dy).$$

Следовательно, мы получаем выражение для дифференциала функции  $f(x, y) = r^D F(\varphi)$ :

$$df = Dr^{D-2}(x dx + y dy)F + r^{D-2}(x dy - y dx)F'.$$

Таким образом, мы нашли ее производные:

$$f_x = r^{D-2}(DxF - yF'), \quad f_y = r^{D-2}(DyF + xF').$$

Из первого выражения следует, что

$$\begin{aligned} d(f_x) &= \frac{D-2}{r^2} \frac{r^D}{r^2} (x dx + y dy)(DxF - yF') + \\ &+ \frac{r^D}{r^2} (DF dx - F' dy) + \frac{r^D}{r^2} DXF' \frac{x dy - y dx}{r^2} - \frac{r^D}{r^2} yF'' \frac{x dy - y dx}{r^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для второй производной однородной функции  $f$  мы получаем выражение

$$\begin{aligned} a = f_{x,x} &= r^{D-4}[(D-2)Dx^2F - (D-2)xyF' + Dr^2F - DxyF' + y^2F''] = \\ &= r^{D-4}[PF + QF' + RF''], \end{aligned}$$

где  $P = D(D-1)x^2 + Dy^2$ ,  $Q = 2(1-D)xy$ ,  $R = y^2$ .

Точно так же вычисляется производная функции  $f_x$  по  $y$ :

$$\begin{aligned} b = f_{x,y} &= r^{D-4}[(D-2)DxyF - (D-2)y^2F' - r^2F' + Dx^2F' - xyF''] = \\ &= r^{D-4}[SF + TF' + UF''], \end{aligned}$$

где  $S = D(D-2)xy$ ,  $T = (D-1)(x^2 - y^2)$ ,  $U = -xy$ .

Из найденного выше выражения для  $f_y$  видно, что

$$\begin{aligned} d(f_y) &= \frac{D-2}{r^2} \frac{r^D}{r^2} (x dx + y dy)(DyF + xF') + \\ &+ \frac{r^D}{r^2} (DF dy + F' dx) + \frac{r^D}{r^2} DyF' \frac{x dy - y dx}{r^2} + \frac{r^D}{r^2} xF'' \frac{x dy - y dx}{r^2}. \end{aligned}$$

Это дает для последней второй производной однородной функции  $f$  формулу

$$\begin{aligned} c = f_{y,y} &= r^{D-4}[(D-2)Dy^2F + (D-2)xyF' + Dr^2F + DxyF' + x^2F''] = \\ &= r^{D-4}[ZF + VF' + WF''], \end{aligned}$$

где  $Z = D(D-1)y^2 + Dx^2$ ,  $V = 2(D-1)xy$ ,  $W = x^2$ .

Из всего этого для  $a + c$  и  $a - c$  получаются более простые формулы:

$$a + c = r^{D-4}[(P + Z)F + (Q + V)F' + (R + W)F''],$$

где  $P + Z = D^2r^2$ ,  $Q + V = 0$ ,  $R + W = r^2$ , так что, окончательно, след второго дифференциала равен

$$a + c = r^{D-2}(D^2F + F'').$$

В то же время мы находим

$$a - c = r^{D-4}[(P - Z)F + (Q - V)F' + (R - W)F''],$$

где  $P - Z = D(D-2)(x^2 - y^2)$ ,  $Q - V = 4(1-D)xy$ ,  $R - W = y^2 - x^2$ .

Введем еще обозначения  $c_2 = \cos(2\varphi)$ ,  $s_2 = \sin(2\varphi)$ , так что  $x^2 - y^2 = r^2 c_2$ ,  $2xy = r^2 s_2$ . В этих обозначениях предыдущая формула имеет вид

$$a - c = r^{D-2}[D(D-2)c_2F + 2(1-D)s_2F' - c_2F''] = r^{D-2}[Mc_2 - Ns_2],$$

где  $M = D(D-2)F - F''$ ,  $N = (2D-2)F'$ . Величины  $M$  и  $N$ , определенные этими формулами, будут играть большую роль в дальнейшем.

С этими обозначениями мы находим

$$\begin{aligned} 2b &= r^{D-4}[2SF + 2TF' + 2UF''], \\ 2SF + 2UF'' &= r^2D(D-2)s_2F - s_2r^2F'' = r^2[D(D-2)F - F'']s_2 = r^2Ms_2, \\ 2TF' &= (2D-2)r^2c_2F' = r^2Nc_2. \end{aligned}$$

Окончательно, мы приходим к простым формулам

$$2b = r^{D-2}[Ms_2 + Nc_2], \quad a - c = r^{D-2}[Mc_2 - Ns_2].$$

Эти две вещественные формулы эквивалентны одной комплексной,

$$r^{D-2}(c_2 + is_2)(M + iN) = a - c + 2ib,$$

доказывающей теорему 3 раздела 3, поскольку  $\text{ind}(c_2 + is_2) = 2$  и  $\text{ind}(\alpha\beta) = \text{ind}(\alpha) + \text{ind}(\beta)$ .

Заодно мы получаем простую формулу для гессиана  $H = ac - b^2$ . Действительно,

$$(a - c)^2 + 4b^2 = r^{2D-4}(M^2 + N^2),$$

поэтому для выражения

$$4H = 4(ac - b^2) = (a + c)^2 - ((a - c)^2 + 4b^2)$$

мы находим последовательно (учитывая, что  $D^2F + F'' = 2D(D-1)F - M$ , из определения величины  $M$ )

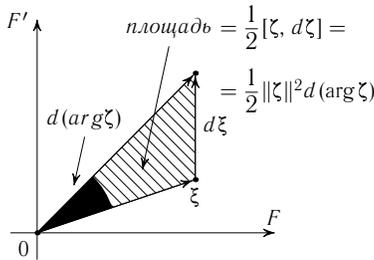
$$\begin{aligned} 4H &= r^{2D-4}[(D^2F + F'')^2 - M^2 - N^2] = \\ &= r^{2D-4}[4D^2(D-1)^2F^2 - 4D(D-1)FM + M^2 - M^2 - N^2] = \\ &= r^{2D-4}[4D^2(D-1)^2F^2 - 4D^2(D-1)(D-2)F^2 + \\ &\quad + 4D(D-1)FF'' - 4(D-1)^2F'^2] = \\ &= r^{2D-4}[4D^2(D-1)F^2 + 4D(D-1)FF'' - 4(D-1)^2F'^2] = \\ &= 4(D-1)r^{2D-4}[D^2F^2 + DFF'' - (D-1)F'^2], \end{aligned}$$

что и доказывает теорему 1 раздела 3.

Доказанное неравенство  $D$ -гиперболичности из теоремы 1 раздела 3,

$$D^2F^2 + DFF'' - (D - 1)F'^2 < 0, \quad (*)$$

влечет за собой теорему 2 раздела 3 (об угловой скорости  $\omega$  вращения фазового вектора  $\zeta(\varphi)$ ). Действительно, по определению на евклидовой



плоскости  $\omega = d(\arg \zeta)/d\varphi$ , поэтому, используя кеплерово выражение секториальной скорости  $[\zeta, \zeta']/2$  через  $\omega$  как  $\omega \|\zeta\|^2/2$ , мы находим (рис. 6)

$$\omega = \frac{[\zeta, \zeta']}{\|\zeta\|^2},$$

где  $\zeta = (F, F')$ ,  $\zeta' = (F', F'')$ ,  $[\zeta, \zeta'] = FF'' - F'^2$ ,  $\|\zeta\|^2 = F^2 + F'^2$ . Из неравенства  $D$ -гиперболичности (\*) следует, что

$$D(FF'' - F'^2) < -D^2F^2 - F'^2 < -F^2 - F'^2 < 0,$$

Рис. 6. Вычисление угловой скорости

поэтому  $\omega < -1/D < 0$ , что и доказывает теорему 2 раздела 3 (которую мы еще усилим в теореме 1 раздела 7 на с. 27).

Одновременно мы убедились, что число оборотов фазового вектора  $\zeta = (F, F')$  для  $D$ -гиперболической функции  $F$  есть произведение числа  $(-1/2)$  на число нулей функции  $F$  (или же на (равное ему) число нулей ее производной  $F'$ ). К тому же доказана перемежаемость корней этих функций, а значит, и антироллево свойство: между любыми двумя нулями производной есть нуль функции  $F$ .

Доказательство теоремы 4 раздела 4. Пусть  $F'(\varphi_0) = 0$  (так что и  $N(\varphi_0) = 0$ ). Отыщем знак производной  $N'(\varphi_0)$  функции  $N$ . Из неравенства  $D$ -гиперболичности (\*) мы заключаем, что в точке  $\varphi_0$  произведение  $F(DF + F'')$  отрицательно.

Значит, знак  $F(\varphi_0)$  противоположен знаку  $(DF + F'')(\varphi_0)$ . Из этого следует, что знак  $F''(\varphi_0)$  противоположен знаку  $F(\varphi_0)$ . Но  $M = D(D - 2)F - F''$  по своему определению. Значит, знак  $M(\varphi_0)$  противоположен знаку  $F''(\varphi_0)$ , а следовательно, и знаку  $(dN/d\varphi)(\varphi_0)$ .

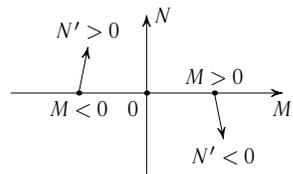


Рис. 7. Вращение вектора  $M + iN$

Иными словами, если  $N(\varphi_0) = 0$  и  $M(\varphi_0) < 0$ , то  $N'(\varphi_0) > 0$ , а если  $N(\varphi_0) = 0$  и  $M(\varphi_0) > 0$ , то  $N'(\varphi_0) < 0$  (рис. 7). Это и означает, что индекс

кривой  $M + iN$ , посчитанный по пересечениям с осью  $M$ , равен минус половине числа пересечений с этой осью:

$$\text{ind}(M + iN) = -\frac{1}{2}(\#\varphi_0 : F'(\varphi_0) = 0) = \text{ind}(F + iF') < 0$$

— каждое пересечение — отрицательно-вращающее. □

## 5. Примеры $D$ -гиперболических функций

Пусть  $D > 1$ .

**Теорема 1.** Для всякого целого  $k \geq \sqrt{D}$  существуют  $D$ -гиперболические функции, для которых  $\text{ind}(M + iN) = -k$  (так что  $\text{ind}(a - c + 2ib) = 2 - k$ ) (рис. 8).



Рис. 8. Область реализованных индексов

**Доказательство.** Положим  $F(\varphi) = \cos(k\varphi)$ . Для проверки условия  $D$ -гиперболичности (\*) теоремы 1 раздела 3 вычислим нормированный гессиан  $h[F] = D^2 F^2 + DFF'' - (D-1)F'^2$  и убедимся, что  $h[\cos(k\varphi)] < 0$ . Подставляя  $F = \cos(k\varphi)$ , мы получаем для (нормированного) гессиана выражение

$$\begin{aligned} h[F] &= (D^2 - k^2 D) \cos^2(k\varphi) - (D-1)k^2 \sin^2(k\varphi) = \\ &= (D^2 - k^2 D + Dk^2 - k^2) \cos^2(k\varphi) - (D-1)k^2 = \\ &= (D^2 - k^2) \cos^2(k\varphi) - (D-1)k^2. \end{aligned}$$

Максимум этой функции равен

$$(\max\{0, D^2 - k^2\}) - (D-1)k^2 = \max\{-(D-1)k^2, D^2 - Dk^2\}.$$

Этот максимум отрицателен при  $k^2 > D > 1$ . В этом предположении ( $k^2 > D$ ) теорема доказана.

В оставшемся неразобранном случае  $k^2 = D$  (например,  $k = 2, D = 4$ ), выберем  $F$  в виде мало продеформированной функции  $\cos(k\varphi)$ :

$$F_\varepsilon = \cos(k\varphi) + \varepsilon g(\varphi).$$

Из приведенного выше выражения для  $h(\varepsilon) = h[F_\varepsilon]$  мы получаем квадратичную функцию — *возмущенный (нормированный) гессиан*

$$h(\varepsilon) = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2.$$

Мы уже вычислили невозмущенное значение  $h(0)$ :

$$h_0 = (D^2 - D)(\cos^2(k\varphi) - 1) \leq 0.$$

Выберем возмущение  $\varepsilon g$  так, чтобы превратить результат  $h_0 \leq 0$  в строгое неравенство  $h(\varepsilon) < 0$ . Из приведенной выше формулы для  $h[F]$  следует, что линейная по  $\varepsilon$  часть возмущения дается формулой

$$\begin{aligned} h_1 &= 2D^2 F_0 g + D F_0 g'' + D F_0'' g - 2(D - 1) F_0' g' = \\ &= (2D^2 - k^2 D) F_0 g + D F_0 g'' + 2k(D - 1) \sin(k\varphi) g' \end{aligned}$$

(слагаемое, содержащее  $\sin(k\varphi)$ , обращается в нуль в интересующих нас точках  $\varphi_*$ , где  $h_0 = 0$ ).

Выберем  $g$  так, чтобы знаки  $g$  в этих точках  $\varphi_*$  были противоположны знакам  $F_0$  (величины  $F_0(\varphi_*)$  отличны от нуля в точках, где  $h_0 = 0$ ), причем в окрестностях этих точек  $g$  будет константой (рис. 9).

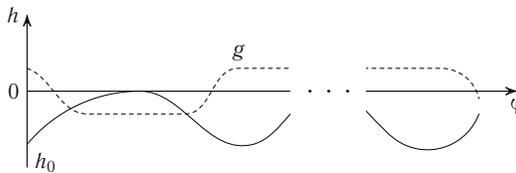


Рис. 9. Возмущение гессиана

В таком случае в этих окрестностях выполняется неравенство  $h_1 = D^2 F_0 g < 0$ . Отсюда следует отрицательность  $h(\varepsilon)$  повсюду (если  $\varepsilon > 0$  достаточно мало).  $\square$

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

### 6. Примеры $D$ -гиперболических многочленов степени $D > 1$

Приведенный в разделе 5 пример  $F = \cos(k\varphi)$ ,  $k^2 > D$  доставляет многочлены  $f(x, y) = r^D F(\varphi)$ , если  $k \leq D$  и разность  $D - k$  четна. В этом случае достаточно воспользоваться формулой

$$f(x, y) = r^{D-k} \operatorname{Re}(x + iy)^k = r^D \cos(k\varphi),$$

из которой видно, что функция

$$f = (x^2 + y^2)^{(D-k)/2} \operatorname{Re}(x + iy)^k$$

является однородным *многочленом* степени  $D$ . Этот многочлен  $D$ -гиперболический, если  $\sqrt{D} < k \leq D$  (согласно разделу 5). В этом примере  $F = \cos(k\varphi)$ , поэтому

$$M = (D(D-2) + k^2) \cos(k\varphi), \quad N = -(2D-2)k \sin(k\varphi).$$

Отсюда видно, что для этого многочлена

$$\operatorname{ind}(M + iN) = -k, \quad \operatorname{ind}(a - c + 2ib) = 2 - k.$$

Таким образом, мы построили примеры  $D$ -гиперболических многочленов, для которых

$$2 - D \leq \operatorname{ind}(\gamma) < 2 - \sqrt{D}, \quad \frac{2-D}{2} \leq \operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) < 1 - \frac{\sqrt{D}}{2}.$$

Указанные здесь ограничения снизу необходимы для полиномиальной реализации (как мы обсудим ниже, в (1), (2), с. 25), но не для гладкой. Сверху необходимые (даже в неполиномиальном случае) ограничения слабее (мы их обсудим на с. 26): например, для многочленов четной степени  $\operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) \leq 0$ .

**Пример 1.** При  $D = 2$  приведенный выше результат доставляет 2-гиперболический многочлен, для которого  $0 \leq \operatorname{ind}(\gamma) < 2 - \sqrt{2}$ . Единственное целое число в этом интервале есть нуль.

Нужный многочлен получается при  $k=2$ . В этом примере  $\text{ind}(M+iN) = -2$ ,  $\text{ind}(\gamma) = 0$ . Заметим, что при четном  $D$  многочлен  $f$  тоже четен, так что  $F(\varphi + \pi) \equiv F(\varphi)$ . Поэтому число критических точек функции  $F$  на окружности  $\{\varphi \bmod 2\pi\}$  не меньше четырех (эти критические точки просты, так как случай  $F' = F'' = 0$  исключен условием  $D$ -гиперболичности (\*)). Таким образом, по теоремам 3 и 4 раздела 3,

$$\text{ind}(M + iN) = \text{ind}(F + iF') = -\frac{1}{2} \#(\varphi: F'(\varphi) = 0) \leq -2.$$

Мы доказали, что реализованные в нашем примере значения индексов — единственно возможные:

$$\text{ind}(M + iN) = -2$$

для всякого 2-гиперболического однородного многочлена второй степени.

**Пример 2.** При  $D = 4$  наши неравенства ( $k^2 > D$ ,  $k \leq D$ ) оставляют две возможности:  $k = 3$  или 4.

Выбор  $k = 4$  дает 4-гиперболический многочлен:

$$\begin{aligned} F &= \cos(4\varphi), \\ f &= \text{Re}(x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \\ a &= 12(x^2 - y^2) = 12r^2 \cos(2\varphi), \\ c &= 12(y^2 - x^2) = -12r^2 \cos(2\varphi), \\ 2b &= -48xy = -24r^2 \sin(2\varphi); \end{aligned}$$

гессиан многочлена  $f$  есть поэтому  $ac - b^2 = -144r^4 < 0$ , так что многочлен  $f$  4-гиперболический.

Мы находим индексы

$$\begin{aligned} \text{ind}(a - c + 2ib) &= 2 - k = -2, \\ \text{ind}(\text{крест } \gamma) &= -1. \end{aligned}$$

Интервал<sup>1</sup> допустимых для наших примеров значений последнего (целочисленного при  $D = 4$ ) индекса есть, согласно общей теории,

$$\left( \left[ \frac{2-D}{2}, \left[ 1 - \frac{\sqrt{D}}{2} \right] \right) = ([-1, [0] = \{-1\}).$$

Таким образом, все наши примеры не дают других значений индексов 4-гиперболических многочленов. Остается пока открытым, например, вопрос, может ли такой многочлен иметь  $\text{ind}(M + iN) = -2$ ? Мы обсудим этот вопрос ниже, в разделе 10, обосновывая ответ: не может.

<sup>1</sup> Тут автор использует обозначение  $([a, [b)$  для интервала на прямой. В литературе встречаются также обозначения  $[a, b)$  или  $[a, b[$ . — Прим. ред.

Число нулей тригонометрического многочлена  $F'$  степени  $D$  не превосходит  $2D$ . Поэтому

$$|\operatorname{ind}(M + iN)| \leq D, \quad \operatorname{ind}(M + iN) < 0$$

(теорема 4 раздела 3). Следовательно,

$$\operatorname{ind}(M + iN) \in [-D, -2] \quad (1)$$

для  $D$ -гиперболического многочлена четной степени  $D$ ; в случае нечетной степени

$$\operatorname{ind}(M + iN) \in [-D, -1]. \quad (2)$$

Доказательство неравенств (1) и (2). Число максимумов  $\pi$ -периодического тригонометрического многочлена  $F$  на  $[0, 2\pi)$  — по меньшей мере 2. Поэтому число критических точек не меньше 4. По теореме 4 раздела 3,  $|\operatorname{ind}(M + iN)| \geq 2$  и  $\operatorname{ind}(M + iN) < 0$ .

Неравенство (1) доказано. Доказательство неравенства (2) аналогично (см. теорему 1 ниже).  $\square$

**Пример 3.** Пусть  $D = 6$ . Наши обычные неравенства ( $k^2 > D$ ,  $k \leq D$ ) предоставляют 4 возможных значения,  $k = 3, 4, 5, 6$ . Чтобы получать многочлены, надо выбирать  $k = 4$  или 6 (одной четности с  $D$ ).

Функции  $F_4 = \cos(4\varphi)$  и  $F_6 = \cos(6\varphi)$  6-гиперболически. Их индексы

$$\operatorname{ind}(a - c + 2ib)_{4,6} = (2 - 4 = -2)_4 \quad \text{и} \quad (2 - 6 = -4)_6$$

различны. Следовательно, многообразие 6-гиперболических многочленов не связно. Неясно, больше ли двух число его компонент связности.

