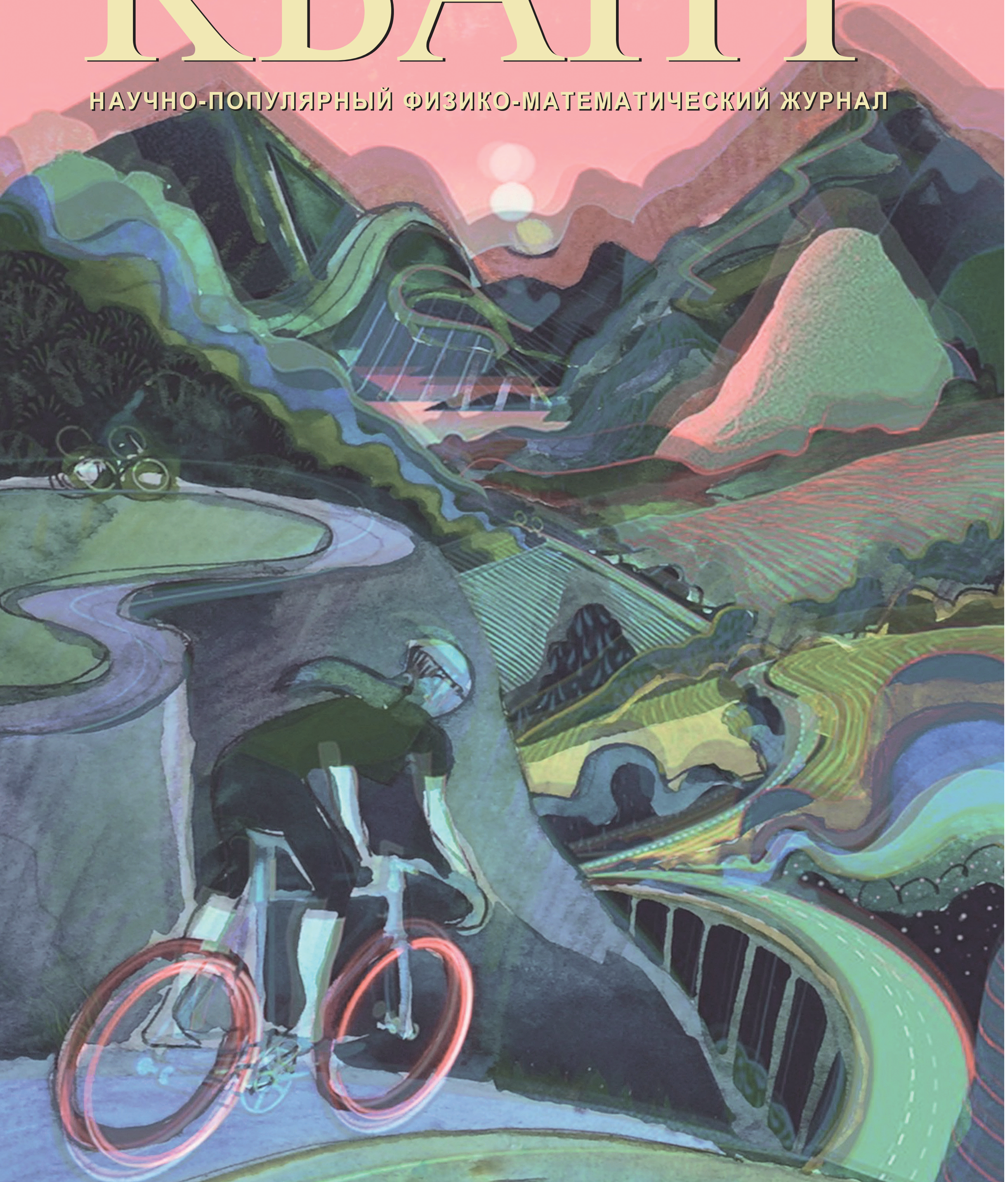
ISSN 0130-2221
АПРЕЛЬ
2019 · № 4

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Шесть Т

Перед вами очередное произведение немецкого изобретателя Фолькера Латуссека (Volker Latussek) – известного автора головоломок на упаковку. Имеется шесть одинаковых деталей в форме буквы Т, каждая из которых составлена из пяти единичных кубиков: два кубика для «ножки» и три для «шляпки».

Эти детали надо уместить в коробку 3×3×4 так, чтобы ничего не торчало наружу. Казалось бы, объема коробки хватает с запасом: в ней помещается 36 единичных кубиков, а все детали вместе занимают только 30. Сложность в том, что входное отверстие в коробку тоже имеет форму буквы Т – это сильно ограничивает возможности для размещения деталей. Тем не менее, попробовав несколько раз по-разному расположить их внутри коробки, можно понять, как добиться успеха.

Е.Епифанов

КВАНТ

АПРЕЛЬ 2019 № 4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Численные значения: зачем и почему они нужны

Л.АШКИНАЗИ

– Отрицательное значение для частоты?!

– Может, это в подвале? Ну то есть на минус первом этаже?

Диалог с не-физиком С.К.

Числа нужны нам по тем же двум причинам, по которым нам нужно вообще все. Одна причина – числа сами по себе доставляют нам удовольствие. Это сложная материя, и мы поговорим об этом в конце статьи. А другая причина проста, понятна и многообразна: знание численных значений – это ключ. К успешной сдаче ЕГЭ, к решению задач, а иногда и к тому, чтобы не стать жертвой жуликов.

Начнем с ЕГЭ. Да и не только с него – на самых разных экзаменах бывают задачи, в которых требуется не только вывести формулу или выбрать ответ из списка, но и получить численное значение какой-то величины. Иными словами, получить не только формулу для скорости, но и само значение, не только формулу для объема сосуда или для количества вещества, но и соответствующие числа. Что вы скажете о таких ответах на ЕГЭ: скорость $3{,}1\cdot10^{10}$ м/с, объем сосуда 10^{-30} м^3, количество вещества $0{,}99\cdot10^{-45}$ моль (все примеры в этой статье – реальные)? В этих трех случаях причина и «степень» невозможности разные. В первом случае надо бы уточнять, о какой скорости идет речь, потому что скорость света, а точнее – скорость распространения электромагнитной волны в вакууме, является ограничением не для всех скоростей, а только для движения материальных тел, передачи энергии и информации. Нематериальный объект, например точка пересечения двух прямых, может двигаться с любой скоростью. Но в конкретной задаче речь шла, конечно, о скорости вполне материального тела. Что касается объема, то проблема в другом – чтобы куб, например, имел такой объем, какие линейные размеры должны быть у него? Вам это число ни о чем не говорит? Это же меньше межатомного расстояния в веществах. А насчет моля, это совсем просто – вспомните его определение. Моль – это сколько молекул или атомов?