**Теорема 1.** Пусть  $F$  —  $2\pi$ -периодическая (не обязательно  $D$ -гиперболическая) функция четности  $D$ :

$$F(\varphi + \pi) \equiv (-1)^D F(\varphi)$$

(как если бы функция  $r^D F(\varphi)$  была однородным многочленом степени  $D$  от  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ). Тогда половина числа критических точек функции  $F$  имеет такую же четность, как  $D$  (в предположении невырожденности этих критических точек, выполненном, например, для  $D$ -гиперболических функций):

$$\frac{1}{2} \#(\varphi_0 : F'(\varphi_0) = 0) \equiv D \pmod{2}.$$

Доказательство. Пусть  $D$  четно, обозначим через  $m$  число точек локального максимума между  $\varphi_0$  и  $\varphi_0 + \pi$ . Тогда число точек локального минимума в этой области такое же (поскольку  $F'(\varphi) = F'(\varphi_0 + \pi)$ , а знак  $F'$  меняется в каждой критической точке, и эти точки максимума

и минимума чередуются). Итак, общее число критических точек функции  $F$  есть  $4m$ , а его половина четна, как и  $D$ .  $\square$

Если  $D$  нечетно, то число критических точек между  $\varphi_0$  и  $\varphi_0 + \pi$  нечетно, поскольку  $F'(\varphi_0 + \pi) = -F'(\varphi_0)$ . Если их  $2m + 1$ , то общее число критических точек есть  $4m + 2$ , а его половина нечетна, как и  $D$ .

**Следствие.** Для  $D$ -гиперболического многочлена

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(M + iN) &\equiv D \pmod{2}; \\ \operatorname{ind}(M + iN) &\leq -2, \quad \text{если } D \text{ четно}; \\ \operatorname{ind}(M + iN) &\leq -1, \quad \text{если } D \text{ нечетно}; \\ \operatorname{ind}(\gamma) &\equiv D \pmod{2}; \\ \operatorname{ind}(\gamma) &\leq 0, \quad \text{если } D \text{ четно}; \\ \operatorname{ind}(\gamma) &\leq 1, \quad \text{если } D \text{ нечетно}; \\ \operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) &\in \mathbb{Z}, \quad \text{если } D \text{ четно}; \\ \operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) &\in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \quad \text{если } D \text{ нечетно}; \\ \operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) &\leq 0, \quad \text{если } D \text{ четно}; \\ \operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) &\leq \frac{1}{2}, \quad \text{если } D \text{ нечетно}. \end{aligned}$$

**Замечание.** Как мы увидим в разделе 8, для  $D$ -гиперболических функций ограничений на индексы меньше, чем для многочленов.

**Доказательство.** Сравнения по модулю 2 сразу вытекают из теоремы 1. После того, как они установлены, ограничения индексов сверху следуют из неравенств теоремы 4 раздела 3 и из того, что число нулей тригонометрического многочлена степени  $D$  не превосходит  $2D$ . Например, неравенство  $\operatorname{ind}(M + iN) < 0$  теоремы 4 и сравнение  $\operatorname{ind}(M + iN) \equiv D \pmod{2}$  влекут за собой неравенство  $\operatorname{ind}(M + iN) \leq -2$ , если  $D$  четно.  $\square$

## 7. Нормализованное фазовое пространство $D$ -гиперболической функции степени $D > 1$

**Определение.** Нормализованным фазовым вектором функции  $F$  называется зависящий от  $\varphi$  вектор  $L$  евклидовой плоскости с декартовыми ортонормированными координатами  $DF$  и  $F'$ : в комплексных обозначениях,

$$L = DF + iF'.$$

Предположим, что этот вектор отличен от нуля.

**Теорема 1.** Угловая скорость вращения нормализованного вектора  $L(\varphi)$   $D$ -гиперболической функции  $F$  при увеличении  $\varphi$  отрицательна и по модулю везде превосходит 1:

$$\omega < -1.$$

Доказательство. По определению угловой скорости,

$$\omega[L] = \frac{[L, L']}{D^2 F^2 + F'^2} = \frac{DF F'' - DF'^2}{D^2 F^2 + F'^2}.$$

Согласно неравенству  $D$ -гиперболичности (\*) раздела 3,

$$D^2 F^2 + F'^2 < -(DF F'' + DF'^2).$$

Следовательно, повсюду выполняется искомое неравенство

$$-\omega[L] > 1. \quad \square$$

Связь между гиперболичностью и вращением фазового вектора заранее не очевидна и появляется здесь только в результате непонятных пока вычислений: можно лишь надеяться, что эта связь объяснится в четномерном симплектическом фазовом пространстве.

**Следствие 1.** Число оборотов вектора  $L(\varphi)$  вокруг нуля при изменении  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  меньше или равно числу  $-2$ .

Ибо это целое число и по теореме оно строго меньше, чем  $-1$ .

**Следствие 2.** Число нулей  $D$ -гиперболической функции  $F$  на окружности (а также число нулей ее производной) не меньше четырех:

$$\#(\varphi_0: F(\varphi_0) = 0) \geq 4, \quad \#(\varphi_0: F'(\varphi_0) = 0) \geq 4.$$

Ибо для совершения одного оборота вектора  $L$  вокруг нуля приходится дважды пересекать каждую из осей координат (рис. 10).

**Следствие 3.** Индексы  $D$ -однородной  $D$ -гиперболической функции ограничены неравенствами

$$\text{ind}(M + iN) \leq -2,$$

$$\text{ind}(\gamma) \leq 0,$$

$$\text{ind}(\text{крест } \gamma) \leq 0.$$

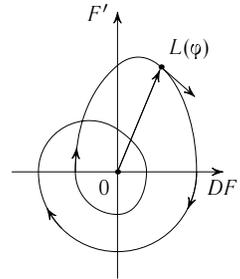


Рис. 10. Два оборота вокруг нуля

Первое неравенство следует из теоремы 4 раздела 3, ввиду следствия 2, а остальные вытекают из него (по теореме 3 раздела 3 и теореме 2 раздела 2).

Построенные выше примеры доставляют лишь отрицательные индексы, модуль которых растет с  $D$  не медленнее, чем  $\sqrt{D}$ . Вопрос о заполнении примерами интервала индексов от  $-\sqrt{D}$  до  $-2$  обсуждается ниже, в разделе 8 и решается по-разному для  $D$ -гиперболических многочленов и для  $D$ -гиперболических однородных функций.

**Следствие 4.** Для  $D$ -гиперболического однородного многочлена с нечетным  $D$  индексы ограничены неравенствами

$$\operatorname{ind}(M + iN) \leq -3, \quad \operatorname{ind}(\gamma) \leq -1, \quad \operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) \leq -\frac{1}{2}.$$

**Замечание.** В отличие от многочленов, функции (см. раздел 8) возможны с  $\operatorname{ind}(\gamma) = 0$ . Следствие 4 вытекает из того, что нечетное число, не превосходящее число  $-2$ , не превосходит и число  $-3$ .

**Пример.** Пусть  $D = 3$ . Для 3-гиперболического многочлена выполняются неравенства (следствие 4 и теорема 4 раздела 3)

$$\operatorname{ind}(M + iN) \leq -3, \quad |\operatorname{ind}(M + iN)| \leq 3.$$

Значит,  $\operatorname{ind}(M + iN) = -3$ . Следовательно,

$$\operatorname{ind}(\gamma) = -1, \quad \operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) = -\frac{1}{2}$$

для всякого 3-гиперболического многочлена.

Положим  $F = \cos(3\varphi)$ . Тогда  $f = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$ , поэтому вторые производные суть

$$(a = 6x, b = -6y, c = -6x), \quad ac - b^2 = -36r^2 < 0.$$

Итак, многочлен  $f$  является 3-гиперболическим,  $a - c = 12x$ ,  $2b = -12y$ . Стало быть, его индексы легко вычисляются

$$\operatorname{ind}(a - c + 2ib) = \operatorname{ind}(\gamma) = -1.$$

По определяющим  $M$  и  $N$  формулам (теорема 3 раздела 3), мы находим

$$M = 12 \cos(3\varphi), \quad N = -12 \sin(3\varphi).$$

Следовательно,  $\operatorname{ind}(M + iN) = -3$ ,  $\operatorname{ind}(\text{крест } \gamma) = -1/2$  (см. разделы 2, 3).

Таким образом, мы предъявили пример многочлена, для которого неравенства  $\leq$  следствия 4 обратились в равенства (при  $D = 3$ ).

Рассмотрим также бóльшие значения  $D$ . Функция  $F = \cos(3\varphi)$  остается  $D$ -гиперболической при  $D < 9$  (теорема 1 раздела 5). Полагая  $D = 3, 5, 7$ , мы получаем  $D$ -гиперболические многочлены  $f_D(x, y)$ , для которых выполнены условия

$$M = [D(D - 2) + 9]F, \quad N = -(6D - 6)F'.$$

Таким образом, для этих многочленов

$$\text{ind}(M + iN) = -3, \quad \text{ind}(\gamma) = -1, \quad \text{ind}(\text{крест } \gamma) = -\frac{1}{2}.$$

При  $D = 9$  мы получаем уже не многочлен, но однородную функцию с такими индексами.

**Теорема 2.** *Многообразие всех 3-гиперболических многочленов связно.*

*Доказательство.* Такой многочлен имеет вид  $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ . Его вторые производные суть  $a = 6Ax + 2By$ ,  $b = 2Bx + 2Cy$ ,  $c = 2Cx + 6Dy$ . Поэтому его гессиян есть многочлен

$$H = 4(3AC - B^2)x^2 + 4(3BD - C^2)y^2 + 2(18AD - 2BC)xy.$$

Условие 3-гиперболичности  $H < 0$  можно записать в виде отрицательной определенности формы  $H$  от  $x$  и  $y$ :

$$16(3AC - B^2)(3BD - C^2) - 4(9AD - BC)^2 > 0, \\ 3AC < B^2, \quad 3BD < C^2.$$

Вращением плоскости  $\{(x, y)\}$  всегда можно, сохраняя гиперболичность, уничтожить коэффициент  $A$ . В трехмерном пространстве, где  $A = 0$ , условие 3-гиперболичности принимает вид

$$\{4B^2(3BD - C^2) + B^2C^2 < 0, \quad B^2 > 0, \quad 3BD < C^2\},$$

то есть вид трех одновременно выполненных условий

$$\{4(3BD - C^2) + C^2 < 0, \quad 3BD < C^2, \quad B \neq 0\},$$

иными словами, условий

$$\{3C^2 - 12BD > 0, \quad 3BD < C^2, \quad B \neq 0\}.$$

Остается лишь условие  $\{C^2 > 4BD, \quad B \neq 0\}$ , так как при  $BD < 0$  первые два ограничения исчезают, а при  $BD \geq 0$  из  $C^2 > 4BD$  следует  $C^2 > 3BD$ .

Окончательно, в гиперплоскости  $A = 0$  получаются две области (вне конуса  $C^2 = 4BD$  и плоскости  $B = 0$ ) 3-гиперболических многочленов.

Но в четырехмерном пространстве многочленов с коэффициентами  $(A, B, C, D)$  эти две области соединены путем в пространстве 3-гиперболических многочленов. Действительно, постепенный поворот плоскости  $\{(x, y)\}$  на углы от 0 до  $\pi$  оставляет 3-гиперболические многочлены 3-гиперболическими и соединяет точку  $(A, B, C, D)$  с  $(-A, -B, -C, -D)$ . Поэтому обе компоненты пространства 3-гиперболических многочленов с  $A = 0$  представляют одну компоненту связности пространства всех 3-гиперболических многочленов, что и доказывает теорему.  $\square$

**Замечание.** Существует интересная двойственность между  $D_1$ -однородностью и  $D_2$ -однородностью, где  $D_1 + D_2 = 2$  (точнее, между соответствующими индексами).

Действительно, в этом случае

$$D_1(D_1 - 2) = D_2(D_2 - 2), \quad 2D_2 - 2 = -(2D_1 - 2).$$

Следовательно, для фиксированной функции  $F$

$$M_{D_1} = M_{D_2}, \quad N_{D_2} = -N_{D_1}.$$

Поэтому выполняются соотношения между индексами

$$\text{ind}(M_{D_2} + iN_{D_2}) = -\text{ind}(M_{D_1} + iN_{D_1}), \quad \text{ind}(\gamma_{D_2}) + \text{ind}(\gamma_{D_1}) = 4,$$

где  $\text{ind}(\gamma) = \text{ind}(M + iN) + 2$ . В этих формулах однородные функции

$$f_1 = r^{D_1} F(\varphi) \quad \text{и} \quad f_2 = r^{D_2} F(\varphi),$$

двойственные друг другу, не могут быть обе многочленами.

Противоречия с неравенствами для индексов не возникает потому, что при выводе этих неравенств мы везде предполагали, что  $D > 1$ , да и гиперболичность  $f_1$  и  $f_2$  — разные вещи.

## 8. Техника конструирования $D$ -гиперболических функций, уравнение Гессе и экстремальное вращение его фазового вектора

Изложенные ниже приемы построения  $D$ -гиперболических гладких функций позволяют реализовать гладкими однородными функциями степени  $D$  значения индексов, связанных с ними, удовлетворяющие естественным ограничениям, которые уже были указаны выше. Эта техника зависит в основном от теории обыкновенных дифференциальных уравнений, примененной к уравнению Гессе, которому удовлетворяют

экстремально  $D$ -гиперболические функции — те функции, для которых неравенство  $D$ -гиперболичности становится равенством. Получающиеся здесь результаты о вращении вектора фазовой плоскости относятся, в сущности, к теории неравенств между производными гладких функций. Они совершенно отличны от аналогичных результатов, относящихся к тригонометрическим многочленам фиксированной степени, которые мы обсудим в последующих параграфах и которые, в отличие от результатов настоящего параграфа, относятся скорее к алгебраической геометрии, чем к анализу.

**Теорема 1.** Пусть  $F$  —  $D$ -гиперболическая функция, не обращающаяся где-либо в 0. Тогда функция  $F^\alpha$  является там  $\alpha D$ -гиперболической.

Доказательство. Введем обозначения

$$\tilde{F} = F^\alpha, \quad \tilde{D} = \alpha D, \quad \tilde{H} = H_{\tilde{D}}[\tilde{F}] = \tilde{D}^2 \tilde{F}^2 + \tilde{D} \tilde{F} (\tilde{F}')^2 - (\tilde{D} - 1) (\tilde{F}')^2.$$

При таких обозначениях

$$(\tilde{F})' = \alpha F^{\alpha-1} F', \quad (\tilde{F})'' = \alpha(\alpha - 1) F^{\alpha-2} F'^2 + \alpha F^{\alpha-1} F''.$$

Эти формулы позволяют выразить новый гессиан  $\tilde{H}$  через  $F$ , а именно,

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \alpha^2 D^2 F^{2\alpha} + \alpha D [\alpha(\alpha - 1) F^{2\alpha-2} F'^2 + \alpha F^{2\alpha-1} F''] - (\alpha D - 1) \alpha^2 F^{2\alpha-2} F'^2 = \\ &= \alpha^2 F^{2\alpha-2} \{ [D^2 F^2 + D F F''] + F'^2 [(\alpha - 1) D - (\alpha D - 1)] \}. \end{aligned}$$

Заменяя вторую квадратную скобку на  $(1 - D)$ , мы получаем фундаментальное для этой теории тождество

$$\tilde{H} = \alpha^2 F^{2\alpha-2} \{ H_D[F] \}.$$

Таким образом,  $\tilde{H} < 0$ , если  $H_D[F] < 0$  (т. е. если функция  $F$   $D$ -гиперболична), при условии, что  $F \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ . Теорема 1 доказана.  $\square$

Для  $D$ -гиперболической функции  $F$  нам уже известны примеры с  $\text{ind}(M + iN) = -k$ , если  $k^2 > D$  (см. раздел 5), например,  $F = \cos(k\varphi)$ . Применяя теорему 1, мы получим функцию  $F^\alpha$  с тем же, что и для  $F$ , индексом  $-k$ , которая будет почти  $\alpha D$ -гиперболической (удовлетворяющей неравенству  $\alpha D$ -гиперболичности почти всюду, исключая лишь нули функции  $F$ ). Теперь индекс  $k$  и степень  $\tilde{D}$  могут быть связаны неравенством  $k^2 < \tilde{D}/\alpha$ , т. е. при  $\alpha > 1$  мы вышли за рамки ограничения «квадрат индекса меньше степени» старых примеров. Остается лишь исправить

нашу почти гиперболическую функцию вблизи нулей функции  $F$ , добиваясь настоящей  $\alpha D$ -гиперболичности. Это исправление и описано ниже.

**Определение.**  $D$ -критическим векторным полем на  $D$ -нормализованной фазовой плоскости с координатами  $(Q = DF, P = F')$  называется поле  $(Q', P')$ , определенное уравнением Гессе  $H_D[F] = 0$  второго порядка относительно функции  $F$ .

В терминах функции  $F$  компоненты поля имеют смысл  $Q' = DF', P' = F''$ . Явный вид выражений  $P'$  и  $Q'$  через  $P$  и  $Q$  приведен ниже (формула (\*\*)).

**Теорема 2.** Фазовые кривые  $D$ -критического векторного поля удовлетворяют уравнениям

$$P^2 + Q^2 = cQ^{2-2/D},$$

где зависящая от кривой постоянная  $c$  — первый интеграл.

Уравнение кривых теоремы 2 часто удобнее записывать в виде

$$(P^2 + Q^2)^D = c^D Q^{2D-2}.$$

Мы будем называть эти кривые  $D$ -критическими кривыми и обозначать их через  $\Gamma_c$ . Они изображены на рис. 11 и 12.

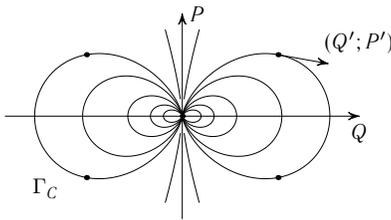


Рис. 11.  $D$ -критические кривые

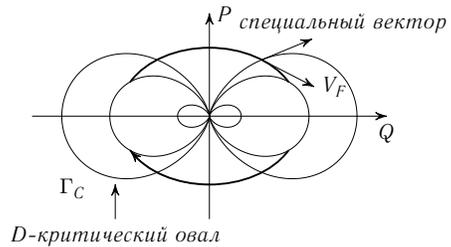


Рис. 12.  $D$ -гиперболичность как трансверсальность

**Доказательство.** По определению, вдоль  $D$ -критической фазовой кривой выполняются соотношения

$$\frac{dP}{d\varphi} = F'', \quad \frac{dQ}{d\varphi} = DF',$$

так что

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{F''}{DF'}.$$

Уравнение Гессе  $H_D[F] = 0$  имеет вид (§ 3)

$$D^2F^2 + DFF'' = (D - 1)F'^2, \quad (*)$$

что в наших обозначениях записывается как

$$Q^2 + DQP \frac{dP}{dQ} = (D - 1)P^2.$$

Это — дифференциальное уравнение  $D$ -критических кривых. Относительно переменной  $u = P^2$  оно линейное неоднородное:

$$\frac{du}{dQ} = \frac{(2D - 2)u}{DQ} - \frac{2Q}{D}.$$

Из однородного уравнения  $du/dQ = \lambda u/Q$  ( $\lambda = 2 - 2/D$ ), мы находим  $\ln u = \lambda \ln Q + C_1$ ,  $u = C_2 Q^\lambda$ . Теперь, варьируя постоянную  $C_2$ , мы получаем

$$\frac{du}{dQ} = \lambda C_2 Q^{\lambda-1} + \left(\frac{dC_2}{dQ}\right) Q^\lambda,$$

что должно быть равно правой части неоднородного уравнения,  $\frac{\lambda C_2 Q^\lambda}{Q} - \frac{2Q}{D}$ . Итак, для  $C_2$  мы получаем уравнение

$$\frac{dC_2}{dQ} = -\frac{2}{D} Q^{1-\lambda},$$

из которого находим (при  $\lambda \neq 2$ )

$$C_2 = -\frac{2}{D} \frac{Q^{2-\lambda}}{2-\lambda} + C_3.$$

Учитывая, что  $2 - \lambda = 2/D$  (по определению числа  $\lambda$ ), мы заключаем, что

$$C_2 = -Q^{2/D} + C_3,$$

то есть

$$u = -Q^{2/D+\lambda} + C_3 Q^\lambda = -Q^2 + C_3 Q^{2-2/D},$$

и, в силу определения  $u = P^2$ , уравнение экстремальной кривой имеет требуемый в теореме 2 вид:

$$P^2 + Q^2 = C_3 Q^{2-2/D}. \quad \square$$

**Замечание.** Попутно мы вычислили однородное векторное поле, касающееся  $D$ -критических кривых; мы будем называть его *специальным*

*D*-критическим полем:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{d\varphi} = DP, \\ \frac{dP}{d\varphi} = \frac{(D-1)P^2 - Q^2}{Q}. \end{cases} \quad (**)$$

Полезно также отметить найденную нами на плоскости  $\{(P, Q)\}$  *специальную дифференциальную форму*

$$d\varphi = \frac{dQ}{DP}. \quad (***)$$

Эта формула позволяет восстанавливать параметр  $\varphi$ , зная фазовую кривую.

**Замечание.** Вид *D*-критических кривых  $\Gamma_{C_3}$  ясен из их уравнения, доставляющего «овалы» с особенностью в нуле:

$$P = \pm \sqrt{C_3 Q^{2-2/D}} \sqrt{1 - \frac{Q^{2/D}}{C_3}}.$$

Вдоль *D*-критической кривой форма  $d\varphi$  имеет вид, «не зависящий от *D* и от  $C_3$ »:

$$\frac{dQ}{DP} = \frac{dq}{\sqrt{1-q^2}}, \quad q = \frac{Q^{1/D}}{\sqrt{C_3}}.$$

Интеграл формы  $d\varphi$  вдоль всего «овала» кривой  $\Gamma_{C_3}$

$$\pi = \oint d\varphi = \oint_{\Gamma_{C_3}} \frac{dQ}{DP}$$

не зависит ни от  $C_3$ , ни даже от *D* — это видно, например, из принадлежащих Леонардо да Винчи соображений подобия: кривая  $\mu\Gamma_{C_3}$  есть  $\Gamma_{C_3\mu^{-2/D}}$ , а  $\oint_{\Gamma} \frac{dQ}{DP} = \oint_{\mu\Gamma} \frac{dQ}{DP}$  для любой (необязательно критической) кривой  $\Gamma$ . Впрочем, во введенных только что обозначениях,  $\varphi = \arcsin q$  (для *D*-критических кривых).

Симметричные друг другу точки  $(Q, P)$ ,  $(-Q, P)$ ,  $(Q, -P)$ ,  $(-Q, -P)$  лежат на одной и той же *D*-критической кривой  $\Gamma_C$  (рис. 11).

Условие *D*-гиперболичности функции *F* легко выразить в терминах *D*-критических кривых. Пусть  $P \neq 0$ .

**Теорема 3.** *Кривая  $\{(Q = DF(\varphi), P = F'(\varphi))\}$  соответствует *D*-гиперболической функции *F* если и только если она входит транс-*

версально (без касания с  $D$ -критическими кривыми) в овалы  $\Gamma_c$  при условии движения в направлении  $dQ > 0$  при  $Q > 0$  и в направлении  $dQ < 0$  при  $Q < 0$ .

Доказательство. Рассмотрим определитель, составленный из специального вектора (\*\*) и вектора скорости  $V_F$  ( $Q = DF'$ ,  $P = F''$ ), определенного функцией  $F$  (рис. 12):

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} DP \\ DF' \end{array} \frac{(D-1)P^2 - Q^2}{F''} \right| &= DF'F'' - DF' \frac{(D-1)F'^2 - D^2F^2}{DF} = \\ &= \frac{F'}{F} [D^2F^2 + DFF'' - (D-1)F'^2]. \end{aligned}$$

Если знаки величин  $F$  и  $F'$  одинаковы, то для  $D$ -гиперболической функции  $F$  определитель отрицателен (согласно условию  $D$ -гиперболичности (\*) из раздела 3). В этом случае вектор  $V_F$  с компонентами  $(Q, P)$  направлен *внутрь* овала  $D$ -критической кривой. Остальные случаи рассматриваются таким же образом: важен лишь знак определителя.  $\square$

**Замечание 1.** При  $Q = 0$  условие трансверсальности состоит в том, что  $F' \neq 0$ . В исключенном в теореме случае  $P = 0$  можно было бы потребовать выполнения условия

$$F(DF + F'') < 0, \quad |P| > Q.$$

В терминах кривой на плоскости  $\{(Q, P)\}$  в точках пересечения с осью  $P = 0$  кривая, соответствующая  $D$ -гиперболической функции  $F$ , должна иметь меньшую кривизну, чем  $D$ -критическая кривая, проходящая через ту же точку оси  $P = 0$ .

Действительно, пусть  $F = c_0 + c_2\varphi^2 + \dots$ ,  $F' = 2c_2\varphi + \dots$ ,  $F'' = 2c_2 + \dots$ . В этом случае условие  $D$ -гиперболичности в 0 имеет вид:

$$(D^2F^2 + DFF'' - (D-1)F'^2)(0) = D^2c_0^2 + 2Dc_0c_2 < 0. \quad (*)$$

В терминах кривой на плоскости  $\{(Q, P)\}$ , мы получаем

$$\varphi = \frac{P}{2c_2} + \dots, \quad Q = DF = Dc_0 + Dc_2 \frac{P^2}{4c_2^2} + \dots,$$

так что вдоль нашей кривой  $Q = Q_0 + K_0 \frac{P^2}{2} + \dots$ , где кривизна  $K_0$  равна  $K_0 = \frac{D}{2c_2}$ . Условие  $D$ -гиперболичности в точке на оси  $P = 0$  (\*) записывается в виде  $c_0(Dc_0 + 2c_2) < 0$ , так что знак  $c_2$  противоположен знаку  $c_0$  и  $|2c_2| > D|c_0|$ ,  $|K| < \frac{1}{|c_0|}$ .

Для стандартной  $D$ -критической кривой неравенство  $(*_0)$  обращается в равенство, т. е.  $2c_2 = -Dc_0$ ,  $K_{\text{stand}} = -1/c_0$ . Выделенное выше условие  $D$ -гиперболичности в терминах кривизны доказано. Во введенных обозначениях это условие  $D$ -гиперболичности в точке  $(Q_0, 0)$  имеет вид  $|K_0| < |D/Q_0|$  (знак  $K_0$  противоположен знаку  $Q_0$ ).

**Замечание 2.** Если кривая  $D$ -гиперболична при  $P \neq 0$ , то при  $P = 0$  выполняется нестрогое неравенство  $|K_0| \leq 1/|c_0|$ . В случае равенства кубический член разложения  $F = c_0 + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 + \dots$  обязательно исчезает ( $c_3 = 0$ ). Но член  $c_4\varphi^4$  может обеспечить выполнение неравенства  $H_D < 0$  в окрестности точки  $P = 0$ , исключая саму эту точку: в этом случае наша кривая не является  $D$ -гиперболической (в точке  $P = 0$ ).

Теперь мы приступаем к исправлению почти  $D$ -гиперболичности.

**Теорема 4.** Пусть  $F$  — гладкая  $D$ -гиперболическая функция с простыми корнями, и пусть  $\alpha > 1$ . Тогда функция

$$F_\alpha = (\text{sign}F)|F|^\alpha$$

(которая  $\alpha D$ -гиперболична там, где  $F \neq 0$ ) допускает малую всюду  $\alpha D$ -гиперболическую деформацию  $\tilde{F}_\alpha$  отличную от  $F$  только в окрестностях корней функции и имеющую столько же корней, сколько функция  $F$ .

Доказательство. Ввиду локальности этой теоремы, достаточно рассмотреть случай, когда  $F$  имеет один простой корень. Мы выберем начало оси координат  $\varphi$  в этом корне.

В терминах кривых  $\{Q = (\alpha D)F_\alpha, P = F'_\alpha\}$  на  $\alpha D$ -нормализованной фазовой плоскости, трудность представляет лишь начало координат ( $Q = 0, P = 0$ ).

Наряду с плоскостью  $\{(Q, P)\}$ , удобно рассматривать еще и «вторую плоскость» с координатами  $(Q, 1/P)$ . Наша исходная кривая  $\hat{\Gamma}$ , построенная по функции  $F_\alpha$ , проходит через начало координат нормализованной фазовой плоскости, и вне его трансверсально пересекает  $\alpha D$ -критические кривые  $\Gamma_c$ , также входящие в начало координат.

Мы исправим кривую  $\hat{\Gamma}$ , отодвинув ее от начала координат вдоль оси  $P$ . Для простоты предположим, что  $P > 0$  вдоль  $\hat{\Gamma}$  в окрестности точки 0 (исключая эту точку). Мы слегка продеформируем  $\hat{\Gamma}$  вниз — уменьшая  $P$  — в двух близких к 0 интервалах слева и справа от нуля («деформация  $A$ »), а затем вверх — увеличивая  $P$  — между упомянутыми двумя интервалами (« $B$ -деформация») (рис. 13).

Продеформированная кривая,  $\tilde{\Gamma}$ , будет  $\alpha D$ -гиперболической, так как она трансверсально пересекает  $\alpha D$ -критические кривые. Для того, чтобы эта продеформированная кривая  $\tilde{\Gamma}$  соответствовала некоторой продеформированной функции,  $\tilde{F}_\alpha$ , близкой к  $F_\alpha$ , нужно только, чтобы у этих функций совпадали области определения (или периоды, если считать их определенными на всей оси  $\varphi$ ), т.е. чтобы интегралы формы  $d\varphi = dQ/(\alpha DP)$  вдоль возмущенной и невозмущенной кривых совпадали.

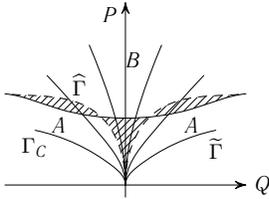


Рис. 13. А-деформация и В-деформация кривой  $\hat{\Gamma}$

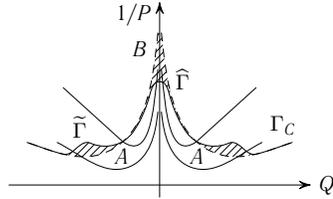


Рис. 14. А- и В-деформации на второй плоскости

При А-деформации образ кривой на второй плоскости (рис. 14) слегка поднимается, поэтому интеграл от  $d\varphi$  растет. При В-деформации кривая на второй плоскости опускается, уменьшая интеграл. Заметим, что интеграл от формы  $dQ/(\alpha DP)$  вдоль исходной кривой  $\hat{\Gamma}$  сходится: вдоль нее

$(Q \sim \alpha DC^\alpha \varphi^\alpha, P \sim \alpha C^\alpha \varphi^{\alpha-1})$  при  $F \sim C\varphi$  в окрестности простого нуля. Отсюда следует, что

$$(dQ/(\alpha DP) = d\varphi) \sim dQ/(\tilde{C}Q^{(1-1/\alpha)}),$$

$$\tilde{C} = \alpha^{(1+1/\alpha)} D^{1/\alpha} C,$$

и сходимость обеспечивается неравенством  $1 - 1/\alpha < 1$ .

Итак, В-деформацию можно выбрать так, чтобы интеграл от формы  $d\varphi$  уменьшился сколь угодно мало. Поэтому можно подобрать А- и В-деформации так, чтобы при переходе от кривой  $\hat{\Gamma}$  к кривой  $\tilde{\Gamma}$  интеграл от формы  $d\varphi$  не изменился.  $\square$

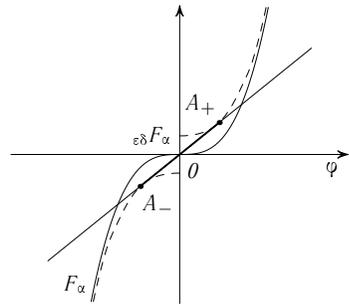


Рис. 15. Деформация функции  $F_\alpha$

**Замечание.** В терминах функции  $F_\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) нашу процедуру деформации можно описать так (рис. 15).

*Операция А:* функция  $F_\alpha$  заменяется на разрывную функцию  $F_\alpha(\varphi + \varepsilon\delta(\varphi))$ , где гладкая вне 0 функция  $\delta$  равна 0 вне малой окрестности

точки  $\varphi = 0$ , равна константе  $\delta_+ > 0$  в малой положительной полуокрестности нуля,  $\delta_- < 0$  в малой отрицательной (можно даже выбрать  $\delta_- = -\delta_+$ ).

*Операция В.* Теперь функция  ${}_{\varepsilon\delta}F_\alpha$  от  $\varphi$  определяется как указанная выше (разрывная в точке  $\varphi = 0$ ) сложная функция, график которой затем сглаживается путем замены в нем близкой к точке  $\varphi = 0$  части двойной касательной  $A_-A_+$ , проходящей через точки касания  $A_+$  и  $A_-$  касательной с графиком. Легко видеть, что (полученная еще сглаживанием вблизи точек касания)  $C^\infty$ -функция  $\tilde{F}_\alpha$  будет  $\alpha D$ -гиперболической.

Действительно, сравним значения гессиана  $H_{\alpha D}$  для  $F_\alpha$  и для  $\tilde{F}_\alpha$  в точках с одинаковым значением величины  $Q = D\alpha F_\alpha$  (соответственно,  $D\alpha\tilde{F}_\alpha$ ). Для  $\tilde{F}_\alpha$  слагаемое с  $FF''$  равно 0 между  $A_-$  и  $A_+$ , а слагаемое  $-(D\alpha - 1)\tilde{F}_\alpha'^2$  более отрицательно, чем для  $F_\alpha$ . Слагаемые же вида  $(D\alpha)^2F^2$  в соответствующих точках  $\varphi \neq 0$  одинаковы у обеих функций. Итак,

$$H_{\alpha D}[\tilde{F}_\alpha] < H_{\alpha D}[F_\alpha]$$

в соответствующих точках. Поэтому условие  $H_{\alpha D}[F_\alpha] \leq 0$  (с равенством лишь в корнях) влечет за собой неравенство  $\alpha D$ -гиперболичности  $H_{\alpha D}[\tilde{F}_\alpha] < 0$  везде.

**Следствие.** Для любого  $D > 1$  существует  $D$ -гиперболическая  $C^\infty$ -функция на окружности, имеющая ровно 4 критические точки такая, что

$$\text{ind}(M + iN) = -2, \quad \text{ind}(\gamma) = 0, \quad \text{ind}(\text{крест } \gamma) = 0.$$

*Доказательство.* Функция  $F = \cos(2\varphi)$  является  $m$ -гиперболической для каждого  $m$ ,  $1 < m < 4$  (раздел 5). Поэтому существует возмущение  $\tilde{F}_\alpha$  функции  $F_\alpha$  теоремы 4, которое  $(\alpha m = D)$ -гиперболично (нужно выбрать  $\alpha = D/m > 1$ , для чего нужно, чтобы  $m < D$ ).

Но число нулей функции не меняется при возмущениях  $A$  и  $B$  доказательством теоремы 4. Поэтому число критических точек  $D$ -гиперболической функции  $\tilde{F}_\alpha$  (равное числу ее нулей по теореме 4 раздела 3 и согласно разделу 4) равно 4.  $\square$

**Замечание 3.** Можно было бы начать с функции  $\cos(k\varphi)$ ,  $m$ -гиперболической при  $1 < m < k^2$ . Мы получили бы  $(\alpha m = D)$ -гиперболические функции с  $2k$  критическими точками при любом  $D > 1$ , выбирая  $m < D$ .

**Замечание 4.** Опишем другой способ огиперболичивания почти гиперболических функций вроде  $\cos^2(k\varphi)$ , имеющих нули с асимптотикой  $F = C|\varphi|^m + \dots$  (скажем,  $C > 0$ , с целым  $m > 1$ ).

Предположим, что функция  $F$   $D$ -гиперболична при  $\varphi \neq 0$ .

**Теорема 5.** Следующая конструкция делает почти  $D$ -гиперболическую функцию всюду  $D$ -гиперболической: график функции  $F$  между двумя точками  $\pm A$ , близкими к  $\varphi = 0$ , заменяется отрезками касательных к нему в этих точках (со сглаживанием угла между касательными в точке  $R$  их пересечения, рис. 16).

Доказательство. По условию  $F' \sim mC\varphi^{m-1}$ ,  $F'' \sim m(m-1)C\varphi^{m-2}$ , так что

$$H_D[F] = D^2F^2 + DFF'' - (D-1)F'^2 \sim \\ \sim [Dm(m-1)C^2 - (D-1)m^2C^2]\varphi^{2m-2} + \dots$$

Условие  $D$ -гиперболичности ( $H_D < 0$ ) приводит к неравенству  $D(m-1) \leq (D-1)m$ , т. е.  $m \leq D$ .

Ордината точки  $R$  пересечения касательных оценивается как  $|OR| \leq K|A|^m$ . Для функции, график которой составлен из двух касательных (исключая точку их пересечения  $R$ ), мы получаем неравенство  $D$ -гиперболичности

$$H_D \leq -(D-1)m^2C^2A^{2m-2} + O(A^{2m}) < 0$$

(слагаемое, содержащее  $F''$ , обращается в 0 на касательных, а  $F^2 = O(A^{2m})$ ).

Сглаживание делает вторую производную  $F''$  положительной там, где функция отрицательна, так что значение  $H_D$  при этом уменьшается и остается отрицательным, что и доказывает теорему.  $\square$

**Замечание.** Этим методом можно воспользоваться, чтобы построить  $D$ -гиперболические функции путем малых деформаций функций  $|\cos^\alpha(k\varphi)|$ , рассматривая их как  $(\alpha m = D)$ -гиперболические.

Но при доказательстве теоремы 5 мы удваиваем число корней, так что оно становится равным  $4k$ . Число критических точек функции  $|\cos^\alpha(k\varphi)|$  с ненулевыми критическими значениями равно  $2k$ .

При сглаживаниях мы добавляем еще  $2k$  критических точек, так что у продеформированной функции будет  $4k$  критических точек — столько же, сколько нулей (как и должно быть у  $D$ -гиперболической функции согласно разделу 4).

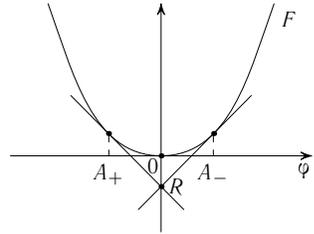


Рис. 16. Огиперболичивание

## АСТРОИДА

### 9. Многочлены четвертой степени и их астроидальная каустика

Рассмотрим семейство  $2\pi$ -периодических функций

$$F_{A,B}(\Phi) = A \cos(\Phi) + B \sin(\Phi) + \cos(2\Phi),$$

зависящих еще от двух вещественных параметров  $((A, B) \in \mathbb{R}^2)$ .

**Теорема 1.** *Области плоскости  $\{(A, B)\}$ , образованные тригонометрическими многочленами  $F_{A,B}$  с четырьмя и с двумя критическими точками  $\Phi \in S^1 (= \mathbb{R} \bmod 2\pi)$ , разделяются астроидой*

$$\{(A = -4 \cos^3(\Phi_0), B = 4 \sin^3(\Phi_0))\},$$

параметризованной здесь двойной критической точкой  $\Phi_0$ .

Астроида является также гипоциклоидой с четырьмя точками возврата (образом отображения  $t \mapsto 3e^{it} + e^{-3it}$ ) и удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{A}{4}\right)^{2/3} + \left(\frac{B}{4}\right)^{2/3} = 1.$$

Касательная к астроиде в точке, соответствующей  $\Phi_0$ , имеет направляющим вектором  $(\cos \Phi_0, \sin \Phi_0)$  и состоит из многочленов с той же критической точкой  $\Phi_0$ . Нормаль к астроиде в этой точке состоит из многочленов с той же точкой перегиба ( $F''(\Phi_0) = 0$ ) графика.

(В этом параграфе мы обозначаем производную по  $\Phi$  штрихом).

**Доказательство.** Пользуясь обозначениями

$$c = \cos(\Phi), \quad s = \sin(\Phi), \quad c_2 = \cos(2\Phi), \quad s_2 = \sin(2\Phi),$$

мы можем записать уравнение критических точек

$$-As + Bc - 2s_2 = 0 \tag{1}$$

и уравнение точек перегиба графика функции  $F$

$$-Ac - Bs - 4c_2 = 0. \tag{2}$$

Решая эту систему линейных относительно  $A$  и  $B$  уравнений, мы получаем

$$\{A = -2s s_2 - 4c c_2, B = 2c s_2 - 4s c_2\}.$$

Учитывая равенства  $s_2 = 2sc$ ,  $c_2 = c^2 - s^2 = 2c^2 - 1$ , мы можем переписать ответ в виде

$$\begin{cases} A = -4c(1 - c^2) - 4c(2c^2 - 1) = -4c^3, \\ B = 4s(1 - s^2) - 4s(1 - 2s^2) = 4s^3. \end{cases}$$

При  $A = B = 0$  критических точек 4, поэтому их 4 всюду внутри астроида. При пересечении астроида число вещественных критических точек уменьшается на 2 и остается равным 2 везде вне ограниченного астроида бубнового туза.  $\square$

**Замечание.** Совершенно такие же вычисления доставляют аффинно эквивалентную астроиде кривую в качестве каустики эллипса, разделяющей точки плоскости, из которых исходят четыре перпендикулярных эллипсу прямые, от тех, где таких прямых только две. В этом случае в качестве функции лучше взять квадрат расстояния от точки плоскости до точки эллипса (рис. 17).