Каждый из этих трех ответов дали на экзамене не один и не десять – тысячи человек! Механизм явления тривиален: где-то в преобразованиях делали простую ошибку (обычно какую-то величину писали не в числителе, а в знаменателе или наоборот), размерность и разумность ни промежуточных, ни конечных формул не проверяли и оставалась последняя надежда – осознать, что написано невозможное число. Но этого не происходило. Заметим, что за арифметическую ошибку снимается один тестовый балл, хотя очевидно непонимание принципиально важных вещей и оцениваться это должно было бы совсем иначе.

Приведем еще несколько примеров серьезных последствий простых арифметических ошибок. Для конкретики пусть это будут в математическом смысле родственные примеры.

Как, например, вы отнесетесь к такому ответу для сопротивления: R = 4 Ом и R = −2 Ом? Персонаж решил квадратное уравнение, получил два корня и радостно дал такой ответ. То, что он порушил своим ответом закон сохранения энергии, ему не важно. Сопротивление генерирует ему мощность из ничего! Тут, кстати, есть

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190401

тонкость – правильное решение не должно давать неправильных ответов. Распространенная фраза «один из корней не имеет физического смысла» некорректна, решение должно строиться так, чтобы не давать «не имеющих смысла» ответов, но в школе идут на упрощение. А как можно понять отрицательный ответ для давления: $p = -2{,}3$ Па? Нет, не в твердом теле и не в жидкости, где это вполне возможно, а в газе! И наконец, как следует понимать такой ответ для частоты колебаний: $f = -82\cdot 10^{13}$ Гц? С частотой вообще все интересно, мы о ней еще поговорим.

Мораль такова: пытаясь понять, разумный ли вы ответ получили, надо вспоминать хотя бы три вещи – фундаментальные законы и ограничения, свойства материалов и определения величин и констант. Вот три примера глупостей с числами, для разнообразия из разных источников. Первый пример возьмем из книги по подготовке к ЕГЭ (!) – в условии задачи по оптике говорится, что коэффициент преломления воды равен $\frac{3}{4}$. Может такое быть? Вспомните определение. Второй пример – из материалов теста по физике в одном из престижных московских вузов. Задача была сформулирована так: «По проводу с сопротивлением $R = 10$ ТОм течет ток $I = 0{,}02$ мА. Найти напряжение на проводе. Ответ указать в гигавольтах». Понятно, почему физик или инженер, увидев такое, начнет неприлично смеяться? Третий пример – уже из работ ЕГЭ. В задаче, где нужно было определить частоту излучения в оптическом диапазоне, были получены в разных работах вот такие ответы: $3{,}5\cdot 10^{-12}$ Гц, $12{,}76\cdot 10^{-19}$ Гц, $15\cdot 10^{-10}$ Гц. Стоит ли рассуждать о том, оптический ли это диапазон, если у нас одно колебание происходит в несколько тысяч лет?

Перейдем к рассмотрению более тонких случаев. Если речь идет о конкретных вещах, стоит представлять себе – очень-очень ориентировочно – их возможности. Может ли обычная батарейка отдавать в нагрузку мощность 154 кВт или 58 кВт? Школьник, знающий про такое понятие, как внутреннее сопротивление (в школе стоило бы рассказать, что это такое и зачем существуют «эквивалентные схемы»), легко сообразит, что мощность не может быть больше $\mathscr{E}^2/(4r)$, а для обычных батареек это меньше 1 Вт!

Далее, если речь идет вроде бы не о конкретных вещах, то полезно понимать, что вообще бывает. Разумен ли, например, ответ для энергии $1{,}93\cdot 10^{15}$ Дж? Этого хватит, чтобы довести до кипения несколько миллионов тонн воды. Ну конечно, если вы поклонник Станислава Лема, то в его романе «Непобедимый» есть такое: «Тысяча четыреста двадцать два рентгена в поле, значит, излучение пробило силовой барьер, – понял Рохан. Он не знал, что такое возможно. Но, когда взглянул на шкалу мощности, понял, какой заряд использовал астрогатор. Этой энергии хватило бы, чтобы хорошенько вскипятить внутриконтинентальное море средней величины. Что ж, Хорпах предпочитал не рисковать повторными выстрелами. Может, он немного перехватил, но теперь они снова имели только одного противника».

Переведем дух и вернемся на Землю. Разумен ли ответ для частоты электромагнитного излучения $3{,}6\cdot 10^{34}$ Гц? В школе спектр кончается примерно на $3\cdot 10^{21}$ Гц, т.е. на 13 порядков раньше. Разумеется, в школе было бы полезно обсудить, какое вообще возможно электромагнитное излучение (по всем его параметрам – частоте, длине волны, энергии, мощности, поляризации…), но 13 порядков должны были бы насторожить самого отчаянного школьника.

В школьных задачах всегда используются какие-то идеализированные представления, сильно упрощенные модели. Это в принципе нормально – физика вся так устроена, хотя степень идеализации и упрощения в серьезной физике обычно отличается от школьной. Школьникам стоило бы объяснять это подробно, показывая на примерах, как происходит развитие модели, но это обычно не делается. Тем не менее, составители задач в большинстве случаев дают для расчетов мало-мальски реальные величины и ждут в качестве ответа такие же. Задачи типа такой: «К батарейке от карманного фонарика, на которой написано 4,5 вольта, подсоединили лампочку, сопротивление которой при измерении оказалось 2 ома. Какой ток будет течь?» дают все-таки редко. Поэтому в задаче, в которой надо было определить энергию электрона при фотоэмиссии, а потом рассчитать длину его пробега в заданном тормозящем поле, школьники, получившие ответы типа $2{,}2\cdot10^{-40}$ м; $5{,}9\cdot10^{-36}$ м; $1{,}4\cdot10^{-22}$ м; $8{,}7\cdot10^{-16}$ м; $1{,}2\cdot10^{-11}$ м; $2{,}7\cdot10^{7}$ м; $2{,}3\cdot10^{27}$ м, должны были насторожиться. Потому что предпоследний ответ – это два диаметра Земли, а про малые расстояния вы в этой статье уже прочитали. Кстати, один из получивших фантастический ответ, насторожился – у последнего ответа стоял знак «?». Ответ, превышающий размер Вселенной (в одном из современных пониманий), все-таки вызвал сомнение. Или такой пример – персонаж получил мощность от батарейки $4\cdot10^{-19}$ Вт. Для обычной батарейки это соответствует току $2{,}5\cdot10^{-19}$ А, т.е. полтора электрона в секунду! В среднем, в среднем… Да просто по воздуху потечет больший на порядки ток – и подсоединять к ней ничего не надо.

Вот еще одна прелестная задача, в которой сделали некорректность изготовители и делали ошибку многие потребители. Дан объем, в него помещают сколько-то ^{210}Po, который с таким-то периодом полураспада испускает α-частицы и превращается в Pb. Каким будет давление в объеме через некоторое время? Существенная часть правильно вычисляла, сколько атомов Po распадется и сколько атомов Pb получится, а потом определяла давление по универсальному газовому закону. Уже хорошо… Но вообще-то задача некорректна – α-частицы вылетают из образца в объем только из 10-микронного приповерхностного слоя (да и то не все), т.е. большинство вообще не вылетит. Кстати, частицы эти – не совсем атомы гелия, но «не будем о страшном на ночь», как говорит один мой знакомый физик.

Что делать на реальном экзамене – не вообще, а в аспекте этой статьи? Посмотреть на ответ и подумать, не противоречит ли он чему-то, известному из школы, например не получили ли вы энергию излучения меньше $h\nu$ или заряд меньше трети заряда электрона e (по модулю, по модулю!). Кроме того, полезно посмотреть просто на условие задачи. Школьник, который решал задачу о плавании объекта на границе двух жидкостей, плотности которых $900\ \text{кг/м}^3$ и $2700\ \text{кг/м}^3$, и получил ответ для плотности объекта $100\ \text{кг/м}^3$, зря этого не сделал. В качестве печального анекдота можно добавить, что сотни школьников радостно писали, что это масло и алюминий, хотя в задаче это не спрашивалось. Зачем было демонстрировать ужасающую абстрактность своего мышления?

Далее, внутри задачи часто приходится, как это ни странно, складывать. Получив в качестве промежуточного результата нечто вроде $\left(0{,}515\cdot10^{15}+2{,}75\right)$, стоит насторожиться. Равно как и получив в качестве ответа на вопрос «во сколько раз» ответы «в $1{,}2\cdot10^{18}$ раза» или «в $0{,}4\cdot10^{26}$ раз». Если задачу составлял минимально разумный человек, такого не будет – складывать и вычитать в школе имеет смысл сравнимые величины (хотя бы из-за того, что разрешено пользоваться калькуляторами). Заметим, что в серьезной физике (и школьникам стоило бы это объяснять) ситуация сложнее – бывает, что сильно различающиеся величины приходится складывать. А чаще их приходится сравнивать – для выбора модели, для обоснования того, что мы учитываем, а чем в данном случае пока пренебрегаем.

Итак, численные оценки имеют большое значение в физике – причем еще задолго до получения ответа! Они позволяют построить модель и определить направление ее развития. Это – одна из причин важности численных оценок для физики. Для остальных людей они важны еще и потому, что в некоторых случаях предохраняют от

(Продолжение см. на с. 13)

Мудрецы, колпаки и арифметика конечных полей

С.ГРИБОК

Испытание 1. Два из трех. О двоичных наборах, кубах и шарах

Давным-давно правил в Персии царь Шахрияр. Целыми днями царь пировал, охотился и развлекался, устраивая жестокие испытания для своих придворных. В то время как царь проводил время в праздности, решением всех запутанных государственных дел и управлением страной занимался совет придворных мудрецов.

Однажды царь решил проверить, так ли уж умны его придворные мудрецы. Он приказал позвать трех мудрецов и объявил условия испытания, которое ожидает их завтра. Каждому мудрецу на голову наденут колпак белого или черного цвета. Каждый сможет видеть чужие колпаки, но не будет знать, какого цвета его колпак. Какой именно колпак надеть на каждого мудреца, решит палач, трижды подбросив монету, одна сторона которой окрашена в белый цвет, а другая – в черный. Затем каждому мудрецу дадут перо и лист пергамента, на котором он напишет, какого цвета его колпак. Если хотя бы двое мудрецов ответят правильно, всех наградят, если же хотя бы двое ошибутся, всех мудрецов казнят. Подавать друг другу какие-либо знаки во время испытания запрещено. За ночь перед испытанием у мудрецов есть возможность договориться и выработать единую стратегию. Как следует действовать мудрецам, чтобы максимизировать шансы остаться в живых?

Докажем, что не существует способа, позволяющего сделать вероятность выигрыша мудрецов больше чем $3/4$.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190402

Пусть испытание повторяется много раз. Пусть мудрецам удалось разработать метод, позволяющий двум мудрецам из трех угадывать цвета своих колпаков в среднем чаще, чем в трех играх из четырех. Таким образом, из 12 ответов мудрецов, прозвучавших в течение четырех игр, в среднем более 6 ответов будут верными ($6 = 3 \cdot 2$). Но это невозможно, так как каждый мудрец угадывает цвет своего колпака в одном случае из двух, а значит, из 12 ответов в среднем ровно 6 ответов верны.

Всего есть 8 различных вариантов распределения колпаков между тремя мудрецами. Вероятность выигрыша $3/4$ означает, что мудрецы побеждают в шести вариантах, а проигрывают в двух вариантах из восьми.

Попробуем построить такую стратегию мудрецов, которая позволит им выигрывать в шести случаях из восьми.

Для удобства записи наборов колпаков будем использовать цифру 0 для обозначения белого колпака, а цифру 1 для обозначения черного колпака. Например, запись 001 будет означать, что первым двум мудрецам достались белые колпаки, а третий мудрец получил черный колпак.

Выберем два «смертельных» набора колпаков, которые мудрецы не смогут угадать. Например, пусть смертельными будут наборы 000 и 111. Мы хотим, чтобы на всех остальных наборах мудрецы смогли выиграть. Как этого добиться?

Прежде всего заметим, что для любого не смертельного набора колпаков один из мудрецов видит на соседях колпаки одного и того же цвета. Стратегия этого мудреца ясна: *если видишь на соседях два колпака одного цвета, называй другой цвет*. Очевидно, для любого не смертельного набора эта стратегия работает и гарантированно позволит мудрецу угадать цвет своего колпака.

Займемся оставшимися двумя мудрецами, каждый из которых видит на соседях колпаки разных цветов. Чтобы выиграть, достаточно, чтобы хотя бы один из этих мудрецов назвал цвет своего колпака правильно. Заметим также, что их собственные колпаки одного и того же цвета. Значит, если один из мудрецов назовет белый цвет, а другой – черный, то один обязательно угадает. Но как мудрецы узнают, какой цвет называть, если они оба видят одну и ту же картину – на соседях колпаки разных цветов? Дело в том, что если присмотреться внимательнее, мы заметим: в том, что видят эти два мудреца, есть некоторые различия. Пусть, например, мудрецы встали в круг. Тогда один из двух мудрецов видит слева белый колпак, а справа – черный. Другой мудрец видит иную картину: слева черный колпак, а справа – белый.

Теперь легко придумать правило, которое позволит одному из этих мудрецов угадать цвет своего колпака: *если видишь на соседях колпаки разных цветов, называй тот цвет, который видишь справа* (заметим, что также годится и «зеркально-симметричное» правило: если видишь на соседях колпаки разных цветов, то называй тот цвет, который видишь слева).