При перемещении по касательной к астроиде,

$$(A(\lambda) = A_0 + \lambda \cos \Phi_0, B(\lambda) = B_0 + \lambda \sin \Phi_0),$$

соотношение (1) сохраняется, так что точка  $\Phi_0$  остается критической. При этом скорость изменения критического значения  $F_{A,B}(\Phi_0)$  при движении вдоль этой касательной к астроиде есть

$$\frac{dF_{A,B}(\Phi_0)}{d\lambda} = 1,$$

так что

$$F_{A(\lambda),B(\lambda)}(\Phi_0) = F_{A(0),B(0)}(\Phi_0) + \lambda.$$

Для *увеличения* критического значения нужно двигаться по касательной к астроиде *в направлении*  $d\lambda > 0$ , в котором  $\Phi$  растёт, если функции  $s$  и  $c$  одного знака (т. е. если  $A$  и  $B$  противоположных знаков); при  $A$  и  $B$  одного знака для увеличения критического значения надо двигаться в направлении уменьшения  $\Phi$ .

Таким образом, направления «положительных полукасательных», на которых  $\lambda > 0$ , непрерывны в точках возврата астроида (в то время

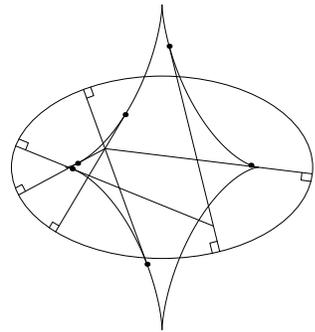


Рис. 17. Каустика эллипса и его нормали

как ориентирующее астроиду направление меняется в них). Положительные полукасательные к астроиде направлены в сторону возрастания  $|B|$ , т. е. «вверх», при  $B > 0$  и «вниз» при  $B < 0$  (рис. 18).

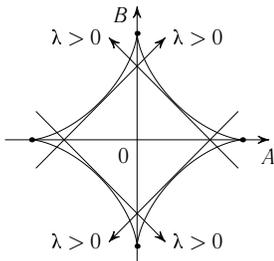


Рис. 18.

Астроида и ориентация ее касательных

При движении по нормали к астроиде,

$$(A^\nu(\mu) = A_0 - \mu \sin \Phi_0, B^\nu(\mu) = B_0 + \mu \cos \Phi_0),$$

сохраняется уравнение (2), так что  $\Phi_0$  остается точкой перегиба графика. В этом случае значение  $F_{A^\nu, B^\nu}(\Phi_0)$  не меняется при изменении  $\mu$ , но производная растет вдоль нормали:

$$F'_{A^\nu(\mu), B^\nu(\mu)}(\Phi_0) = F'_{A^\nu(0), B^\nu(0)}(\Phi_0) + \mu.$$

В точке астроиды  $F'_{A^\nu(0), B^\nu(0)}(\Phi_0) = 0$ , поэтому значение производной  $F'_{A^\nu, B^\nu}(\Phi_0)$  в точках нормали к астроиде равно расстоянию до исходной точки астроиды (с нужным знаком).

Положительная ориентация нормали получается из положительной ориентации касательной (которую нужно повернуть на  $90^\circ$  в направлении от оси  $A$  к оси  $B$ ).

Через внешние по отношению к астроиде точки проходят по две нормали, соответствующие им «расстояния»  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — разных знаков.

Таким же образом можно использовать касательные к астроиде для вычисления величины приращения второй производной

$$F''_{A(\lambda), B(\lambda)}(\Phi_0) = F''_{A(0), B(0)}(\Phi_0) - \lambda$$

— это приращение равно (взятому со знаком минус) расстоянию вдоль касательной до точки касания с астроидой. Этому же числу равна и сама вторая производная, так как в точке астроида-каустики  $F''_{A(0), B(0)}(\Phi_0) = 0$ . Сумма функции  $F$  и ее второй производной по  $\Phi$  не меняется при движении вдоль касательной к астроида-каустике.

Однородные многочлены четвертой степени,  $f(x, y) = r^4 F(\varphi)$ , соответствуют «четным» тригонометрическим многочленам  $F$  степени 4. Выбором масштаба и начала координат оси  $\varphi$  их можно свести к виду

$$F_{A, B; F_0}(\varphi) = F_0 + A \cos(2\varphi) + B \sin(2\varphi) + \cos(4\varphi).$$

Заменой координаты  $2\varphi = \Phi$  мы сводим это семейство, с точностью до постоянного слагаемого  $F_0$ , к рассматривавшемуся выше 2-параметрическому семейству функций от  $\Phi$ . Как мы сейчас увидим, полученные ранее сведения об астроидальной каустике очень полезны для исследования многообразия 4-гиперболических однородных многочленов степени 4.

## 10. Фронты астроида, теория гипоциклоид и области 4-гиперболичности

Запишем условие 4-гиперболичности ( $H_4[F] < 0$ ) для указанного выше четного тригонометрического многочлена  $F$  степени 4. Это условие должно выполняться при любом значении  $\varphi$ , но мы вначале зафиксируем это значение. Мы будем также пользоваться координатой  $\Phi = 2\varphi$  и будем теперь обозначать производные по  $\varphi$  штрихами, а по  $\Phi$  — точками:

$$\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{d\varphi} = 2 \frac{d}{d\Phi}; \quad \cdot \phantom{x} = \frac{d}{d\Phi} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi}.$$

В этих обозначениях условие 4-гиперболичности ((\*) из раздела 3) принимает вид  $H_{A,B,F_0}(\varphi) < 0$ , где нормированный гессиан с параметрами задается формулой

$$H = 4F(4F + F'') - 3F'^2,$$

так что условие 4-гиперболичности имеет также вид

$$H = 16F(F + F'') - 12F'^2 < 0.$$

Зафиксируем теперь значения параметра  $F_0$  и аргумента  $\Phi = \Phi_0$ .

**Теорема 1.** *Кривая  $H = 0$  на плоскости параметров  $(A, B)$  является параболой. Ось этой параболы касается каустики-астроида в точке, соответствующей  $\Phi_0$ . Вершина этой параболы лежит на фронте, соответствующем критическому значению 0, на расстоянии  $\lambda = 3 \cos(4\varphi_0) - F_0$  от точки касания оси параболы с каустикой-астроидой.*

*Ось параболы направлена от ее вершины в сторону точки своего касания с каустикой-астроидой. Центр кривизны параболы в вершине расположен от вершины на расстоянии, равном  $2/3$  расстояния от вершины до точки касания, так что кривизна параболы в вершине в  $3/2$  раза больше кривизны фронта в этой точке (рис. 19).*

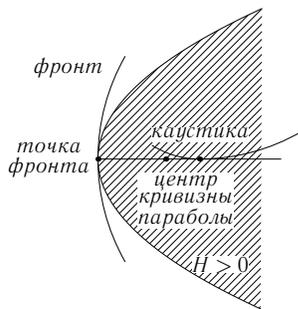


Рис. 19. Парабола, ограничивающая область эллиптичности

Явная формула для нахождения вершины параболы (задающая также параметризацию 0-фронта критической точкой  $\varphi_0$ ) имеет, таким

образом, вид

$$A(\lambda) = -4 \cos^3(2\varphi_0) + \lambda \cos(2\varphi_0), \quad B(\lambda) = 4 \sin^3(2\varphi_0) + \lambda \sin(2\varphi_0),$$

где  $\lambda(\varphi_0) = 3 \cos(4\varphi_0) - F_0$ ; чтобы получить  $C$ -фронт, надо увеличить это значение  $\lambda(\varphi_0)$  на  $C$ .

**Доказательство.** В точке астроида-каустики

$$(A = -4 \cos^3(2\varphi_0), \quad B = 4 \sin^3(2\varphi_0)),$$

поэтому

$$F_{A,B;F_0}(\varphi_0) = F_0 - 4 \cos^4(2\varphi_0) + 4 \sin^4(2\varphi_0) + \cos(4\varphi_0).$$

Из тождества  $c^4 - s^4 = (c^2 - s^2)(c^2 + s^2) = c_2$  следует формула для критического значения в точке астроида-каустики:

$$F_{A,B;F_0}(\varphi_0) = F_0 - 4 \cos(4\varphi_0) + \cos(4\varphi_0).$$

Следовательно, в удаленной на расстояние  $\lambda$  вдоль касательной к астройде точке  $(A(\lambda), B(\lambda))$  критическим значением будет  $F_0 - 3 \cos(4\varphi_0) + \lambda$ . Чтобы это критическое значение было равно  $C$  (т. е. чтобы точка касательной принадлежала  $C$ -фронту), расстояние  $\lambda$  следует выбрать равным  $\lambda(\varphi_0) = C - F_0 + 3 \cos(4\varphi_0)$ .

Функция  $H$  точки  $(A, B)$  (при уже выбранных значениях  $F_0$  и критической точке  $\varphi_0$ ) вдоль касательной к астройде-каустике линейна, потому что значение производной  $F'(\varphi_0)$  остается равным нулю, сумма  $F + F''$  постоянна (см. раздел 9), а  $F_{A(\lambda), B(\lambda)}(\Phi_0) = F_{A(0), B(0)}(\Phi_0) + \lambda$ .

Постоянный множитель  $F + F''$  есть (в нашем случае, когда  $F = F_0 + A \cos(\Phi) + B \sin(\Phi) + \cos(2\Phi)$ ) просто  $F_0 - 3 \cos(2\Phi_0)$ . Таким образом, мы получаем для нормированного гессиана  $H$  вдоль касательной к астройде выражение

$$H = 16(F_0 - 3 \cos(2\Phi_0))(F_0 - 3 \cos(2\Phi_0) + \lambda).$$

Мы заключаем, что  $H = 0$  при  $\lambda = -F_0 + 3 \cos(2\Phi_0)$ , т. е. когда критическое значение функции  $F$  (в точке  $\Phi_0$ ) равно нулю. В точке каустики-астроида  $\lambda = 0$ , так что там  $H \geq 0$  (равенство лишь в точках возврата фронта, где  $3 \cos(2\Phi_0) = F_0$ ). Отсюда видно, что ось параболы (вдоль которой  $H > 0$ , исключая вершину параболы) содержит точку своего касания с каустикой.

*Радиус кривизны фронта в вершине параболы равен  $-\lambda(\Phi_0)$ , так как фронт является эвольвентой астроида-каустики, а  $\lambda$  — длина свободного конца нити.*

Рассмотрим теперь значения функции-гессиана  $H$  вдоль нормалей к уже исследованной касательной к каустике прямой. При движении точки  $(A, B)$  вдоль такой нормали значения ни  $F$ , ни  $F''$  в точке  $\Phi_0$  не меняются, а значение  $F'$  меняется со скоростью 1, как мы доказали в разделе 9. Таким образом, в зависящей от  $\lambda$  и от  $\mu$  точке

$$(A = A_0 + \lambda \cos(\Phi_0) - \mu \sin(\Phi_0), \quad B = B_0 + \lambda \sin(\Phi_0) + \mu \cos(\Phi_0))$$

значение  $H$  (при фиксированном аргументе  $\Phi_0$ ) будет иметь вид

$$H(\lambda, \mu) = 16U(U + \lambda) - 12\mu^2, \quad \text{где } U = F_0 - 3 \cos(2\Phi_0).$$

Отсюда следует, что кривая  $H = 0$  — парабола (исключая лишь случай  $U = 0$ , когда она вырождается в прямую). Для кривизны этой параболы в вершине (где  $\lambda = -U, \mu = 0$ ) мы получаем из формулы для  $H$

$$\lambda = \frac{12\mu^2}{16U} - U$$

значение  $\chi = 3/2U$ , поэтому радиус кривизны параболы в вершине, равный  $1/\chi$ , составляет  $2/3$  от радиуса кривизны  $U$  фронта в этой точке, так что теорема 1 доказана.  $\square$

Точки эллиптичности, где  $H > 0$  при  $\Phi = \Phi_0$ , составляют внутренность ограниченной нашей параболой выпуклой области.

**Пример.** При  $F_0 = 0$  легко исследовать 0-фронт, заданный уравнениями (рис. 20)

$$\begin{cases} A = -4 \cos^3(2\varphi_0) + 3 \cos(4\varphi_0) \cos(2\varphi_0), \\ B = 4 \sin^3(2\varphi_0) + 3 \cos(4\varphi_0) \sin(2\varphi_0). \end{cases}$$

Эта кривая — почему-то тоже астроида (вдвое меньшая исходной каустики). Совершенно таким же образом, среди фронтов гипоциклоиды с  $p$  остриями имеется почему-то такая же гипоциклоида (уменьшенная в  $\frac{p}{p-2}$  раз).

А именно, качение меньшей окружности радиуса  $r$  без скольжения внутри большого круга радиуса  $R + r$  приводит к траектории точки катящейся окружности, заданной как образ отображения эпициклов Птолемея

$$\Phi \mapsto re^{bi\Phi} + Re^{-i\Phi} \quad (= -(A + Bi)).$$

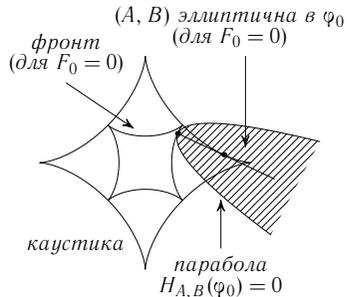


Рис. 20. Астроидаальный 0-фронт

Такая эпициклическая кривая будет гипоциклоидой с  $p = k + 1$  точками возврата, если длина окружности большого круга в  $p$  раз больше длины меньшего, т. е. если  $R + r = pr$ .

Эта гипоциклоида является также каустикой  $2\pi$ -периодической функции угла  $\varphi$

$$F = F_0 + Ac_n + Bs_n + c_m, \quad \text{где } c_m = \cos(m\varphi)$$

(значение постоянного слагаемого  $F_0$  при этом не существенно). Определяющие семейство  $F$  числа  $m$  и  $n$  связаны с числом точек возврата  $p$  получающейся каустики соотношением отсутствия скольжения (скорость точки контакта должна быть нулем):

$$\frac{R}{r} = \frac{(m+n)}{(m-n)} = k = p - 1.$$

Например, чтобы на каустике-гипоциклоиде было 4 точки возврата, удобно выбрать  $m = 4$ ,  $n = 2$ , так что  $R/r = 3$ . Чтобы точек возврата было  $p = 3$ , выберем  $m = 3$ ,  $n = 1$ , так что  $R/r = 2$ .

Решая определяющие каустику уравнения ( $F' = 0$ ,  $F'' = 0$ ) относительно  $A$  и  $B$ , мы получим, как в разделе 1,

$$(A = -Kc_{m+n} - Lc_{m-n}, \quad B = -Ks_{m+n} + Ls_{m-n}),$$

где  $K = \frac{m(m-n)}{2n^2}$ ,  $L = \frac{m(m+n)}{2n^2}$ , т. е. каустика удовлетворяет эпициклическому уравнению

$$-(A + iB) = Ke^{i(m+n)\varphi} + Le^{-i(m-n)\varphi},$$

где  $r = K$ ,  $R = L$ .

**Пример.** При  $p = 3$ ,  $m = 3$ ,  $n = 1$ , мы получаем  $k = 2$ ,  $K = 3$ ,  $L = 6$ ,  $A = -3c_4 - 6c_2$ ,  $B = -3s_2 + 6s_4$ .

Удобно считать  $m > n$  и использовать угловую координату  $\Phi = (m-n)\varphi$ . Направление каустики определяется направляющим вектором  $(c_n, s_n)$ :

$$\frac{d}{d\varphi}(Ke^{i(m+n)\varphi} + Le^{-i(m-n)\varphi}) = \tilde{K}e^{in\varphi},$$

$$\tilde{K} = -\frac{m(m^2 - n^2)}{n^2} \sin(m\varphi) \in \mathbb{R}.$$

Вдоль касательной к каустике, на расстоянии  $\lambda$  от нее, т. е. в точке

$$A + iB = -Ke^{i(m+n)\varphi} - Le^{-i(m-n)\varphi} + \lambda^{in\varphi},$$

выполняются условия  $F'(\varphi) = 0$ ,  $F''(\varphi) = -n^2\lambda$ ,  $\frac{\partial F(\varphi)}{\partial \lambda} = 1$ , поэтому

$\frac{\partial(DF+F'')}{\partial\lambda} = D - n^2$ . Из-за этого выберем  $D = n^2$  и назовем  $\varphi$ -критической точку, где  $\lambda = \lambda_*(\varphi)$  определяется из условия  $H_D(\varphi) = 0$ , разграничивающего эллиптические ( $H > 0$ ) точки от гиперболических ( $H < 0$ ). Вдоль нашей касательной  $D$ -гессиан есть  $H = D^2\tilde{F}(\tilde{F} + \lambda)$ , где  $\tilde{F}$  — значение  $F$  в точке каустики, так что  $\lambda_* = -\tilde{F}(\varphi)$ .

**Определение.**  $F_0$ -фронт каустики — это объединение всех  $\varphi$ -критических точек на всех касательных к каустике (проведенных при всех  $\varphi$ ).

**Замечание.** Легко видеть, что  $F_0$ -фронт в каждой точке ортогонален проведенной через эту точку касательной к каустике, т. е. является эвольвентой каустики. Его можно также определить как множество тех значений параметров  $(A, B)$ , при которых функция нашего семейства  $F$  (с выбранным значением  $F_0$ ) имеет нуль одним из своих критических значений.

Иными словами, если при определении функции  $F$  не включать в формулу постоянное слагаемое, то  $F_0$ -фронт будет тем множеством значений параметров  $(A, B)$ , для которых эта укороченная функция  $F$  имеет постоянное критическое значение,  $C = -F_0$ .

Таким образом, понятие  $F_0$ -фронта каустики не зависит от  $D$ -гессиана  $H$ , при помощи которого мы его определили, а зависит только от евклидовой геометрии плоскости, содержащей каустикой  $\{(A, B)\}$ . Явная формула для точек этого  $F_0$ -фронта, ввиду указанного выше значения  $\lambda_*$ , есть

$$P(\varphi) = -Ke^{i(m+n)\varphi} - Le^{-i(m-n)\varphi} + ((M-1)c_m - F_0)e^{in\varphi},$$

где  $M=K+L=m^2/n^2$ . Например, для гипоциклоиды с тремя остриями, где  $m=3, n=1$ , коэффициент  $M-1$  равен 8. Направление фронта в точке  $P(\varphi)$  ортогонально направляющему вектору касательной к каустике  $e^{in\varphi}$ .

Из написанной формулы для  $P(\varphi)$  следует, путем прямых вычислений, что фронт гипоциклоиды, соответствующий  $F_0 = 0$ , сам является такой же гипоциклоидой с  $p$  остриями, как и каустика, уменьшенной в  $t/p = p/(p-2)$  раз (вдвое при  $p = 4$ , втрое при  $p = 3$ ) и повернутой на угол  $\pi/p$ .

Предположим, что  $m$  и  $n$  нечетны (как, например, для гипоциклоиды с 3 остриями). Тогда фронты, соответствующие  $F_0$  и  $-F_0$ , различаются только параметризацией:  $P_{F_0}(\varphi + \pi) \equiv P_{-F_0}(\varphi)$ ; причем две точки фронта, лежащие на одной и той же (ортогональной к фронту в этих точках) касательной к каустике, соответствуют противоположным (отличающимся на  $\pi$ ) точкам  $\varphi$  и расположены

на касательной симметрично относительно точки, принадлежащей фронту-гипоциклоиде, где  $F_0 = 0$ .

Длины и кривизны каустик и фронтов легко вычисляются (см. разделы 11, 12).