Итак, задача решена, но не будем торопиться. Во-первых, подумаем, нельзя ли упростить правила, которым должны следовать мудрецы. Нетрудно догадаться, что два найденных нами правила можно переформулировать в виде одного простого правила: *называй НЕ тот цвет, который видишь на соседе слева*.

Во-вторых, построим геометрическую интерпретацию задачи о трех колпаках. Удобно представить множество вариантов распределения колпаков в виде куба (рис.1). Каждый набор колпаков соответствует одной из вершин куба. Если два набора колпаков отличаются лишь цветом одного колпака (такие наборы называются

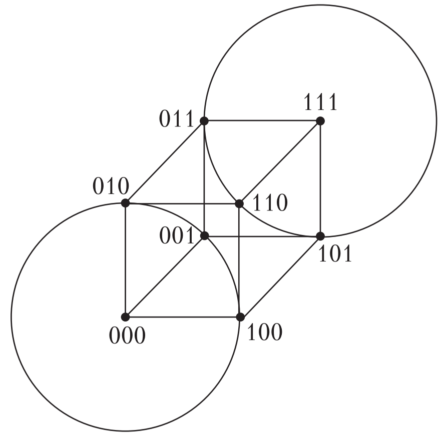


Рис. 1

соседними), они расположены в вершинах, соединенных ребром.

Достроим теперь два шара, центры которых находятся в смертельных точках 000 и 111, а радиусы равны ребру куба. Каждый шар покрывает четыре точки куба. Каждая точка куба либо находится на поверхности, либо в центре одного из шаров. В таких случаях говорят, что построено «покрытие куба непересекающимися шарами». Если точка оказалась в центре шара, мудрецы не угадают цвета своих колпаков, если же точка лежит на поверхности шара, большинство мудрецов назовут свои цвета правильно.

Испытание 2. Четыре из семи. О многочленах и кодовых множествах

На следующий день к царю привели семерых мудрецов. Правитель объявил, что сегодня состоится еще одно испытание.

Правила те же, что и вчера: каждому мудрецу на голову наденут колпак белого либо черного цвета, после чего каждый мудрец должен записать, какого цвета по его мнению колпак на его голове. Если хотя бы четверо мудрецов ответят правильно, всех наградят, если же хотя бы четверо ошибутся, всех казнят.

Как следует действовать мудрецам, чтобы и на этот раз свести вероятность казни к минимуму?

Опять начнем с нижней оценки вероятности казни. Докажем, что не существует способа, позволяющего сделать вероятность выигрыша больше чем 7/8. Доказательство такое же, как и в первой задаче, с точностью до замены чисел.

Пусть мудрецам удалось разработать метод, позволяющий четырем мудрецам из семи угадывать цвета своих колпаков в среднем чаще, чем в семи играх из восьми. Таким образом, из 56 ответов мудрецов, прозвучавших в течение восьми игр, в среднем более 28 ответов будут верными ($28 = 7 \cdot 4$). Но это невозможно, так как каждый мудрец угадывает цвет своего колпака в одном случае из двух, а значит, из 56 ответов в среднем ровно 28 ответов верны.

Всего есть 128 различных вариантов распределения колпаков между семью мудрецами. Вероятность выигрыша 7/8 означает, что мудрецы побеждают в 112 вариантах, а проигрывают в 16 вариантах из 128.

По аналогии с первой задачей теперь надо как-то выбрать 16 смертельных наборов. Но как это сделать?

В предыдущей задаче все наборы из трех колпаков мы расставили по вершинам куба. Теперь колпаков семь, а значит, множество наборов соответствует вершинам семимерного гиперкуба. Представить эту фигуру сложно, однако это не мешает нам порассуждать о ее свойствах.

Заметим, что так как мудрецов семеро, то для каждого набора колпаков существует семь соседних наборов, следовательно, каждый 7-мерный шар единичного радиуса с центром в вершине N-мерного куба покрывает ровно 8 точек куба. Поскольку $128 = 16 \cdot 8$, то теоретически для покрытия всех 128 вершин 7-мерного куба как раз должно хватить шестнадцати непересекающихся 7-мерных шаров, в центре каждого из которых мы поместим смертельный набор. Вот только как это сделать на практике?

Будем называть *расстоянием* между двумя наборами число позиций, в которых эти наборы отличаются. Расстояние между соседними наборами равно единице. Теперь сформулируем свойства множества смертельных наборов, которое мы хотим построить.

1) Всего в множестве 16 наборов.

2) Расстояние между любыми двумя наборами не меньше трех (чтобы шары, в центрах которых находятся смертельные наборы, не пересекались).

3) Циклический сдвиг смертельного набора также является смертельным набором (иначе разным мудрецам придется использовать различные стратегии).

Интуитивно ясно, что смертельные наборы должны быть равномерно распределены на множестве всех возможных наборов.

Можно попробовать представить каждый набор колпаков как двоичную запись некоторого целого числа от 0 до 127, а множество смертельных наборов – как элементы некоторой арифметической прогрессии, однако традиционные арифметические операции плохо подходят для обеспечения нужных нам свойств 2 и 3.

Так как традиционная арифметика нам не подходит, воспользуемся «нетрадиционной» арифметикой, а именно, так называемой арифметикой многочленов над полем $\{0,1\}$.

Прежде всего определим операцию сложения двух наборов колпаков. Сумма двух наборов длины n – это набор длины n, каждый элемент которого равен сумме по модулю 2 соответствующих элементов исходных наборов.

Напомним правила сложения по модулю 2:

$$0 + 0 = 0,$$
$$0 + 1 = 1,$$
$$1 + 0 = 1,$$
$$1 + 1 = 0.$$

Пример:

$$00110101 + 11110000 = 11000101.$$

Чтобы определить операции умножения и деления наборов колпаков, удобно записывать наборы в виде многочленов. Набор колпаков $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ можно записать в виде многочлена от переменной x: $v_0 + v_1 \cdot x + v_2 \cdot x^2 + \ldots + v_{n-1} \cdot x^{n-1}$. Таким образом, множество наборов длины n эквивалентно множеству многочленов, степени которых не превышают $n - 1$.

Теперь определим произведение двух наборов как набор, соответствующий многочлену, полученному при обычном умножении многочленов исходных двух наборов.

Пример:

$$101 \cdot 1111 =$$
$$= \left(1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2\right) \cdot \left(1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3\right) =$$
$$= \left(1 + x^2\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3\right) =$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 =$$
$$= 1 + x + (1+1) \cdot x^2 + (1+1) \cdot x^3 + x^4 + x^5 =$$
$$= 1 + x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + x^4 + x^5 = 110011.$$

Аналогично, деление двух наборов определим как деление соответствующих многочленов. Деление многочленов нетрудно производить уголком, подобно делению обычных чисел, но без переноса разрядов.