Вернемся к фронтам обычной астроиды ( $p = 4$ ). Топологический тип 0-фронта астроиды меняется при изменении параметра  $F_0$ , когда параметр проходит через особые значения  $F_0 = \pm 1$  и  $\pm 3$ . Если зафиксировать значение этого параметра, положив, например,  $F_0 = 0$ , то те же самые изменения будут происходить с  $C$ -фронтом при изменении критического значения  $C$  (рис. 21).

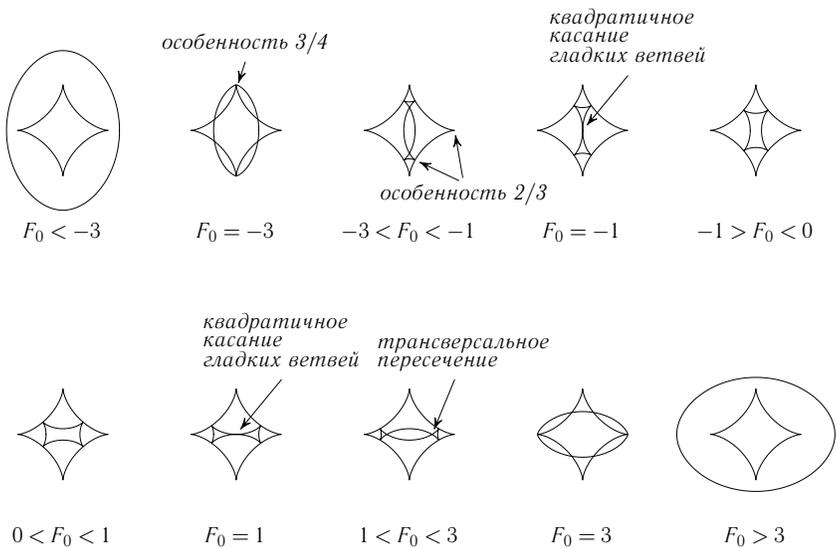


Рис. 21. Перестройки фронтов астроиды

А именно, для  $F_0 = 0$  при  $C = \pm 1$  на фронте имеется самокасание (в начале координат), а при  $C = \pm 3$  фронт проходит через две противоположные из четырех точек возврата каустики и имеет в этих точках особенность типа  $3/4$ , (диффеоморфную особенности кривой  $x^3 = y^4$ ).

При  $|C| > 3$  фронт гладкий, а при  $|C| < 3$  он имеет 4 точки возврата полукубического типа, лежащие на каустике. Фронты, для которых  $1 < |C| < 3$ , имеют по две точки самопересечения, и каждый из них ограничивает на плоскости  $\{(A, B)\}$  три области с компактным замыканием: два криволинейных треугольника, на границах каждого из которых лежат

по две точки возврата фронта и по одной точке его самопересечения, и линзообразную область между точками самопересечения, лежащими на одной из осей координат ( $A$  или  $B$  — в зависимости от знака  $C$ ).

Иными словами,  $C$ -фронты перестраиваются при изменении параметра  $C$  так же, как перестраиваются эквидистанты эллипса при изменении расстояния от него. Каустика эллипса аффинно эквивалентна астроиде, но никогда не изометрична ей в смысле евклидовой геометрии.

Каждая точка фронта определяет параболу, касающуюся его в этой точке (с вершиной в этой точке и с радиусом кривизны, составляющим  $2/3$  радиуса кривизны фронта в этой точке). Это — парабола  $H = 0$  теоремы 1 (ср. рис. 19).

**Определение.** Эллиптическая область  $E_{F_0, \varphi_0}$  на плоскости  $\{(A, B)\}$  определяется как замкнутая область, ограниченная такой параболой (рис. 22):

$$E_{F_0, \varphi_0} = \{(A, B) \in \mathbb{R}^2 : H_{A, B; F_0}(\varphi_0) \geq 0\}.$$

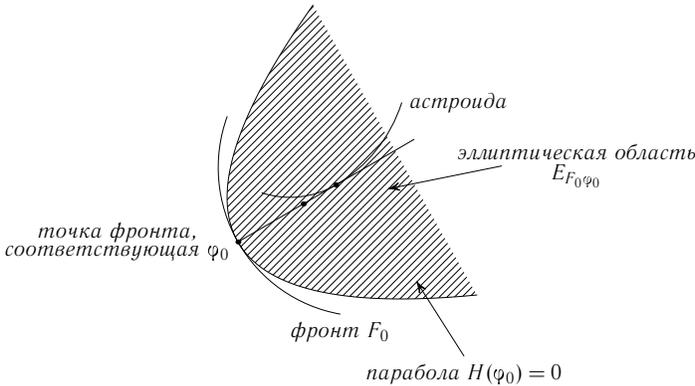


Рис. 22. Эллиптическая область

Объединение всех таких «внутренностей парабол» с различными  $\varphi_0$  образует  $F_0$ -эллиптическую область:

$$E_{F_0} = \{(A, B) \in \mathbb{R}^2 : \exists \varphi_0 \in S^1 : H_{A, B; F_0}(\varphi_0) \geq 0\}.$$

Дополнительные гиперболические области определяются как пересечения дополнений к эллиптическим областям

$$\Omega_{F_0} = \bigcap_{\varphi_0 \in S^1} (\mathbb{R}^2 - E_{F_0, \varphi_0}) = \mathbb{R}^2 - E_{F_0}.$$

**Пример.** При любом  $F_0$  с  $|F_0| \geq 3$   $F_0$ -гиперболическая область  $\Omega_{F_0}$  пуста, так как уже полукасательные к астроиде, являющиеся осями наших эллиптических парабол, покрывают всю плоскость. Точку  $(A, B)$  покрывает ось параболы, вершина которой — самая далекая от  $(A, B)$  точка фронта.

**Теорема 2.** Для каждого  $F_0$  с  $|F_0| < 1$  гиперболическая область  $\Omega_{F_0}$  ограничена соответствующим несамопересекающимся 0-фронтом, имеющим на астроиде-каустике 4 точки возврата (рис. 23).

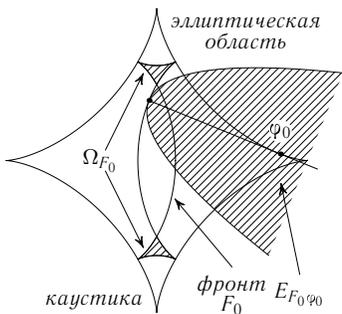


Рис. 23.

Треугольники гиперболичности

Для каждого  $F_0$  с  $1 \leq |F_0| < 3$  область  $F_0$ -гиперболичности  $\Omega_{F_0}$  состоит из внутренностей двух криволинейных треугольников, ограниченных самопересекающимся дважды 0-фронтом, имеющим на астроиде-каустике 4 точки возврата.

**Следствие 1.** Полная область гиперболичности

$$\Omega = \{(A, B; F_0) : H_{A, B; F_0}(\varphi) < 0 \forall \varphi\}$$

в трехмерном пространстве связна (как, следовательно, и пятимерное многообразие всех 4-гиперболических многочленов степени 4).

**Следствие 2.** Индексы всех 4-гиперболических многочленов степени 4 одинаковы (не зависят от коэффициентов многочлена) и равны

$$\begin{aligned} \text{ind}(M + iN) &= -4, & \text{ind}(a - c + 2ib) &= -2, \\ \text{ind}(\gamma) &= -2, & \text{ind}(\text{крест } \gamma) &= -1. \end{aligned}$$

**Следствие 3.** Для каждой точки  $(A, B)$  внутри «бубнового туза»  $\Delta$ , ограниченного астроидой-каустикой, существует число  $F_0$ , определяющее 4-гиперболический тригонометрический многочлен

$$F = F_0 + A \cos(2\varphi) + B \sin(2\varphi) + \cos(4\varphi),$$

так что

$$\bigcup_{-3 < F_0 < 3} \Omega_{F_0} = \Delta.$$

**Следствие 4.** Для каждой точки  $(A, B)$  вне «бубнового туза», ограниченного астроидой-каустикой и для каждого значения  $F_0$  существует такая точка  $\varphi_0$  на окружности, что точка  $(A, B)$

не гиперболическая в  $\varphi_0$ :

$$H_{A,B,F_0}(\varphi_0) \geq 0,$$

так что тригонометрический многочлен

$$F = F_0 + A \cos(2\varphi) + B \sin(2\varphi) + \cos(4\varphi)$$

не является 4-гиперболическим.

**Следствие 5.** *Существуют «парадоксальные» однородные многочлены четвертой степени, для которых выполнено условие почти 4-гиперболическости ( $H \leq 0$  везде), но в окрестности которых нет настоящих 4-гиперболических многочленов.*

**Пример.** Многочлен  $f(x, y) = x^4 - y^4$ . Для него  $\text{ind}(\gamma) = 0$ , а для любого 4-гиперболического многочлена  $\text{ind}(\gamma) = -2$ .

Доказательства приведенных результатов длинные, и некоторые из сообщаемых ниже лемм доказаны лишь с помощью компьютерной алгебры (я благодарен Ф. Аикарди за эти вычисления, проверить которые я не сумел).

Начнем с относительно простого (но уже совершенно не очевидного) случая, когда удается провести безкомпьютерное доказательство.

**Определение.** *Диагоналями* назовем прямые  $A = B$  и  $A = -B$  (нам будут нужны лишь их части вне пределов астроида,  $|A| = |B| \geq \sqrt{2}$ ).

**Лемма 1.** *Диагонали являются огибающими парабол, ограничивающих эллиптические области, соответствующие всевозможным  $\varphi_0$ , при  $F_0 = 0$ : парабол*

$$P_{\varphi_0} = \{(A, B) \in \mathbb{R}^2 : H_{A,B,0}(\varphi_0) = 0\}.$$

**Замечание.** Сам 0-фронт тоже является, конечно, огибающей этих парабол.

Доказательство леммы. При  $F = Ac_2 + Bs_2 + c_4$  ( $c_2 = \cos(2\varphi)$  и т. д.) мы получаем

$$\begin{aligned} F' &= -2As_2 + 2Bc_2 - 4s_4 \quad (' = d/d\varphi), \\ F'' &= -4Ac_2 - 4Bs_2 - 16c_4, \quad 4F + F'' = -12c_4, \end{aligned}$$

поэтому нормированный гессиан имеет вид

$$\begin{aligned} H_{A,B,0} &= 4(Ac_2 + Bs_2 + c_4)(-12c_4) - 12(As_2 - Bc_2 + 2s_4)^2 = \\ &= -12[4 + 4Ac_2 - 4Bs_2 + A^2s_2^2 + B^2c_2^2 - 2ABs_2c_2]. \end{aligned}$$

Чтобы найти точку параболы  $H_{A,B,0}(\varphi_0) = 0$ , лежащую на диагонали  $A = B$ , мы должны решить квадратное относительно  $A = B$  уравнение

$H = 0$ . Это уравнение имеет вид

$$A^2(1 - s_4) + 4A(c_2 - s_2) + 4 = 0.$$

Дискриминантом его оказывается функция от  $\varphi_0$ ,

$$4(c_2 - s_2)^2 - 4(1 - s_4),$$

которая тождественно равна нулю. Поэтому *любая из парабол  $P_{\varphi_0}$  касается диагонали  $A = B$*  (для диагонали  $A = -B$  выкладки аналогичны), что доказывает лемму 1.  $\square$

**Определение.** *X-точками (0-фронта, соответствующего значению  $F_0$  ( $|F_0| < 3$ ), параметра и, следовательно, имеющего 4 точки возврата  $Y_r$ , лежащие на астроида-каустике) называются 4 точки  $X_j$  пересечения касательных к каустике, проведенных в упомянутых четырех точках  $Y_r$  возврата фронта (рис. 24).*

**Лемма 2.** *Каждая из точек  $X_j$  лежит внутри всякой эллиптической области, ограниченной параболой, соответствующей вершине, лежащей на фронте в прилежащей к точке  $X_j$  дуге между точками возврата:*

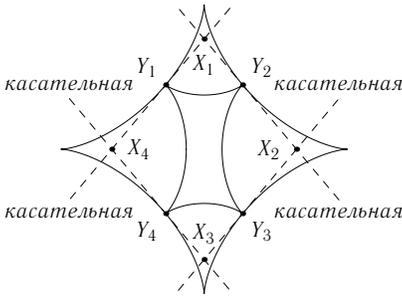


Рис. 24. 4 X-точки астроида

$$H_{X_j; F_0}(\varphi_0) \geq 0.$$

**Доказательство.** Хотя это доказано для любого  $F_0$ , ограничимся, для сокращения вычислений, случаем  $F_0 = 0$  и  $X_j = (0, 2\sqrt{2})$ , так что  $\pi/4 < 2\varphi_0 < 3\pi/4$ ,  $s_2 > \sqrt{2}/2$ .

В этих предположениях прямые вычисления показывают, что нормированный гессиан в интересующей нас X-точке есть

$$H = 48(8s_2 - 2c_2^2 - 1).$$

Заметим, что

$$8s_2 - 2c_2^2 - 1 = 2s_2^2 + 8s_2 - 3 > 2(\sqrt{2}/2)^2 + 8(\sqrt{2}/2) - 3 = 4\sqrt{2} - 2 > 0,$$

так что наша точка  $X_j$  лежит в эллиптической области.

При других значениях  $F_0$  проведенное ниже доказательство по той же схеме приводит к более длинным вычислениям, но по существу так же просто.

Мы будем изучать поведение гессиана  $H$  на оси  $B$ , в той точке  $X_1$  пересечения касательных к каустике в точках возврата фронта, которая

имеет координаты  $(A = 0, B = B_1 > 0)$ . Соответствующая точке  $X_1$  функция нашего стандартного семейства есть  $F = F_0 + B \sin(2\varphi) + \cos(4\varphi)$ , и мы предполагаем, что  $|F_0| < 3$ .

Нормированный гессиан имеет вид (при  $D = 4$ ), по (\*) раздел 3,

$$H = 4F(4F + F'') - 3F'^2.$$

Мы докажем, что функция  $H$  положительна на сегменте окружности  $\{\varphi \bmod 2\pi\}$ , прилегающем к точке  $X_1$  (т. е. состоящем из тех  $\varphi$ , которые соответствуют точкам астроида-каустики, расположенным между теми двумя точками возврата фронта, в которых  $B > 0$ ).

(Для исследования других частей окружности нужно использовать другие точки  $X_j$ .)

Для доказательства положительности значения  $H$  обозначим  $\Phi = 2\varphi$ . Пусть  $\varphi_*$  и  $\Phi_* = 2\varphi_*$  — координаты ближайшей точки возврата  $F_0$ -фронта ( $A_* = -4 \cos^3(\Phi_*)$ ,  $B_* = 4 \sin^3(\Phi_*)$ ). Мы исследуем точку дуги каустики между  $(A_*, B_*)$  и  $(-A_*, B_*)$ , соответствующую координатам  $\varphi$  и  $\Phi = 2\varphi$ . Вычислим координаты  $(0, B_1)$  точки  $X_1$  в терминах угла  $\Phi_*$  и вычислим функцию — нормированный гессиан  $H$ , соответствующую значениям параметров  $A = 0, B = B_1, F_0$  нашего семейства  $F$ .

Уравнение точки возврата фронта (при значении параметра  $F_0$ ) имеет, по общей нашей теории, вид  $3c_4^* = F_0$  (где  $c_4^* = \cos(4\varphi_*)$ ), так что точка возврата — это точка  $(A = -4c_2^{*3}, B = 4s_2^{*3})$ .

Направление касательной к каустике в точке возврата фронта содержит вектор  $(\dot{A}_* = c_2^*, \dot{B}_* = s_2^*)$ , поэтому вдоль касательной к каустике лежат точки

$$(A(\lambda) = -4c_2^{*3} + \lambda c_2^*, \quad B(\lambda) = 4s_2^{*3} + \lambda s_2^*).$$

Чтобы попасть на ось  $A = 0$ , приходится выбрать  $\lambda = 4c_2^{*2}$ . Таким образом, мы вычислили ординату точки  $X_1$ ,  $B_1 = 4s_2^{*3} + 4s_2^*c_2^{*2} = 4s_2^{*4}$ .

**Замечание.** В случае  $F_0 = 0$  мы получаем  $\Phi_* = \pi/4$ ,  $s_2^* = \sqrt{2}/2$ , поэтому  $B_1 = 2\sqrt{2}$ , как и должно быть для диагонали квадрата со стороной 2 (с вершинами в 0, в  $X_1$  и в двух срединных точках отрезков каустики-астроиды).

Подставляя  $(A = 0, B = \text{любое значение } B_1)$  в определяющее нормированный гессиан уравнение, мы находим его значение

$$\begin{aligned} H &= 4F(4F + F'') - 3F'^2 = \\ &= 16(F_0 + B_1s_2 + c_4)(F_0 - 3c_4) - 12(B_1c_2 - 2s_4)^2 = \alpha + \beta B_1 + \gamma B_1^2, \end{aligned}$$

где коэффициенты равны

$$\begin{aligned}\alpha &= 16(F_0 - 3c_4)(F_0 + c_4) - 48s_4^2 = 16F_0^2 - 32F_0c_4 - 48, \\ \beta &= 16(F_0 - 3c_4)s_2 + 48s_4c_2 = 16F_0s_2 + 48s_2, \\ \gamma &= -12c_2^2.\end{aligned}$$

Применим эти формулы в случае точки  $X_1 = (0, B_1)$ , где  $B_1 = 4s_2^*$ ,  $F_0 = 3c_4^* = 6c_2^{*2} - 3$ . Мы получим тогда выражения наших коэффициентов через  $B_1$ :

$$\begin{aligned}s_2^* &= \frac{B_1}{4}, \quad c_2^* = \frac{16 - B_1^2}{16}, \quad F_0 = 3 - \frac{3B_1^2}{8}, \\ \alpha &= -36B_1^2 + \frac{9B_1^4}{4} + 12B_1^2c_4 + 96(1 - c_4), \\ \beta &= (96 - 6B_1^2)s_2, \\ \gamma &= -12c_2^2.\end{aligned}$$

Поэтому выражение для нормированного гессiana  $H$  в точке  $X_1$  принимает вид

$$H = 96B_1s_2 - (36 + 12s_2^2)B_1^2 - 6s_2B_1^3 + \frac{9B_1^4}{4} + 96(1 - c_4).$$

Мы подставим сюда уже найденное значение  $B_1 = 4s_2^*$  и используем (имеющие в этом доказательстве решающее значение) сокращенные обозначения

$$x = s_2^*, \quad y = s_2, \quad y - x = z.$$

Тогда указанное выше выражение для нормированного гессiana в точке  $X_1$  примет вид

$$\begin{aligned}H &= 192(2xy - x^2y^2 - 3x^2 - 2x^3y + 3x^4 + y^2) = \\ &= 192(z^2 - x^2z^2 + 4xz - 4x^3z) = 192z(1 - x^2)(4x + z).\end{aligned}$$

Теперь уже нетрудно вычислить знак гессiana  $H$ . В нашем случае  $x^2 < 1$ , так как  $x = \sin(2\varphi_*)$ , что *строго* меньше 1 по модулю (так как  $|F_0| < 3$  и потому рассматриваемый фронт не проходит через особые точки астроида-каустики, где  $A = 0$ ,  $|F_0| = 3$ ).

Мы рассматриваем случай  $z > 0$ , так как  $y > x$  для точек примыкающей к точке  $X_1$  части каустики (где  $B > B_1 > 0$ ,  $\Phi > \Phi_*$ ,  $0 < \Phi < \pi/2$ ,  $0 < \Phi_* < \pi/2$ ). Итак,  $z > 0$ ,  $1 > x^2$ ,  $4x + z > 4x > 0$ , так что  $H > 0$ , что и доказывает лемму 2.  $\square$

**Замечание.** Изменение знака  $H$  между  $z = 0$  и  $z = -4x$  (т. е. между  $y = x$  и  $y = -3x$ ) остается столь же непонятным, как и положительность  $H$  при  $y < -3x < 0$ .

Доказав лемму 2, мы можем закончить построение областей гиперболичности и эллиптичности (для  $F_0 = 0$  наше доказательство будет полным, так как лемма 2 доказана, а при других значениях  $F_0$ , меньших 3 по модулю, мы используем аналогичную лемме 1 информацию об огибающих парабол, полученную лишь при помощи компьютерной алгебры).

Область, ограниченная параболой, выпукла. Она содержит, вместе с точкой  $X_i$ , принадлежащей ей по лемме 2, и со своей точкой на огибающей парабол, принадлежащей ей по лемме 1 (или по ее аналогу для  $F_0 \neq 0$ ), весь отрезок прямой, соединяющий эти две точки. Такие отрезки, вместе с эллиптическими половинами прямых, касающихся каустической астроиды, покрывают все дополнение к ограниченному астроидой-фронтом бубновому тузу, который таким образом и оказывается соответствующей значению параметра  $F_0 = 0$  областью гиперболичности (рис. 25).

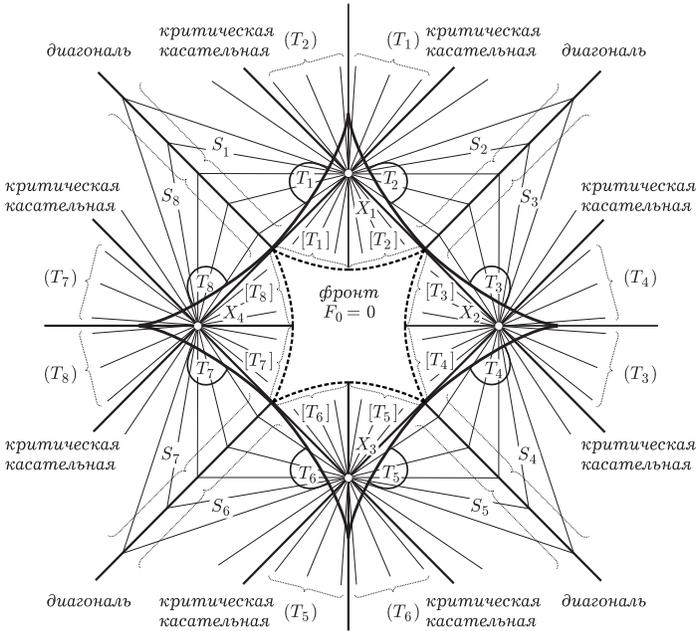


Рис. 25. Заметание эллиптической области отрезками

При  $|F_0| \geq 3$  рассуждение еще проще: гиперболических точек нет, так как самая далекая от точки  $(A, B)$  точка фронта является

вершиной параболы, содержащей точку  $(A, B)$  в ограниченной его области эллиптичности. При  $|F_0| = 3$  и фронт, и все его параболы проходят через две противоположные точки возврата астроида.

В случае  $|F_0| < 3$  доказательство сложнее, но проходит по той же схеме, что проведенное выше при  $F_0 = 0$ . Труднее всего доказывается аналог леммы 1: огибающие парабол при  $F_0 \neq 0$  уже не прямые, но они еще соединяют точки возврата фронта с бесконечностью, куда они уходят по направлениям касательных к каустике в точках возврата фронта (согласно Ф. Аикарди). Отрезки, соединяющие точки огибающих с прилежащими вершинами  $X_i$ , заматают, вместе с эллиптическими частями касательных к каустике, дополнение к ограниченной 0-фронтom четырехугольной области при  $|F_0| < 1$  или к двум треугольным областям при  $1 \leq |F_0| < 3$ . Для этих огибающих семейства парабол  $H = 0$  можно написать явные алгебраические уравнения ( $H = 0, H' = 0$ ), из которых можно затем найти, скажем,  $B$  как функцию от  $\varphi$  и от  $A$ . Элементарное исследование этих функций и их асимптотик приводит к сформулированному выше ответу о виде гиперболических областей, но подробное доказательство не уместится в рамки настоящей работы. Ф. Аикарди доказала, что точки касания с огибающими парабол, касающихся фронтов на осях координат, заматают 4 отрезка прямых соединяющие точки возврата астроида-каустики.

**Замечание 1.** Можно предполагать, что число компонент связности пространства  $D$ -гиперболических многочленов степени  $D$  растет с ростом  $D$  (именно как линейная функция от  $D$ ), но это не доказано.

Число компонент связности пространства гладких  $D$ -гиперболических функции бесконечно, как мы показали выше, предъявив функции с бесконечным количеством разных значений индексов (ограниченных для многочленов фиксированной степени).

**Замечание 2.** Вся описанная выше теория напрашивается на обобщения. Вместо приведенного ниже специального семейства (3) тригонометрических многочленов и области их гиперболичности для

$$F = F_0 + A \cos(2\varphi) + B \sin(2\varphi) + \cos(4\varphi) \quad (3)$$

можно было бы рассматривать семейства общего положения периодических функций  $F$ , зависящих еще от  $k$  параметров, и области  $D$ -гиперболичности в пространствах их параметров. Будут ли особенности границы области гиперболичности в случае двух и трех параметров такими же, как для семейства (3) и его подсемейств с постоянным свободным членом? Во что превратятся «топологические» свойства каустик и фронтов

при замене специальных (похожих на (3)) комбинаций с участием синуса,  $y$ , и косинуса,  $x$ , (получающихся при проектировании окружности  $x^2 + y^2 = 1$ ) на другие специальные семейства (связанные, например, с отличными от окружности алгебраическими кривыми  $Z(x, y) = 0$  и с заменяющими синус и косинус функциями  $x$  и  $y$  на них)?

В нашем простейшем случае (тригонометрических многочленов  $g$  на окружности) как каустики, так и фронты оказываются *алгебраическими кривыми, которые даже рациональны, или, иными словами, уникурсальны (имеют сферическую риманову поверхность и род 0)* вследствие рациональности окружности.

Эвольвенты окружности, в отличие от эвольвент астроида, — трансцендентные кривые. Но окружность и не может быть каустикой: у нее нет точек возврата. Было бы интересно посмотреть, во что превратится рациональность каустики и фронтов (а также теорема Штурма—Гурвица) при замене исходной окружности, функциями на которой являются  $(\sin \varphi, \cos \varphi)$  и вообще тригонометрические многочлены от  $\varphi$ , на другую алгебраическую кривую (хотя бы эллиптическую).

**Замечание 3.** Евклидова теория каустик допускает следующее обобщение.

Рассмотрим кривую  $\Gamma$ , заданную уравнением  $f(x, y) = 0$ . Эта кривая  $\Gamma$  будет играть роль, которую в евклидовой теории играла окружность. Пусть  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — функция на плоскости. Рассмотрим семейство функций

$$G_{A,B} = g + Ax + By: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

(в обозначениях не указано подразумеваемое ограничение функций на  $\Gamma$ : например,  $g$  и  $g|_{\Gamma}$  обозначаются одинаковым символом  $g$ ). Каустика — это кривая на плоскости параметров, такая что для  $(A, B)$  на этой кривой функция  $G_{A,B}$  имеет на  $\Gamma$  вырожденную критическую точку.

Будем обозначать знаком  $\nabla$  гамильтоново поле с функцией Гамильтона  $f$ , так что  $\nabla = f_y \partial_x - f_x \partial_y$ . Это поле касается кривой  $\Gamma$ . Оператор  $\nabla$  будет применяться к заданным на  $\Gamma$  функциям и играть роль производной  $d/d\varphi$  предыдущей теории (соответствующей окружности  $\Gamma$ , где  $f = (x^2 + y^2 - 1)/2$ ;  $x$  играет роль  $\cos \varphi$ ,  $y$  — роль  $\sin \varphi$ ).

Легко вычисляются последовательные производные

$$\nabla x = f_y, \quad \nabla y = -f_x, \quad \nabla g = f_y g_x - f_x g_y, \quad (4)$$

$$\nabla^2 x = f_y f_{x,y} - f_x f_{y,y}, \quad \nabla^2 y = -f_y f_{x,x} + f_x f_{x,y}. \quad (5)$$

Из уравнений каустики

$$A(\nabla x) + B(\nabla y) + \nabla g = 0, \quad A(\nabla^2 x) + B(\nabla^2 y) + \nabla^2 g = 0,$$

находим явные формулы координат ее точек:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\nabla^2 g)(\nabla y) - (\nabla g)(\nabla^2 y)}{(\nabla^2 y)(\nabla x) - (\nabla y)(\nabla^2 x)}, \\ B &= \frac{(\nabla^2 g)(\nabla x) - (\nabla g)(\nabla^2 x)}{(\nabla^2 x)(\nabla y) - (\nabla x)(\nabla^2 y)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если кривая  $\Gamma$  алгебраическая, а  $g$  — многочлен, то каустика — алгебраическая кривая такого же рода, как  $\Gamma$ .

Вычисляя производные дробей (6), мы получаем вдоль  $\Gamma$  (с помощью уравнений (4) и (5)) формулы, определяющие направление каустики:

$$\nabla A = \Delta \delta^{-2} f_x, \quad \nabla B = \Delta \delta^{-2} f_y, \quad (7)$$

где роль «радиуса кривизны» играют определители «Вандермонда»

$$\Delta = \begin{vmatrix} \nabla^3 g & \nabla^3 x & \nabla^3 y \\ \nabla^2 g & \nabla^2 x & \nabla^2 y \\ \nabla g & \nabla x & \nabla y \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} \nabla^2 x & \nabla^2 y \\ \nabla x & \nabla y \end{vmatrix}.$$

В частности, *направление каустики задается вектором «нормали» к кривой  $\Gamma$   $(f_x, f_y) = (-\nabla y, \nabla x)$ , а особые точки каустики задаются уравнением  $\Delta = 0$  точек уплощения пространственной кривой с проекцией  $\Gamma$*

$$\{(x, y, g(x, y)), \quad \text{где } f(x, y) = 0\}.$$

Если плоская кривая  $\Gamma$  выпукла, то эта пространственная кривая имеет не менее четырех точек уплощения. Вероятно, можно исследовать свойства каустик на основании формулы (7) также и в случае невыпуклых, но *алгебраических* кривых  $\Gamma$  фиксированного рода и многочленов  $g$ . Однако это обобщение теоремы Штурма—Гурвица нетривиально уже для многочленов  $g$  на рациональных кривых (вроде вырожденной эллиптической кривой  $\Gamma: y^2 = x^2 + x^3$ ).

**Замечание 4.** Уравнение Гессе  $H = 0$  (и неравенство  $H < 0$ , основное для теории гиперболических многочленов) можно было бы заменить другой гиперповерхностью в пространстве 2-струй функций на окружности. Было бы интересно понять, во что превратились бы наши каустики,

их касательные прямые, фронты, параболы и их огибающие при таком обобщении, требующем также построения симплектической и контактной геометрии этих объектов, включающей, вероятно, исследование структур многообразий контактных элементов на контактных многообразиях и изучение многообразий 1-струй функций на многообразиях 1-струй функций (и других подобных итераций классических конструкций, вроде  $T^*$ ,  $J^1$ ,  $PT^*$  и т. п., с их энгелевыми и иными структурами).

**Замечание 5.** Найденные в нашей задаче огибающие специальных семейств парабол наводят на мысль о существовании подобных огибающих в более общих ситуациях. Рассмотрим, например, кривую общего положения на евклидовой плоскости в классе кривых с точкой возврата полукубического типа (диффеоморфную кривой  $y^2 = x^3$ ). Рассмотрим семейство общего положения парабол или иных, подобных параболе, кривых с вершинами в точках исходной кривой, с осями, перпендикулярными этой кривой и направленными в сторону центра кривизны кривой в вершине «параболы». Радиус кривизны «параболы» в вершине будет меняться (например, как  $2/3$  радиуса кривизны исходной кривой или как гладкая функция общего положения от этого радиуса кривизны, равная 0 в нуле). Спрашивается, при каких условиях на эту функцию такое семейство «парабол» общего положения будет иметь огибающую? Будет ли эта огибающая гладкой в точке возврата исходной кривой? И будет ли ее касательная в этой точке касаться в ней исходной кривой? Если все это так для нашего семейства парабол  $H = 0$  лишь в силу его исключительности, то какова степень (коразмерность) нужной здесь исключительности?

Согласно Д. Капитанию (Париж — VII, 2002) Огибающая подобного семейства общего положения имеет полукубическую точку возврата в точке возврата исходной прямой, причем касательные исходной прямой и огибающей в их общей точке возврата продолжают друг друга.

Понимая важность всех этих общих и специальных вопросов, я все же сообщу ниже о другом обобщении изложенной выше астроидальной геометрии — о теории *гиперкаустик* и *гиперфронтов*, являющихся кривыми уже не в двумерной евклидовой плоскости, а в (евклидовом) пространстве четного числа измерений.

## ГИПЕРКАУСТИКИ И ГИПЕРФРОНТЫ

### 11. Гиперкаустики периодических функций

Пусть  $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция на окружности  $\{\varphi \bmod 2\pi\}$ . Зафиксируем целое число  $n \geq 1$ .

**Определение.** *Гиперкаустика порядка  $n$  функции  $g$*  — это кривая в пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ , определенная условием сильного вырождения критической точки линейной комбинации функции  $g$  с синусами и косинусами:

$$\{(A_1, B_1; \dots; A_n, B_n): \exists \varphi \in S^1: G^i(A, B; \varphi) = 0\}$$

для производных по  $\varphi$  порядков  $i = 1, \dots, 2n$  (производных столько, чтобы получилась кривая) от функции

$$G(A, B; \varphi) = \sum_{k=1}^n (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) + g(\varphi).$$

Проекция этой кривой на плоскость  $\mathbb{R}_k^2$  с координатами  $(A_k, B_k)$  будет называться  $k$ -проекцией (*гиперкаустики порядка  $n$* ),  $k = 1, \dots, n$ .

Мы получаем кривую в  $\mathbb{R}^{2n}$  (параметризованную критической точкой  $\varphi$ ) и еще  $n$  плоских кривых — ее проекций (также параметризованных углом  $\varphi$ ).

**Теорема 1.** *Компоненты касательного вектора гиперкаустики порядка  $n$  пропорциональны  $n$  векторам*

$$(c_1, s_1; \dots; c_n, s_n) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi); \dots; \cos(n\varphi), \sin(n\varphi)),$$

а именно, производные координат по  $\varphi$  даются формулами

$$A_k \dot{\phantom{A}} = \rho_k c_k, \quad B_k \dot{\phantom{B}} = \rho_k s_k,$$

где функция  $\rho_k$  (равная радиусу кривизны  $k$ -проекции при соответствующем, и обсуждаемом ниже, выборе единицы длины) задается формулой

$$\rho_k = \frac{dL^n g}{k^2 \lambda_k^n}.$$

Здесь  $d = d/d\varphi$ , а дифференциальный оператор  $L^n$  порядка  $2n$  убивает функции  $c_k$  и  $s_k$ :

$$L^n = (1 + d^2)(4 + d^2) \dots (n^2 + d^2);$$

числа  $\lambda$  определяются формулой

$$\lambda_k^n = \prod_{\substack{l \neq k \\ 1 \leq l \leq n}} (l^2 - k^2).$$

Таким образом, от  $k$  в формуле для  $\rho_k$  зависит только постоянный (не зависящий от  $\varphi$ ) множитель, стоящий в знаменателе формулы.

**Пример.** При  $n = 1, 2, 3, 4$  знаменатели  $k^2 \lambda_k^n$  имеют значения, указанные в приведенной таблице (знак всегда равен  $(-1)^{k-1}$ ).

$k \backslash n$	1	2	3	4
1	1	3	24	360
2		-12	-60	-720
3			360	2520
4				-20160

Первые несколько операторов  $L^n$  суть

$$L^1 = 1 + d^2, \quad L^2 = 4 + 5d^2 + d^4, \\ L^3 = 36 + 49d^2 + 14d^4 + d^6.$$

**Замечание.** Определим еще многочлены степени  $n - 1$ :

$$L_k^n(z) = \prod_{\substack{l \neq k \\ 1 \leq l \leq n}} (l^2 + z),$$

и дифференциальные операторы порядка  $2n - 2$

$$L_k^n = L_k^n(d^2).$$

Введенные выше постоянные  $\lambda_k^n = L_k^n(-k^2)$  — это собственные числа этих операторов.

**Лемма.** *Имеют место соотношения*

$$L_k^n(d^2)c_k = \lambda_k^n c_k, \quad L_k^n(d^2)s_k = \lambda_k^n s_k, \\ L_k^n(d^2)c_{l \neq k} = 0, \quad L_k^n(d^2)s_{l \neq k} = 0 \quad (1 \leq l \leq n).$$

**Доказательство.** Очевидно, оператор  $d^2$  переводит синусы и косинусы в синусы и косинусы:

$$d^2 c_k = -k^2 c_k, \quad d^2 s_k = -k^2 s_k.$$

Поэтому для любого многочлена  $P$  имеем

$$P(d^2)c_k = P(-k^2)c_k, \quad P(d^2)s_k = P(-k^2)s_k.$$

Применяя это к многочлену  $P = L_k^n$ , получаем соотношения леммы.  $\square$

Для доказательства теоремы 1 мы сначала получим явную формулу для каустики.

**Теорема 2.** *Выражения  $A_k$  и  $B_k$  через функцию  $g$  имеют вид*

$$A_k = \Pi_k c_k - I_k s_k, \quad B_k = \Pi_k s_k + I_k c_k,$$

где функции  $I_k(\varphi)$  и  $\Pi_k(\varphi)$  определены формулами

$$I_k = -\frac{d(L_k^n g)}{k\lambda_k^n}, \quad \Pi_k = \frac{d^2(L_k^n g)}{k^2\lambda_k^n}.$$

**Доказательство.** По определению каустики,

$$\sum_{k=1}^n (A_k d^r c_k + B_k d^r s_k) = -d^r g, \quad r = 1, \dots, 2n.$$

Считая коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  не зависящими от  $\varphi$  постоянными, мы получим, применяя два оператора,  $d(L_k^n(d^2))$  и  $d^2(L_k^n(d^2))$ , к функциям  $c_l$ ,  $s_l$  и  $g$ , следующие два уравнения относительно  $A_k$  и  $B_k$ :

$$\begin{cases} A_k[(dL_k^n)c_k] + B_k[(dL_k^n)s_k] = -(dL_k^n)g, \\ A_k[(d^2L_k^n)c_k] + B_k[(d^2L_k^n)s_k] = -(d^2L_k^n)g. \end{cases}$$

(Мы воспользовались тем, что при  $l \neq k$   $(L_k^n(d^2))c_l = 0$ ,  $(L_k^n(d^2))s_l = 0$ .)

Используя собственные числа собственных функций  $c_k$  и  $s_k$ , мы можем переписать выведенные уравнения в виде

$$\begin{cases} -(k\lambda_k^n)A_k s_k + (k\lambda_k^n)B_k c_k = -(dL_k^n)g, \\ -(k^2\lambda_k^n)A_k s_k - (k^2\lambda_k^n)B_k s_k = -(d^2L_k^n)g. \end{cases}$$

Таким образом, мы получаем два уравнения, имеющие в матричной записи вид

$$\begin{pmatrix} c_k & -s_k \\ s_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_k \\ A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ \Pi_k \end{pmatrix}.$$

Обращая ортогональную матрицу путем транспонирования, мы находим решение наших уравнений в виде

$$\begin{pmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k \\ \Pi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_k \\ A_k \end{pmatrix},$$

что и доказывает теорему 2. □

Доказательство теоремы 1. Теперь мы будем считать  $A_k$  и  $B_k$  функциями от  $\varphi$ , определенными формулами теоремы 2. Дифференцируя по  $\varphi$  эти выражения, мы получаем

$$\begin{cases} A'_k = (\Pi'_k - kI_k)c_k + (-k\Pi_k - I'_k)s_k, \\ B'_k = (k\Pi_k + I'_k)c_k + (\Pi'_k - kI_k)s_k. \end{cases}$$

Но, по определению функций  $I_k$  и  $\Pi_k$ , имеют место тождества

$$\begin{cases} I'_k + k\Pi_k = \left(-\frac{d^2}{k} + \frac{kd^2}{k^2}\right) \frac{L_k^n g}{\lambda_k^n} = 0, \\ \Pi'_k - kI_k = \left(\frac{d^3}{k^2} + \frac{kd}{k}\right) \frac{L_k^n g}{\lambda_k^n} = \frac{d(d^2 + k^2)}{k^2 \lambda_k^n} (L_k^n g). \end{cases}$$

Учитывая определяющее оператор  $L^n$  соотношение

$$(d^2 + k^2)L_k^n = L^n,$$

мы приходим к формулам теоремы 1:

$$A'_k = (\Pi'_k - kI_k)c_k, \quad B'_k = (\Pi'_k - kI_k)s_k,$$

где

$$\rho_k = \Pi'_k - kI_k = \frac{d(L^n g)}{k^2 \lambda_k^n}. \quad \square$$

**Следствие 1.** *Функция  $\rho_k/k$  является (ориентированным) радиусом кривизны проекции  $(A_k, B_k)$  гиперкаустики на плоскости с декартовыми координатами  $(A_k, B_k)$  (с метрикой  $(dA_k)^2 + (dB_k)^2$ ).*

Доказательство. Пусть  $S_k$  — длина вдоль проекции,  $k\varphi$  — это направление спроектированной кривой (по теореме 1). При движении вдоль спроектированной кривой с единичной скоростью имеем

$$\left(\frac{dA_k}{dS_k} = c_k, \quad \frac{dB_k}{dS_k} = s_k\right),$$

тогда как по теореме 1

$$\left(\frac{dA_k}{d\varphi} = \rho_k c_k, \quad \frac{dB_k}{d\varphi} = \rho_k s_k\right).$$

Следовательно,  $\frac{d\varphi}{dS_k} = \frac{1}{\rho_k}$ , а значит,

$$\frac{d(k\varphi)}{dS_k} = \frac{k}{\rho_k},$$

То есть радиус евклидовой кривизны спроектированной кривой в нашей метрике равен  $\rho_k/k$ .  $\square$

**Следствие 2.** А) Гиперкаустика в  $\mathbb{R}^{2n}$  (а значит, и каждая из ее  $n$  плоских проекций  $\{(A_k, B_k)\}$ ) имеет не менее  $2n+2$  точек возврата (полукубического типа для  $g$  общего положения).