Пример приведен на рисунке 2.

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 1 & x^2 + 0 \cdot x + 1 \\
\underline{x^5 + 0 \cdot x^4 + x^3} & \overline{x^3 + x^2 + x + 1} \\
\quad x^4 + x^3 + 0 \cdot x^2 & \\
\quad \underline{x^4 + 0 \cdot x^3 + x^2} & \\
\qquad x^3 + x^2 + x & \\
\qquad \underline{x^3 + 0 \cdot x^2 + x} & \\
\qquad\quad x^2 + 0 \cdot x + 1 & \\
\qquad\quad \underline{x^2 + 0 \cdot x + 1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Рис. 2

В дальнейшем будем использовать термины «набор длины n» и «многочлен, степень которого не превышает $n-1$» как синонимы.

Построим множество смертельных наборов как множество многочленов, степень которых не превышает $n-1$ и которые делятся без остатка на некоторый специальный многочлен $g(x)$.

Кодовое множество размерности n, *порожденное* многочленом $g(x)$, – это множество многочленов, степень которых не превышает $n-1$, делящихся без остатка на $g(x)$.

Элементы кодового множества будем называть *кодовыми наборами*.

Лемма. *Число наборов в кодовом множестве размерности n, порожденном многочленом степени $k-1$, равно 2^{n-k+1}.*

Доказательство. Порожденные наборы получаются при умножении набора длины k на все возможные наборы длины $n-k+1$, число которых в точности равно 2^{n-k+1}.

В данном случае мы хотим получить кодовые наборы длины 7, а число элементов в кодовом множестве должно быть равно 16. Поэтому по лемме надо использовать порождающий набор длины 4, или, другими словами, многочлен степени 3.

Возьмем такой многочлен:

$$g(x) = 1 + x + x^3.$$

Множество кодовых наборов, порожденных этим многочленом, приведено в таблице.

0000000	$0 \cdot g(x) = 0$
1101000	$1 \cdot g(x) = 1 + x + x^2$
0110100	$x \cdot g(x) = x + x^2 + x^4$
1011100	$(1 + x) \cdot g(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$
0011010	$x^2 \cdot g(x) = x^2 + x^3 + x^5$
1110010	$(1 + x^2) \cdot g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^5$
0101110	$(x + x^2) \cdot g(x) = x + x^3 + x^4 + x^5$
1000110	$(1 + x + x^2) \cdot g(x) = 1 + x^4 + x^5$
0001101	$x^3 \cdot g(x) = x^3 + x^4 + x^6$
1100101	$(1 + x^3) \cdot g(x) = 1 + x + x^4 + x^6$
0111001	$(x + x^3) \cdot g(x) = x + x^2 + x^3 + x^6$
1010001	$(1 + x + x^3) \cdot g(x) = 1 + x^2 + x^6$
0010111	$(x^2 + x^3) \cdot g(x) = x^2 + x^4 + x^5 + x^6$
1111111	$(1 + x^2 + x^3) \cdot g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$
0100011	$(x + x^2 + x^3) \cdot g(x) = x + x^5 + x^6$
1001011	$(1 + x + x^2 + x^3) \cdot g(x) = 1 + x^3 + x^5 + x^6$

Свойство 1 выполнено: множество содержит 16 наборов. Легко проверить, что свойство 3 также выполнено: для каждого набора из множества циклический сдвиг этого набора также принадлежит этому множеству. Осталось доказать свойство 2. Для этого сначала докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если наборы v и u являются кодовыми наборами, то набор $w = v + u$ также является кодовым набором.*

Доказательство. Имеем

$$v(x)+u(x)=g(x)\cdot a(x)+g(x)\cdot b(x)= \\ =g(x)\cdot\left(a(x)+b(x)\right).$$

Если бы свойство 2 не выполнялось, то нашлись бы два набора на расстоянии 1 или 2, а значит, по теореме 1, существовал бы набор, равный сумме этих наборов, в котором было бы всего одна или две единицы. Однако ни один из наборов, перечисленных выше, не содержит ровно одну или ровно две единицы. Таким образом, свойство 2 также выполнено.

Итак, мы построили покрытие семимерного куба непересекающимися шарами.

Можно сказать, задача мудрецов заключается в том, чтобы найти вершину гиперкуба, которая соответствует набору их колпаков. Ни один из мудрецов не знает цвет своего колпака, однако он видит цвета всех остальных колпаков, т.е. этому мудрецу известны все цифры в наборе, кроме одной – той, которая соответствует его собственной позиции. Таким образом, с точки зрения этого мудреца набор колпаков соответствует одной из двух вершин гиперкуба, соединенных ребром. Задача мудреца – выбрать правильную вершину этого ребра. Для простоты терминологии будем говорить, что мудрец «находится на ребре» гиперкуба.

Определим теперь стратегии мудрецов.

Прежде всего, если мудрец находится на ребре, одна из вершин которого является кодовым набором, то мудрец должен назвать цвет, соответствующий другой вершине. Это правило гарантирует, что если набор колпаков является смертельным набором, то все мудрецы ошибутся, если же набор колпаков не является смертельным набором, то по крайней мере один из мудрецов назовет цвет своего колпака правильно.

Пусть теперь мудрец находится на ребре, ни одна из вершин которого не является кодовым набором. Каждая из этих вершин покрыта некоторым шаром, т.е. можно сказать, что мудрец находится на ребре, соединяющем два шара. Центры этих шаров находятся на расстоянии 3 друг от друга. Значит, соответствующие наборы колпаков различаются в трех позициях: i, j, k. Одна из этих позиций – это позиция самого мудреца. Для определенности, пусть это будет позиция i.

Мудрец смотрит, какая из позиций, j или k, встретится первой при обходе семерки мудрецов по часовой стрелке, начиная с позиции i, и называет цвет, соответствующий этому шару.

Возьмем произвольную точку X гиперкуба, не лежащую в центре шара, и докажем, что большинство мудрецов, оказавшихся в точке X, правильно назовут свой цвет.

Точка X принадлежит некоторому шару S. Мудрец W_1, находящийся на ребре, ведущем в центр шара S, очевидно, назовет свой цвет правильно. Остальные мудрецы сидят на ребрах между шаром S и другими шарами, центры которых находятся на расстоянии 2 от точки X. Рассмотрим один из этих шаров, S_1. Расстояние от центра S_1 до X равно двум, а значит, есть два ребра, ведущих из X в S_1. На этих ребрах сидят два мудреца, W_2 и W_3. Нетрудно убедиться в том, что либо W_2, либо W_3 угадает свой цвет. Действительно, пусть, например, при обходе семерки мудрецов по часовой стрелке сначала встречается W_1, затем W_2 и наконец W_3. В этом случае мудрец W_3 назовет свой цвет правильно, так как при движении по часовой стрелке ему первой встретится позиция W_1, и он назовет свой цвет, правильно предполагая, что находится в шаре S.