В) Альтернированная длина гиперкаустики (и каждой из ее проекций) равна нулю (считая длины отрезков кривой между точками возврата с меняющимися при прохождении каждой точки возврата знаками).

С) Барцентры точек возврата с четными и с нечетными номерами вдоль каустики совпадают.

Д) Интеграл от проекции на любую прямую от векторного распределения вдоль кривой, построенного по распределению массы с плотностью  $\pm 1$  вдоль гиперкаустики, меняющего знак плотности в каждой точке возврата, равен нулю.

Доказательство. А) Достаточно применить теорему Штурма—Гурвица к функции  $\rho_k$ , нули которой находятся в точках возврата, и которая ортогональна функциям  $(1, c_m, s_m)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , как и всякая функция из образа оператора  $dL^n$ , что показывает ее ряд Фурье. По теореме Штурма—Гурвица такая функция имеет не менее  $2n+2$  нулей.

В) Для альтернированной длины проекции мы имеем выражение

$$\int dS_k = \int \frac{dS_k}{d\varphi} d\varphi = \int \frac{1}{d\varphi/dS_k} d\varphi = \int \rho_k d\varphi,$$

поэтому  $\oint dS_k = \oint \rho_k d\varphi = 0$ , как и для всякой функции из образа оператора  $dL^n$ , которая ортогональна на  $S^1$  функциям  $(1, c_k, s_k)$  при  $k = 1, \dots, n$  (это показывает ряд Фурье).

Из этого следует, что и альтернированная длина самой гиперкаустики тоже равна нулю. Дело в том, что, по формуле теоремы 1, отношения  $\rho_k/\rho_l$  постоянны (не зависят от  $\varphi$ ), а потому элементы длины проекций также пропорциональны друг другу с не зависящими от  $\varphi$  коэффициентами.

Д) Для интегралов от проекций нашей плотности можно написать выражения вида

$$\oint c_k dS = \oint \cos(k\varphi) \rho_k(\varphi) dS.$$

Этот интеграл равен нулю ввиду ортогональности функции  $\rho_k$  функциям  $c_k$  и  $s_k$ .

С) Докажем это утверждение в такой форме:

**Следствие 3.** Пусть  $(P_1, \dots, P_{2m})$  — все  $2m$  точек возврата гиперкаустики, занумерованные в порядке возрастания  $\varphi$ . Тогда век-

торные суммы точек возврата с четными и с нечетными номерами совпадают:

$$P_1 + P_3 + \dots + P_{2m-1} = P_2 + P_4 + \dots + P_{2m}.$$

Из этого равенства следует такое же равенство барицентров и для проекций.

Доказательство следствия 3. По теореме 1,

$$\int_{P_j}^{P_{j+1}} dA_k = \pm \int_{P_j}^{P_{j+1}} \cos(k\varphi) \rho_k d\varphi,$$

поэтому утверждение уже доказанного следствия 2 D принимает вид

$$0 = \oint \cos(k\varphi) \rho_k(\varphi) d\varphi = \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j [A_k(P_{j+1}) - A_k(P_j)]$$

(где  $P_{2m+1} = P_1$ ). Если бы не множитель  $(-1)^j$ , то это тождество было бы очевидным. Но, учитывая знаки, мы видим, что оно выражает неочевидный факт:

$$\sum_{j=1}^m A_k(P_{2j}) = \sum_{j=1}^m A_k(P_{2j-1}),$$

и аналогично для  $B_k$  (при помощи ортогональности функции  $\rho_k$  к функции  $\sin(k\varphi)$  на окружности).  $\square$

**Следствие 4.** Длины интервалов гиперкаустики, не содержащих точки возврата, пропорциональны приращениям функции  $L^n g$  между ограничивающими интервалы точками (и то же справедливо для проекций).

Например, для проекции на плоскость  $\{A_k, B_k\}$  (с метрикой  $(dA_k)^2 + (dB_k)^2$ ) длина такого интервала, ограниченного точками с координатами  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , равна

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} dS_k = \frac{(L^n g)(\varphi_1) - (L^n g)(\varphi_0)}{(k^2 \lambda_k^n)}.$$

**Пример.** Для стандартной астроиды на плоскости  $\{(A = -4 \cos^3 \varphi, B = 4 \sin^3 \varphi)\}$  длина отрезка каустики между двумя соседними точками возврата равна 6 (т. е. на 6% больше длины отрезка прямой между этими точками, равной  $4\sqrt{2}$ ):

$$\int_0^{\pi/2} dS = -3(\cos \pi - \cos 0) = 6,$$

ибо  $g = \cos(2\varphi)$ ,  $n = k = 1$ ,  $L^n g = (1 + d^2)g = -3 \cos(2\varphi)$ ,  $k^2 \lambda_k^n = 1$ .

Доказательство следствия 4. По теореме 1,  $dS_k/d\varphi = \rho_k = (dL^n g)/(k^2 \lambda_k^n)$ . Поэтому, согласно формуле Ньютона,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} dS_k = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{dL^n g}{k^2 \lambda_k^n} d\varphi = \frac{L^n g}{k^2 \lambda_k^n} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi_1}. \quad \square$$

**Замечание 1.** Аналогичная формула получается и для длин интервалов гиперфронтон и их проекций, которые мы исследуем в разделе 12: для гиперфронта, соответствующего критическому значению  $C$ ,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} dS_k = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R_k d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{(n!)^2 C - L^n g}{k \lambda_k^n} d\varphi.$$

**Замечание 2.** Введем величины  $\tilde{I}_k$  и  $\tilde{\Pi}_k$ , нормируя слегка по-новому коэффициенты теоремы 2:

$$\tilde{I}_k = (k^3 \lambda_k^n) I_k = -k^2 (dL_k^n) g, \quad \tilde{\Pi}_k = (k^3 \lambda_k^n) \Pi_k = k (L_k^n) g.$$

Тогда каждая пара функций  $(\tilde{I}_k, \tilde{\Pi}_k)$  удовлетворяет «не зависящему от  $k$ » дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{I}_k}{d(k\varphi)} = -\tilde{\Pi}_k, \quad \frac{d\tilde{\Pi}_k}{d(k\varphi)} = \tilde{\rho} + \tilde{I}_k, \quad (*)$$

где  $\tilde{\rho} = k^2 \lambda_k^n \rho_k = (dL^n) g$  уже не зависит от  $k$ .

Из теоремы 1 следует, что числа оборотов векторов  $(A_k, B_k)$  и  $(I_k, \Pi_k)$  связаны соотношением

$$\text{ind}(A_k + iB_k) = \text{ind}(\Pi_k + iI_k) + k.$$

Но из дифференциального уравнения (\*) следует, что

$$\text{ind}(\Pi_k + iI_k) = -\frac{1}{2} (\# \text{ нулей } I_k).$$

Поэтому, согласно теореме 2, ввиду соотношения

$$A_k + iB_k = (\Pi_k + iI_k)(c_k + is_k),$$

выполняется следующая формула для индексов:

$$\text{ind}(A_k + iB_k) = -\frac{1}{2} (\# \text{ нулей функции } (dL_k^n g)) + k$$

(если  $A_k + iB_k$  не имеет нулей). Отсюда следует, что (в отсутствие нулей

$A_k + iB_k$ ) выполнено неравенство

$$\text{ind}(A_k + iB_k) \leq 0,$$

ибо функция  $(dL_k^n)g$  ортогональна функциям  $(1, c_l, s_l)$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ) и имеет, следовательно, не менее  $2k$  нулей (по теореме Штурма—Гурвица).

**Пример 1.** Положим  $g(\varphi) = \cos(k\varphi)$ . Тогда (при  $n \geq k$ )  $L_k^n g = \lambda_k^n \cos(k\varphi)$ ,  $I_k = \sin(k\varphi)$ ,  $\Pi_k = -\cos(k\varphi)$ ,  $A_k = -1$ ,  $B_k = 0$ ,  $\text{ind}(A_k + iB_k) = 0$ .

**Пример 2.** Пусть  $g(\varphi) = \cos(2\varphi)$ ,  $n = 1$ . Тогда  $k = 1$  и каустика — астроида:

$$(A_1 = -4 \cos^3 \varphi, \quad B_1 = 4 \sin^3 \varphi),$$

стало быть

$$(I_1 = 2 \sin(2\varphi), \quad \Pi_1 = -4 \cos(2\varphi)).$$

В этом случае  $(dL_1^1)g = -2 \sin(2\varphi)$ ,  $\#(\text{нулей}) = 4$ ,  $\text{ind}(\Pi_1 + iI_1) = -2$ ,  $\text{ind}(A_1 + iB_1) = -1$ .

При  $n = 1$ ,  $k = 1$ ,  $g(\varphi) = \cos(m\varphi)$ , мы находим таким же образом  $I_1 = m \sin(m\varphi)$ ,  $\Pi_1 = -m^2 \cos(m\varphi)$ ,  $\text{ind}(\Pi_1 + iI_1) = -m$ ,  $\text{ind}(A_1 + iB_1) = 1 - m \leq 0$ .

Случай  $m = 0$  — исключение, так как в этом случае  $I_1 = \Pi_1 = 0$  и на каустике  $A = B = 0$ , а индекс не определен.

## 12. Гиперфронты периодических функций и подсчет числа параболических кривых на алгебраических поверхностях

Пусть  $g: S \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая  $2\pi$ -периодическая функция аргумента  $\varphi$ .

**Определение 1.** *C-гиперфронтом* порядка  $n$  функции  $g$  называется кривая в  $\mathbb{R}^{2n}$ , образованная теми значениями  $2n$  параметров  $(A_k, B_k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) функции

$$G(A, B; \varphi) = \sum_{k=1}^n (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) + g(\varphi),$$

для которых эта функция угла  $\varphi$  имеет критическое значение  $C$  в критической точке кратности не менее  $2n - 1$  (такой большой, чтобы получилась кривая):

$$\exists \varphi \in S^1: G(A, B; \varphi) = C \quad \text{и} \quad G^{(i)}(A, B; \varphi) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2n - 1).$$

Соответствующие плоские кривые  $\{(A_k, B_k)\}$  будут называться  $k$ -проекциями гиперфронта ( $k = 1, \dots, n$ ).

**Теорема 1.** Явные формулы для координат точек  $C$ -гиперфронта функции  $g$  суть

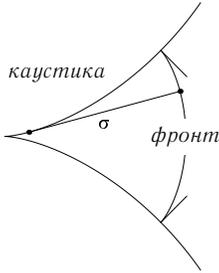
$$\begin{cases} A_k = c_k \text{III}_k - s_k \text{IV}_k, \\ B_k = s_k \text{III}_k + c_k \text{IV}_k, \end{cases} \quad (1)$$

где функции  $\text{III}_k$  и  $\text{IV}_k$  угла  $\varphi$  выражаются через функцию  $g$  формулами

$$\text{III}_k = -\frac{(L_k^n)(g-C)}{\lambda_k^n}, \quad \text{IV}_k = -\frac{(dL_k^n)g}{k\lambda_k^n}. \quad (2)$$

в которых операторы  $L_k^n$  и числа  $\lambda_k^n$  определены в теории гиперкаустик (раздел 11, с. 60).

Доказательство. Применяя операторы  $L_k^n$  и  $dL_k^n$  к функции  $G(A, B; \cdot) - C$  переменной  $\varphi$ , мы получим нули по определению гиперфронта. Учитывая собственные числа,  $L_k^n c_k = \lambda_k^n c_k$ ,  $L_k^n s_k = \lambda_k^n s_k$ ,  $L_k^n c_l = L_k^n s_l = 0$  при  $l \neq k$ , мы приходим к системе



$$\begin{cases} \lambda_k^n c_k A_k + \lambda_k^n s_k B_k = -L_k^n(g-C), \\ k\lambda_k^n(-s_k A_k + c_k B_k) = -(dL_k^n)g. \end{cases}$$

Используя обозначения (2), мы можем переписать эту систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{III}_k \\ \text{IV}_k \end{pmatrix}.$$

Рис. 26. Построение (гипер)фронта

Обращая ортогональную матрицу путем транспонирования, мы доказываем формулы (1) теоремы 1.  $\square$

**Замечание.** Рассмотрим  $k$ -проекцию гиперкаустики порядка  $n$  на  $k$ -плоскость  $\{(A_k, B_k)\}$ . Начиная с точки  $(A_k^*(\varphi) = c_k \text{II}_k - s_k \text{I}_k, B_k^*(\varphi) = s_k \text{II}_k + c_k \text{I}_k)$  теоремы 2 раздела 11 (с. 61), мы будем двигаться вдоль касательной прямой к  $k$ -проекции гиперкаустики, сдвигаясь на расстояние  $\sigma_k$  (в смысле евклидовой метрики  $k$ -плоскости,  $(dA_k)^2 + (dB_k)^2$ ). По теореме 1, мы придем в точку (рис. 26)

$$(A_k(\sigma_k) = A_k^* + \sigma_k c_k, \quad B_k(\sigma_k) = B_k^* + \sigma_k s_k) \quad (3)$$

(переменная  $\varphi$  сейчас зафиксирована и не указывается).

**Теорема 2.** Пусть расстояние сдвига от  $k$ -проекции гиперкаустики есть

$$\sigma_k = \frac{(C(n!)^2 - L_k^n g)}{(k^2 \lambda_k^n)}.$$

Тогда точка (3) принадлежит  $k$ -проекции  $C$ -гиперфронта функции  $g$ , изучавшегося в теореме 1.

Доказательство. По определению (3), мы оказываемся при указанном выборе расстояния  $\sigma_k$  в точке с координатами

$$(A_k(\sigma_k) = c_k \Pi_k - s_k I_k + c_k \sigma_k, B_k(\sigma_k) = s_k \Pi_k + c_k I_k + s_k \sigma_k).$$

Но, согласно (1), на  $C$ -фронте координаты точки суть

$$(A_k = c_k \text{III}_k - s_k \text{IV}_k, B_k = s_k \text{III}_k + c_k \text{IV}_k).$$

Коэффициенты  $I_k$  и  $\text{IV}_k$  совпадают по их определениям. Поэтому для доказательства теоремы 2 остается доказать тождество  $\Pi_k + \sigma_k = \text{III}_k$ .

По определению, входящие сюда величины равны

$$\left( \Pi_k = \frac{d^2(L_k^n g)}{k^2 \lambda_k^n}, \text{III}_k = -\frac{(L_k^n)(g - C)}{\lambda_k^n} \right).$$

Итак, остается проверить тождество

$$d^2(L_k^n g) + k^2 \lambda_k^n \sigma_k + k^2 (L_k^n g) = k^2 L_k^n C. \quad (4)$$

Но  $(k^2 + d^2)L_k^n = L^n$  (по определениям на с. 60—61, рпздела 11). Также по приведенному там определению оператора  $L^n$ , имеем  $L^n 1 = (n!)^2 = k^2 L_k^n 1$ . Поэтому формула (4) эквивалентна определяющей значение  $\sigma_k$  формуле теоремы 2:

$$(n!)^2 C = L^n g + k^2 \lambda_k^n \sigma_k,$$

и теорема 2 доказана.  $\square$

**Замечание.** Хотя мы доказали все это вычислением проекций, на самом деле результат является геометрическим: точка гиперфронта принадлежит касательной прямой к гиперкаустике, проведенной в пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  и выходящей из соответствующей точки  $(A^*, B^*)$ . Действительно, формулы раздела 11 показывают, что элементы  $dS_k$  длин проекций гиперкаустики связаны между собой при разных  $k$  соотношениями  $dS_k = \rho_k d\varphi$ . Эти соотношения показывают, что отношения  $dS_k/dS_l = \rho_k/\rho_l$  не зависят вдоль гиперкаустики от  $\varphi$ . Формула теоремы 1 раздела 11 для  $\rho_k$  доказывает независимость от  $k$  произведения

$$k^2 \lambda_k^n \rho_k = (dL^n)g,$$

а тем самым доказывает формулу, связывающую метрики разных проекций гиперкаустики:

$$k^2 \lambda_k^n dS_k = l^2 \lambda_l^n dS_l.$$

Эта формула подсказывает, что в  $\mathbb{R}^{2n}$  есть *удобные метрики*, например, уравнивающая  $k$ -проекции метрика

$$(ds)^2 = \sum_{k=1}^n [k^4 (\lambda_k^n)^2 ((dA_k)^2 + (dB_k)^2)],$$

и что *все перемещения*  $\Delta S_k = \sigma_k$  *теоремы 2* являются проекциями одного и того же перемещения вдоль касательной к гиперкаустике в пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ . Для удобной метрики  $ds$ , введенной выше, это глобальное перемещение сдвигает точку вдоль касательной прямой гиперкаустики на расстояние  $\sqrt{n}[C(n!)^2 - L^n g]$ .

Изменение постоянной  $C$  сдвигает каждую точку гиперфронта на постоянное (не зависящее от точки) расстояние вдоль касательной к гиперкаустике (и аналогично сдвигает проекции). В этом смысле *гиперфронты с разными значениями  $C$  оказываются «параллельными»*.

**Теорема 3.** *Компоненты касательного вектора гиперфронта пропорциональны векторам  $(-s_k, c_k)$ , а именно, производные координат точек гиперфронта (1) по  $\varphi$  равны  $A_k = -R_k s_k, B_k = R_k c_k$ , где*

$$R_k = k\sigma_k = \frac{((n!)^2 C - L^n g)}{(k\lambda_k^n)}.$$

**Замечание 1.** Поскольку  $\frac{dA_k}{dk\varphi} = \frac{1}{k} \frac{dA_k}{d\varphi}$ , то радиус кривизны  $k$ -проекции гиперфронта (в стандартной евклидовой метрике  $(dA_k)^2 + (dB_k)^2$ ) равен  $R_k/k = \sigma_k$  — это расстояние от точки спроектированного гиперфронта до спроектированной гиперкаустики вдоль касательной к проекции гиперкаустики, как и должно быть для эвольвенты этой проекции гиперкаустики ( $\sigma_k$  — длина свободного конца нити).

**Замечание 2.** *Проекция гиперфронта ортогональна касательной к спроектированной гиперкаустике.*

Ибо вектор  $(-s_k, c_k)$  направления спроектированного гиперфронта ортогонален вектору  $(c_k, s_k)$  направления спроектированной гиперкаустики (вычисленному в теореме 1 раздела 11). Из этих свойств проекции следует, что и сам гиперфронт ортогонален прямой, касательной к гиперкаустике в соответствующей точке.

Доказательство теоремы 3. Дифференцируя формулы (1), мы получаем

$$\begin{cases} A_k = c_k(\text{III} - k\text{IV}) - s_k(\text{IV} + k\text{III}), \\ B_k = s_k(\text{III} - k\text{IV}) + c_k(\text{IV} + k\text{III}). \end{cases}$$

Но  $\text{III} = -\frac{dL_k^n g}{\lambda_k^n}$ ,  $\text{IV} = -\frac{dL_k^n g}{k\lambda_k^n}$ , поэтому  $\text{III} - k\text{IV} = 0$ . С другой стороны, мы видим, что

$$\text{IV} + k\text{III} = -\frac{d^3(L_k^n g)}{(k\lambda_k^n)} + \frac{k^2(-L_k^n(g-C))}{(k\lambda_k^n)} = -\frac{(d^2+k^2)(L_k^n g) + k^2 L_k^n C}{k\lambda_k^n}.$$

По определению (раздел 11, с. 60)  $(d^2+k^2)L_k^n = L^n$ , а  $k^2 L_k^n 1 = L^n 1 = (n!)^2$ . Итак, мы получаем выражение для недостающего коэффициента:

$$\text{IV} + k\text{III} = \frac{(n!)^2 C - L^n g}{k\lambda_k^n},$$

доказывающее теорему 3. □

**Следствие.** Среди гиперфронттов порядка  $n$  периодической функции имеются гиперфронтты с  $2n+2$  или более точками возврата (для функций общего положения — полукубического типа), и среди них имеется гиперфронтт альтернированной длины нуль, причем такими же свойствами обладают и  $k$ -проекции указанных гиперфронттов.