Аналогично, все оставшиеся мудрецы разобьются на пары, в каждой из которых один из мудрецов угадает свой цвет.

Итак, решение найдено. Как его упростить?

Как мы помним, оптимальная стратегия в первом испытании заключалась в том, что мудрецы вставали в круг и каждый мудрец называл цвет, не совпадающий с цветом колпака его соседа слева. Попробуем обобщить эту стратегию. Будем искать решение следующего вида.

Пусть выбрано некоторое число k, $0 < k < n$, и k различных чисел $0 < i_1 < \ldots < i_k < n$. Мудрецы становятся в круг, и каждый мудрец подсчитывает число черных колпаков у k мудрецов на расстояниях $i_1, \ldots, i_k$ справа от него. Если это число четно, мудрец называет черный цвет, иначе он называет белый цвет.

Будем называть такую стратегию мудрецов *циклической стратегией*.

Сопоставим циклической стратегии набор h длины n, в котором в позициях $0, i_1, \ldots, i_k$ стоят единицы, а в остальных позициях стоят нули. Этот набор можно записать и в виде многочлена: $h(x) = 1 + x^{i_1} + \ldots + x^{i_k}$.

Пусть цвета колпаков, доставшихся мудрецам, заданы набором $v = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$. Пусть мудрецы встали в круг в порядке номеров по часовой стрелке. Какой цвет должен назвать мудрец с индексом i, если он использует циклическую стратегию $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})$?

По определению циклической стратегии, i-й мудрец должен подсчитать сумму элементов в наборе v, соответствующих единицам в наборе h при обходе набора v против часовой стрелки:

$$v_{i-1} \cdot h_1 + v_{i-2} \cdot h_2 + \ldots + v_{i+1} \cdot h_{n-1}.$$

Если эта сумма равна нулю, мудрец называет единицу (черный цвет), в противном случае он называет ноль (белый цвет). Таким образом, цвет, названный i-м мудрецом, можно записать как

$$v_{i-1} \cdot h_1 + v_{i-2} \cdot h_2 + \ldots + v_{i+1} \cdot h_{n-1} + 1.$$

Справедлива следующая удивительная теорема.

Теорема 2. *Пусть $h(x)$ – многочлен, соответствующий некоторой циклической стратегии мудрецов, а $v(x)$ – многочлен, соответствующий некоторому набору колпаков. Тогда многочлен $v(x) \cdot h(x) \left(\operatorname{mod}\left(x^n + 1\right)\right)$ задает позиции мудрецов, угадавших цвета своих колпаков.*

Доказательство. Запишем:

$$v(x) \cdot h(x) \left(\operatorname{mod}\left(x^n + 1\right)\right) =$$
$$= \left(v_0 + v_1 \cdot h_{n-1} + \ldots + v_{n-1} \cdot h_1\right) +$$
$$+ \left(v_1 + v_2 \cdot h_{n-1} + \ldots + v_0 \cdot h_1\right) \cdot x + \ldots$$
$$\ldots + \left(v_{n-1} + v_0 \cdot h_{n-1} + \ldots + v_{n-2} \cdot h_1\right) \cdot x^{n-1}.$$

Цвет, который назовет первый мудрец, задается выражением $v_1 \cdot h_{n-1} + \ldots + v_{n-1} \cdot h_1 + 1$. Таким образом, первый мудрец угадает свой цвет, если $v_0 = v_1 \cdot h_{n-1} + \ldots + v_{n-1} \cdot h_1 + 1$, или, что то же самое, если

$$v_0 + v_1 \cdot h_{n-1} + \ldots + v_{n-1} \cdot h_1 = 1.$$

Аналогично можно убедиться в истинности теоремы для других мудрецов.

Заметим, что выбранный нами кодовый многочлен $g(x) = 1 + x + x^3$ делит без остатка $x^7 + 1$. Что произойдет, если мудрецы используют циклическую стратегию, где

$$h(x) =$$
$$= \left(x^7 + 1\right) / g(x) = \left(x^7 + 1\right) / \left(1 + x + x^3\right) =$$
$$= 1 + x + x^2 + x^4 \,?$$

Если набор колпаков $v(x)$ принадлежит кодовому множеству, то

$$v(x) \cdot h(x) \left(\operatorname{mod}\left(x^n + 1\right)\right) =$$
$$= a(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \left(\operatorname{mod}\left(x^n + 1\right)\right) = 0,$$

таким образом, никто из мудрецов не угадает цвет своего колпака.

Если $v(x)$ не принадлежит кодовому множеству, то, как мы установили выше, $v(x)$ находится на расстоянии 1 от некоторого кодового слова $u(x)$. Тогда

$$\left(u(x) + x^k\right) \cdot h(x) \left(\operatorname{mod}\left(x^n + 1\right)\right) =$$
$$= \left(a(x) \cdot g(x) \cdot h(x) +\right.$$
$$\left.+ x^k \cdot h(x)\right) \left(\operatorname{mod}\left(x^n + 1\right)\right) =$$
$$= \left(x^k \cdot h(x)\right) \left(\operatorname{mod}\left(x^n + 1\right)\right).$$

Это циклический сдвиг многочлена $h(x)$. Следовательно, по теореме 2 число мудрецов, которые угадают цвета своих колпаков, равно числу единиц в многочлене $h(x)$, т.е. равно 4. Таким образом, для любого набора колпаков, не принадлежащего кодовому множеству, большинство мудрецов угадает цвета своих колпаков.

Словесная формулировка этой стратегии: *если число черных колпаков у мудрецов, стоящих на расстояниях 1, 2, 4 от меня по часовой стрелке, четно, то следует назвать черный цвет, иначе – белый.*

Испытание 3. Восемь из пятнадцати. О свойствах порождающего многочлена

На третий день царь приказал привести к нему 15 мудрецов и объявил, что сегодня состоится последнее испытание.

Как и в предыдущие дни, каждому мудрецу на голову наденут колпак белого либо черного цвета, после чего каждый мудрец должен записать, какого цвета по его мнению колпак на его голове. Если хотя бы восемь мудрецов ответят правильно, всех наградят, если же хотя бы восемь ошибутся, всех казнят.

Как следует действовать мудрецам, чтобы свести вероятность казни к минимуму?

Опять начнем с нижней оценки вероятности казни. Докажем, что не существует способа, позволяющего сделать вероятность выигрыша больше чем $15/16$. Доказательство аналогично предыдущим.

Пусть мудрецам удалось разработать метод, позволяющий восьми мудрецам из пятнадцати угадывать цвета своих колпаков в среднем чаще, чем в пятнадцати играх из шестнадцати. Таким образом, из 240 ответов мудрецов, прозвучавших в течение шестнадцати игр, в среднем более 120 ответов будут верными ($120 = 15 \cdot 8$). Но это невозможно, так как каждый мудрец угадывает цвет своего колпака в одном случае из двух, а значит, из 240 ответов в среднем ровно 120 ответов верны.

Всего существует 2^{15} различных наборов колпаков. Заметим, что 15-мерный шар покрывает 16 точек 15-мерного куба, таким образом, для покрытия всех 2^{15} точек куба потребуется $2^{15}/16 = 2048$ шаров. Итак, кодовое множество включает 2048 наборов. Выписывать все эти наборы было бы слишком долго. Докажем три теоремы, которые помогут нам избавиться от выписывания 2048 наборов.

Теорема 3.1. *Пусть $g(x)$ делит $x^n + 1$. Тогда циклический сдвиг любого кодового набора также является кодовым набором.*

Доказательство. Пусть $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1})$ – кодовый набор. Обозначим через v' набор, полученный циклическим сдвигом v на одну позицию вправо:

$$v' = (v_{n-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{n-3}, v_{n-2}) =$$
$$= v_{n-1} + v_0 \cdot x + v_1 \cdot x^2 + \ldots$$
$$\ldots + v_{n-3} \cdot x^{n-2} \cdot x^{n-1} =$$
$$= v_{n-1} + x \cdot v(x) + v_{n-1} \cdot x^n =$$
$$= x \cdot v(x) + v_{n-1} \cdot \left(x^n + 1\right) =$$
$$= x \cdot a(x) \cdot g(x) + v_{n-1} \cdot b(x) \cdot g(x) =$$
$$= \left(x \cdot a(x) + v_{n-1} \cdot b(x)\right) \cdot g(x).$$

Теорема 3.2. *Пусть $g(x)$ делит $x^n + 1$ и не делит ни один из многочленов $x^k + 1$, где $k < n$. Тогда расстояние между любыми кодовыми наборами не меньше чем 3.*

Доказательство. Пусть существуют два кодовых набора u и v, расстояние между которыми меньше трех. Рассмотрим сумму этих наборов $w = u + v$. Так как u и v отличаются не более чем в двух позициях, в w не более двух единиц. По теореме 1 $w(x)$ является кодовым набором, а по теореме 3.1 любой циклический сдвиг w также является кодовым набором. Рассмотрим кодовый набор s – циклический сдвиг w, где единица стоит в позиции 0. Если в s всего одна единица, то, очевидно, $s = 1$ не может быть кодовым словом. Если же в s две единицы, то $s = x^k + 1$ для некоторого $k < n$. Однако, по условию, $g(x)$ не делит ни один из многочленов $x^k + 1$. Пришли к противоречию.

Теорема 3.3. *Пусть $g(x)$ делит $x^n + 1$. Пусть стратегия мудрецов определяется многочленом $h(x) = \left(x^n + 1\right)/g(x)$. Тогда:*

1) для любого набора колпаков из кодового множества ни один из мудрецов не угадает цвет своего колпака;

2) для любого набора колпаков на расстоянии 1 от кодового множества число мудрецов, угадавших цвет своих колпа-

ков, равно числу единиц в многочлене $h(x)$.

Доказательство. Если набор колпаков $v(x)$ принадлежит кодовому множеству, то

$$v(x)\cdot h(x)\left(\operatorname{mod}\left(x^n+1\right)\right)=$$
$$=a(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\left(\operatorname{mod}\left(x^n+1\right)\right)=$$
$$=a(x)\cdot\left(x^n+1\right)\left(\operatorname{mod}\left(x^n+1\right)\right)=0,$$

таким образом, никто из мудрецов не угадает цвет своего колпака.

Если $v(x)$ находится на расстоянии 1 от некоторого кодового слова $u(x)$, то

$$\left(u(x)+x^k\right)\cdot h(x)\left(\operatorname{mod}\left(x^n+1\right)\right)=$$
$$=\left(a(x)\cdot g(x)\cdot h(x)+\right.$$
$$\left.+x^k\cdot h(x)\right)\left(\operatorname{mod}\left(x^n+1\right)\right)=$$
$$=\left(x^k\cdot h(x)\right)\left(\operatorname{mod}\left(x^n+1\right)\right).$$

Это циклический сдвиг многочлена $h(x)$. Следовательно, по теореме 2 число мудрецов, которые угадают цвета своих колпаков, равно числу единиц в многочлене $h(x)$.

Теперь можно приступить к построению оптимальной стратегии для 15 мудрецов.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что для генерации кодового множества нужен многочлен, который делит $x^{15}+1$. Разложим многочлен $x^{15}+1$ на множители:

$$x^{15}+1=$$
$$=\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\cdot\left(1+x^3+x^4\right)\times$$
$$\times\left(1+x+x^4\right)\cdot\left(1+x+x^2\right)\cdot(1+x).$$

В кодовом множестве, которое мы хотим построить, должно быть 2048 элементов, поэтому по лемме для генерации кодового множества нужен многочлен четвертой степени.

В разложении $x^{15}+1$ три многочлена четвертой степени:

1) $1+x+x^2+x^3+x^4$;

2) $1+x+x^4$;

3) $1+x^3+x^4$.

Многочлен $1+x+x^2+x^3+x^4$ нам не подходит, так как он делит x^5+1, а значит, не выполняются условия теоремы 3.2. Но зато для любого из оставшихся двух многочленов условия теоремы 3.2 выполнены (оставляем проверку этого в качестве задания читателю).

Выберем для генерации кодового множества многочлен $1+x+x^4$. В соответствии с теоремой 3.3 выберем стратегию мудрецов, соответствующую многочлену $\left(x^n+1\right)/g(x)$. Имеем:

$$\left(x^{15}+1\right)/\left(x^4+x+1\right)=$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^5+x^7+x^8+x^{11}.$$

В этом многочлене 8 единиц, следовательно, по теореме 3.3 для каждого набора колпаков, не входящего в кодовое множество, 8 мудрецов из 15 угадают цвета своих колпаков.

Итак, стратегия, позволяющая 15 мудрецам выиграть с вероятностью 15/16, определяется многочленом $1+x+x^2+x^3+x^5+x^7+x^8+x^{11}$. Словесная формулировка этой стратегии: *если число черных колпаков у мудрецов, стоящих на расстояниях 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11 от меня по часовой стрелке, четно, то следует назвать черный цвет, иначе – белый.*

Заключение. О помехоустойчивом кодировании и кодах Хэмминга

Возможно, вдумчивый читатель уже давно задается вопросом: являются ли конечные поля, кодовые множества и порождающие многочлены абстрактной теорией, которая использовалась лишь мудрецами царя Шахрияра, или же эти понятия имеют и иное применение? Пришло время ответить на этот вопрос. Теория, которая помогла мудрецам, повсеместно используется в современных системах хранения и передачи информации. Одно из важнейших приложений этой теории – это *помехоустойчивое кодирование*. Проиллюстрируем задачу помехоустойчивого кодирования на простом примере.