Интеграл от распределения масс с плотностью  $\pm 1$  вдоль гиперфронтта (знак меняется при прохождении каждой точки возврата), спроектированного на любую прямую, равен нулю.

Барисенстры точек возврата с четными и с нечетными номерами (при нумерации вдоль гиперфронтта) совпадают: если всего этих точек  $2m$ , то

$$P_1 + P_3 + \dots + P_{2m-1} = P_2 + P_4 + \dots + P_{2m}.$$

Доказательство. Функция

$$L^n g = (d^2+1)(d^2+4)\dots(d^2+n^2)g$$

ортогональна на окружности  $2n$  функциям  $(c_k, s_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , как показывает разложение в ряд Фурье. Если она не ортогональна единице, то этой ортогональности можно добиться (не нарушая остальных) для модифицированной функции  $(n!)^2 C - L^n g$  (выбором постоянной  $C$ , означающей нумерующее гиперфронтты критическое значение). Необходимая здесь постоянная  $C$  не зависит от  $k$ , так что мы получим единый гиперфронт, все  $k$ -проекции которого будут иметь ортогональные константам радиусы кривизны  $R_k/k$  и, стало быть, будут иметь нулевые альтернированные длины:

$$\oint dS_k = \oint \frac{dS_k}{d\varphi} d\varphi = \oint R_k d\varphi = 0.$$

Этот же гиперфронт (и его проекции) имеет не менее  $2n+2$  точек возврата (по теореме Штурма—Гурвица). Остальные утверждения следствия вытекают таким же образом из ортогональности функции  $L^n g$  функциям  $c_k$  и  $s_k$ . Здесь ортогональность константам не нужна, поэтому результаты оказываются справедливыми для всех гиперфронт, независимо от значения нумерующей гиперфронта постоянной  $C$  (критического значения).  $\square$

Заодно получаются выражения для длин (альтернированного ориентированных) гиперфронт: эти длины оказываются линейными функциями от постоянной  $C$ . Для стандартной метрики  $(dA_k)^2 + (dB_k)^2$  коэффициент при  $C$  в формуле для длины  $k$ -проекции

$$S_k(C\text{-фронт}) = aC + b$$

есть  $a = \frac{(n!)^2}{k\lambda_k^n}$ .

Исходным пунктом всех изложенных в настоящей статье результатов послужили вопросы, поставленные А. Ортиц-Родригес, мексиканской аспиранткой университета Париж — VII, которую я здесь за это благодарю.

1) *Сколько связных компактных компонент может иметь (гладкая) кривая параболических точек графика вещественного многочлена  $f$  степени  $D$  от двух переменных?*

2) *Сколько связных компонент может иметь (гладкая) кривая параболических точек (гладкой) алгебраической поверхности  $M$  степени  $D$  в трехмерном вещественном проективном пространстве?*

Можно было бы рассмотреть графики вещественных алгебраических функций, не являющихся многочленами, вроде кубического корня из вещественного многочлена, или графики рациональных функций.

Смысл всех этих вопросов состоит в том, чтобы выяснить, не накладывает ли гессиановость уравнения параболических кривых ограничений на их топологию, их алгебраическую геометрию, подобных тем, какие накладывают градиентность или гамильтоновость, симплектичность или контактность, лагранжевость или лежандровость.

Но, в то время как в перечисленных шести теориях такие ограничения, начиная с постановки вопроса мною в 1965 году, были серьезно изучены многими замечательными математиками (и привели, например, к созданию «симплектической и контактной топологии», «теории лагранжевых пересечений и лежандровых узлов», к доказательству так называемых «гипотез Арнольда» и к построению «квантовых гомологий», «гомоло-

гий Флоера», «контактных гомологий Чеканова» и т. д. — см., например, обзоры [7], [8], [9], [10]), в случае гессиановой топологии известно гораздо меньше (сошлюсь лишь на [3], [11], [12]). Что касается задач 1) и 2) выше, то мне известны лишь следующие результаты:

$$1) \frac{(D-1)(D-2)}{2} \leq b_0(\text{Par}f) \leq \frac{(2D-5)(2D-6)}{2} + 1$$

$$2) \frac{D(D-1)(D-2)}{2} \leq b_0(\text{Par}M) \leq 10D^3 - 28D^2 + 4D + 3.$$

Оценка снизу здесь означает существование (при  $D > 3$ ) примера с указанным числом диффеоморфных окружности компонент, а сверху — неравенство, которое доказано (вероятно, очень давно).

Заметка А. Ортиц-Родригес, содержащая доказательство неравенств 1) и 2) опубликована в *Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, Ser. I.* 334. 2002.

Коэффициенты в оценках сверху и снизу расходятся в четыре раза в первом случае и в двадцать во втором, хотя уравнивать их, вероятно, было бы легче, чем, скажем, в неравенстве Мияоки.

**Пример.** Многочлен степени  $D$  с  $\frac{(D-1)(D-2)}{2}$  компактными компонентами связности приведен в работе А. Ортиц-Родригес. Этот пример устроен так: рассмотрим многочлены 1-й степени  $l_1, \dots, l_D$ , удовлетворяющие некоторому условию типа общности положения.

Для многочлена  $f = l_1 l_2 \dots l_D$  выполнена следующая теорема:

**Теорема** (Ортиц-Родригес).

1) *Параболическая кривая многочлена  $f$  состоит из ровно  $\frac{(D-1)(D-2)}{2}$  компонент связности, диффеоморфных окружности — по одной в каждой из ограниченных частей, на которые объединение прямых  $\{l_i = 0\}$  делит плоскость (рис. 27).*

2) *Многочлен  $f$  гиперболичесен вне замкнутого объединения упомянутых ограниченных частей плоскости.*

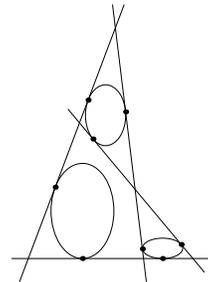


Рис. 27. Прямые  $\{l_i = 0\}$  и  $\text{Par}f$

## Напоминание элементов анализа, отсутствующих в его «современных» изложениях

«Распределение  $\rho dS$  массы плотности  $\rho$  вдоль кривой», о котором идет речь в теореме, формально называется в математике термином «*векторная плотность*» (говорят также «поток», «обобщенная вектор-функция» и т. п.).

К сожалению, некоторым читателям старомодные «бесконечно малые элементы кривой», формализуемые этой терминологией, непонятны, и их нужно им растолковывать, что и сделано ниже. Трудность представляет лишь то, что  $dS$  в «распределении  $\rho dS$ » обозначает не числовой дифференциал функции (длины дуги)  $s$ , а *вектор* — «*бесконечно малый элемент кривой*». Доказательство теоремы о нулях интегралов заключено в приведенных в тексте простых формулах, нужно лишь следить за смыслом употребляемых там обозначений.

**Определение.** *Векторной плотностью* на гладком многообразии называется заданная на нем дифференциальная форма со значениями в векторном пространстве.

Мы используем ниже 1-формы, т. е. линейные функции от касательного вектора, и многообразия тоже будут одномерными. Однако векторное пространство значений может быть и многомерным (у нас обычно двумерным).

Векторные плотности можно *интегрировать* по цепям совершенно так же, как дифференциальные формы с числовыми значениями. Интеграл — это предел интегральных сумм, он — тоже вектор (того же пространства значений).

На гладкой кривой в векторном пространстве имеется *естественная векторная плотность* (которую мы будем обозначать через  $dS$  и называть «элементом кривой»): *значение этой 1-формы на каждом касательном векторе кривой равно самому этому вектору* (но рассматриваемому как элемент содержащего кривую векторного пространства).

Умножая элемент кривой на на числовую функцию  $\rho$ , заданную на кривой, мы получаем векторную плотность  $\rho dS$  (*значение которой на каждом касательном к кривой векторе равно произведению этого вектора на значение функции  $\rho$  в точке его приложения*).

**Пример.** Рассмотрим распределение масс с линейной (относимой к единице длины линии) плотностью  $\rho$  вдоль ориентированной кривой в евклидовом пространстве. *Линейной плотностью* распределения в точке кривой называется производнаяот массы дуги кривой, заканчивающейся

в этой точке по ориентированной длине  $s$  этой дуги. Разумеется, ни плотности, ни массы не предполагаются здесь положительными, так что массу можно было бы называть зарядом. При изменении ориентации кривой линейная плотность фиксированного распределения масс меняет знак.

Распределение масс с линейной плотностью  $\rho$  вдоль ориентированной кривой в евклидовом пространстве определяет векторную плотность  $\rho dS$  вдоль кривой. Физически можно представлять себе тонкую струйку из частиц, движущихся вдоль нашей ориентированной кривой со скоростью  $\dot{s} = \rho(x)$  в точке  $x$ , причем линейная плотность струйки (по отношению к ориентированной длине  $s$  вдоль кривой) везде равна 1.

Или же можно представлять себе тонкую струйку плотности  $\rho$  из частиц движущихся вперед вдоль кривой с равной по модулю 1 скоростью, так что для каждой частицы  $\dot{s} = 1$ .

Векторные плотности, соответствующие обоим этим моделям, одинаковы: это  $\rho dS$ . Можно, например, иметь в виду модель с плотностью 1 и скоростью  $\rho$ .

Содержание теоремы об интеграле от распределения вдоль каустики во введенных терминах состоит в том, что *интеграл от альтернирующей векторной плотности  $\rho dS$  вдоль каустики периодической функции, снабженной функцией линейной плотности массы  $\rho = \pm 1$ , (знак меняется в каждой точке возврата) по отношению к евклидовой длине  $s$  ориентированной каустики равен всегда нулю.*

Дело в том, что, если  $\varphi$  — аргумент исходной  $2\pi$ -периодической функции  $g$ , то, как мы проверили, касательный к каустике вектор длины 1 имеет в соответствующей  $\varphi$  точке каустики компоненты  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

Этот вектор имеет длину единица, но *заданная им ориентация каустики меняется при прохождении каждой точки возврата, так как этот вектор зависит от  $\varphi$  непрерывно, а ориентирующий каустику вектор меняет знак при прохождении точки возврата.*

В то же время «радиус кривизны» каустики  $dS/d\varphi$ , выражается через исходную периодическую функцию  $g$  как  $g' + g'''$ , если ориентировать длину каустики направлением касательного вектора  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Отсюда для интеграла от нашей альтернирующей векторной плотности  $\rho dS$  ( $\rho = \pm 1$ ) получается выражение в виде интеграла по переменной  $\varphi$  от 0

до  $2\pi$ , с компонентами  $\oint \rho dS = (\rho(g' + g''')) \cos \varphi d\varphi, \oint (g' + g''') \sin \varphi d\varphi$

(альтернирование интеграла исчезло!). А эти интегралы равны нулю по теореме Штурма—Гурвица. Теорема об интеграле от альтернирующей векторной плотности доказана.

Несколько слов о поведении векторных плотностей при гладких отображениях (например, при проектировании каустики на прямую).

При гладком отображении между многообразиями одинаковой размерности естественно возникает отображение *вперед* для векторных плотностей, значения которых являются касательными векторами соответствующих многообразий в соответствующих точках (как это имеет место, например, для элементов кривых в векторных пространствах и для векторных плотностей  $\rho dS$ , определенных выше).

Отображение переносит векторную плотность на многообразии-прообразе в векторную плотность в многообразии-образе, определяемую следующей естественной конструкцией (и называемую *прямым образом* исходной векторной плотности при данном гладком отображении).

Если отображение — диффеоморфизм, то значение перенесенной векторной плотности на касательном к многообразию-образу векторе-аргументе<sup>1</sup> определяется следующей очевидной конструкцией. Сначала мы поднимаем вектор-аргумент на многообразии-прообраз (рассмотрим там тот касательный вектор, который посылается в исходный вектор-аргумент нашим диффеоморфизмом). Затем мы вычислим значение исходной векторной плотности на этом поднятом векторе. И, наконец, мы отправим это значение, лежащее ведь в касательном пространстве многообразия-прообраза обратно вниз на многообразии-образ (при помощи рассматриваемого диффеоморфизма). Полученный касательный вектор у многообразию-образу (в исходной точке приложения вектора-аргумента) и есть значение перенесенной диффеоморфизмом векторной плотности на этом векторе-аргументе.

Если рассматриваемое гладкое отображение — не диффеоморфизм, то у одной точки многообразия-образа может быть несколько точек-прообразов. В этом случае *значение прямого образа исходной векторной плотности на касательном к многообразию-образу векторе-аргументе называется суммой векторов, перенесенных в точку его приложения из всех точек-прообразов данной точки (при помощи описанной выше для диффеоморфизмов конструкции)*.

Мы предполагаем здесь, что рассматриваемое отображение является в окрестности каждой из этих точек-прообразов диффеоморфизмом, т. е. что исходная точка многообразия-образа не является критическим значением рассматриваемого отображения.

---

<sup>1</sup> Строго говоря, для  $k$ -форм нужно было бы начинать с  $k$  векторов-аргументов, но нам потребуется сейчас только случай  $k = 1$ .

**Замечание 3.** В соответствии с приведенным определением прямой образ векторной плотности при гладком отображении определен в тех точках многообразия-образа, которые не являются критическими значениями отображения и имеют лишь конечное число прообразов.

Для конечности числа прообразов каждого некритического значения достаточно компактность отображаемого многообразия (или хотя бы собственность отображения, т. е. некомпактность прообраза каждого компактного множества).

На интегрирование прямого образа его неопределенность в критических значениях отображения не влияет, так как мера множества всех критических значений достаточно гладкого отображения равна нулю, так что интегрировать (в достаточно широком смысле) можно по множеству некритических значений. (Строго говоря, здесь приходится либо пользоваться интегралом Лебега, либо сужать класс отображений, например, до алгебраических).

В некоторых случаях прямой образ продолжается и на критическое значение отображения (по непрерывности): мы покажем ниже, что так обстоит дело в типичном примере отображения проектирования окружности на ее диаметр.

Каустика периодической функции компактна, так что и проекция заданного на ней векторного распределения, и ее интеграл корректно определены. И интеграл от этой функции равен нулю (так как интеграл от проекции векторного распределения равен проекции интеграла от исходного векторного распределения в силу линейности операции интегрирования и ввиду определения прямого образа).

**Пример 1.** На евклидовой окружности  $\{x = \cos t, y = \sin t\}$ , параметризованной азимутом  $t$  точки окружности, распределение масс с линейной плотностью  $\rho$  задает векторную плотность  $\rho dS$ . Ее значение на векторе, касающемся окружности в точке с азимутом  $t$ , есть вектор с компонентами  $\rho(t) [(-\sin t)(dt), (\cos t)(dt)]$ . Здесь  $dt$  — линейная числовая функция от того касательного к окружности вектора-аргумента, на котором мы вычисляем значение векторной плотности  $\rho dS$ .

При проектировании окружности на ось  $x$  (вдоль оси  $y$ ) эта векторная плотность переносится из точки с азимутом  $t$  в точку  $x = \cos t$  оси  $x$  в виде векторной плотности на прямой, заданной коэффициентом  $\rho(t)(-\sin t)(dt) = \rho(t) dx$  (на который надо умножить базисный вектор  $\partial/\partial x$  оси  $x$ , чтобы получить значение формы).

Точка  $x$  диаметра окружности имеет два прообраза. Поэтому прямой образ векторной плотности  $\rho dS$  задается в точке  $x$  коэффициентом

$[\rho(t_1) + \rho(t_2)](dx)$ , где  $t_1$  и  $t_2$  — азимуты обоих прообразов точки  $x = \cos t$  (коэффициент опять умножается на  $\partial/\partial x$ ).

**Замечание 4.** Этот прямой образ гладко продолжается в критические значения ( $x = -\pm 1$ ) проектирования окружности на ее диаметр. Это следует из того, что четная гладкая функция переменной  $y$ , вроде  $f(y) + f(-y)$ , представляется в виде гладкой функции от переменной  $y^2$ .

## Литература

- [1] J. C. F. Sturm. Mémoire sur les équations différentielles du second ordre // J. Math. Pures Appl. Vol. 1. 1836. P. 106—186.
- [2] A. Hurwitz. Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen // Math. Ann. Vol. 57. 1903. 425—446.
- [3] V. I. Arnold. Remarks on the parabolic curves on surfaces and on the higher-dimensional Möbius—Sturm theory // Func. Analysis and Its Appl. Vol. 31 № 4. 1997. 227—239.
- [4] V. I. Arnold. On the numbers of flattening points on space curves // Ya. G. Sinai's seminar on Dynamical Systems. — Providence, RI, 1996. — P. 11—12. — (AMS Translations. Ser. 2. Vol. 171).
- [5] В. И. Арнольд. Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов // Успехи мат. наук. Т. 50. № 1. 1995. С. 3—68.
- [6] В. И. Арнольд. Математика и физика: мать и дитя или сестры? // Успехи физ. наук. Т. 169 № 12. 1999. С. 1311—1323.
- [7] V. I. Arnold. Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts? // Mathematics: Frontiers and Perspectives / V. I. Arnold, M. F. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, ed. — IUM, AMS, 2000. — P. 403—410.
- [8] V. I. Arnold. Topological problems in wave propagation theory and topological economy principle in algebraic geometry // The Arnoldfest. — Providence, RI: AMS, 1999. — (Fields Institute Comm. Vol. 24). — P. 39—54.
- [9] В. И. Арнольд. Первые шаги симплектической топологии // Успехи мат. наук. Т. 41. № 6. 1986. С. 3—18.
- [10] V. I. Arnold. Symplectic geometry and topology // J. Math. Phys. Vol. 11. № 6. 2000. P. 3307—3343.
- [11] Д. А. Панов. Параболические кривые и градиентные отображения // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. Т. 221. 1998. С. 271—288.
- [12] V. I. Arnold. On the problem of realisation of a given Gaussian curvature function // Topol. Methods Nonlinear Anal. Vol. 11. № 2. 1998. P. 199—206.

## Оглавление

<b>I. Каустики и гиперболичность</b>	<b>5</b>
1. Каустики периодических функций . . . . .	5
2. Гиперболические периодические функции . . . . .	13
<b>II. Гиперболические однородные функции</b>	<b>16</b>
3. Однородные функции степени $D$ и связь их гиперболичности с теорией Морса	
4. Доказательства теорем об однородных функциях . . . . .	17
5. Примеры $D$ -гиперболических функций . . . . .	21
<b>III. Гиперболические однородные многочлены</b>	<b>23</b>
6. Примеры $D$ -гиперболических многочленов степени $D > 1$ . . . . .	23
7. Нормализованное фазовое пространство $D$ -гиперболической функции	
8. Техника конструирования $D$ -гиперболических функций, уравнение Гессе и	
<b>IV. Астроида</b>	<b>40</b>
9. Многочлены четвертой степени и их астроидальная каустика	40
10. Фронты астроиды, теория гипоциклоиды области 4-гиперболичности	43
<b>V. Гиперкаустики и гиперфронты</b>	<b>60</b>
11. Гиперкаустики периодических функций . . . . .	60
12. Гиперфронты периодических функций и подсчет числа параболических кри-	

*Владимир Игоревич Арнольд*

Астроидальная геометрия гипоциклоид и гессианова топология  
гиперболических многочленов

Редактор В. Клепцын  
Серийное оформление обложки разработал М. Панов.

Издательство Московского Центра  
непрерывного математического образования

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 31.12.2001 г. Формат  $60 \times 88 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная № 1.  
Печать офсетная. Печ. л. 5. Тираж 1000 экз.

МЦНМО  
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии РА «Фантазия»  
111024, Москва, Авиамоторная ул., 20/17

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241–72–85. E-mail: biblio@mccme.ru

---

ISBN 5-94057-012-7