Пусть мудрец Азат, живущий в пункте А, должен передать сообщение, состоящее из нулей и единиц, мудрецу Бахиру, живущему в пункте Б. Известно, что в процессе передачи один из символов сообщения может быть искажен помехами, т.е. один из нулей может превратиться в единицу либо одна из единиц может стать нулем. Существует ли способ закодировать сообщение таким образом, чтобы, даже несмотря на воздействие помех, исходное сообщение могло бы быть безошибочно восстановлено в пункте Б?

Конечно, Азат может просто трижды продублировать сообщение. Если одна из копий окажется испорченной помехами, то сообщение можно восстановить по двум другим копиям. Однако передача трех копий сообщения может быть слишком долгой и дорогой. Кроме того, может оказаться, что в столь длинной передаче помехи могут повлиять более чем на один символ. Есть ли более эффективный способ кодирования?

Оказывается, такой способ существует, и нам уже известна вся теория, необходимая для его реализации. Этот метод называется *кодированием Хэмминга* в честь его изобретателя, американского математика Ричарда Хэмминга.

Азат и Бахир выбирают многочлен $g(x)$ (*порождающий* многочлен), удовлетворяющий условиям теоремы 3.2, и вместо исходного сообщения $a(x)$ Азат передает из пункта А в пункт Б сообщение $u(x) = a(x) \cdot g(x)$. Теперь Бахир должен декодировать полученное сообщение $v(x)$, один из символов которого, возможно, искажен.

Для начала Бахир вычисляет *синдром* полученного сообщения

$$s(x) = v(x) \cdot h(x) \left(\mathrm{mod}\left(x^n + 1\right)\right).$$

Если сообщение не было изменено помехами, то

$$s(x) = v(x) \cdot h(x) \left(\mathrm{mod}\left(x^n + 1\right)\right) =$$
$$= a(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \left(\mathrm{mod}\left(x^n + 1\right)\right) =$$
$$= a(x) \cdot \left(x^n + 1\right) \left(\mathrm{mod}\left(x^n + 1\right)\right) = 0 .$$

Предположим теперь, что в переданном сообщении символ с индексом k был изменен. Тогда

$$s(x) = \left(u(x) + x^k\right) \cdot h(x) \left(\mathrm{mod}\left(x^n + 1\right)\right) =$$
$$= \left(a(x) \cdot g(x) \cdot h(x) +\right.$$
$$\left. + x^k \cdot h(x)\right) \left(\mathrm{mod}\left(x^n + 1\right)\right) =$$
$$= \left(x^k \cdot h(x)\right) \left(\mathrm{mod}\left(x^n + 1\right)\right).$$

Это циклический сдвиг многочлена $h(x)$ на k позиций.

Если синдром равен нулю, то Бахир знает, что переданное сообщение не было искажено, а значит, можно восстановить исходное сообщение по формуле

$$a(x) = v(x)/g(x).$$

Если же синдром представляет собой циклический сдвиг $h(x)$ на k позиций, то Бахир знает, что в переданном сообщении был испорчен символ с индексом k, а значит, исходное сообщение восстанавливается по формуле

$$a(x) = \left(v(x) + x^k\right) / g(x).$$

Численные значения: зачем и почему они нужны

(Начало см. на с. 2)

разного рода жуликов и от недобросовестной рекламы. Любим же мы численные оценки, как и вообще знание, именно потому, что знание помогает выживанию и при правильном его применении улучшает жизнь. Это все хорошо, а что делать сейчас? Ответ прост – взять учебник физики (за все классы) и, медленно листая его, про каждую встреченную величину подумать, какие ее значения встречаются в жизни, какие могут встретиться в задачах. Интернет поможет вам найти ответы, а глядишь, и статью для «Кванта» напишите. А еще полезно посмотреть статьи А.А.Лукьянова про численные оценки – в интернете спросите «Лукьянов» и «в числах».

И последнее. Все ответы, приведенные в этой статье, реальные. Диалог в эпиграфе – тоже. Правда, тут же выяснилось, что собеседник шутил. А вот школьники, когда писали все эти ужасы, отнюдь не шутили.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2556 и М2557 предлагались на XI Международной олимпиаде Romanian Master in Mathematics.

Задачи М2554–М2557, Ф2561–Ф2564

М2554. Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке C и касаются внутренним образом окружности Ω в точках A и B (рис.1). Прямая AB

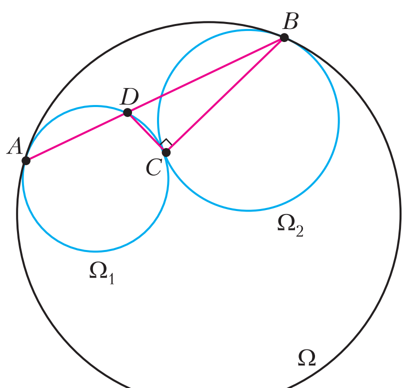


Рис. 1

вторично пересекает окружность Ω_1 в точке D. Докажите, что $\angle BCD = 90°$.

В.Расторгуев

М2555. В каждую клетку таблицы 2019×2019 записали число 1 или −1. Докажите, что для некоторого натурального k можно выделить k строк и k столбцов так, чтобы модуль суммы k^2 чисел в клетках на пересечении выделенных строк и столбцов был больше 1000.

Фольклор

М2556. Аня и Боря играют в такую игру. Вначале Аня пишет на доске целое положительное число. Затем игроки делают ходы по очереди. Боря ходит первым. Каждым своим ходом Боря выбирает целое положительное число b и заменяет записанное на доске число n на число $n - b^2$. Каждым своим ходом Аня выбирает целое положительное число k и заменяет записанное на доске число n на число n^k. Боря выигрывает, если число, записанное на доске, когда-нибудь станет равным нулю. Сможет ли Аня помешать Боре выиграть?

М.Дидин

М2557*. Дано положительное число ε. Докажите, что существует натуральное N такое, что при любом натуральном $n \ge N$ верно следующее утверждение: в любом графе на n вершинах, у которого количество ребер не менее $(1+\varepsilon)n$, найдутся два различных простых цикла одинаковой длины.

Ф.Петров

Ф2561. В одной из моделей расширяющейся Вселенной радиус Вселенной изменяется со скоростью, которая зависит от времени t и текущего значения $r(t)$ по формуле $v(t) = v_0 \dfrac{R^2}{r^2(t)}\left(1 - \dfrac{t}{t_0}\right)$, где t –

время, отсчитываемое от настоящего момента времени, когда радиус Вселенной равен R. Найдите время, через которое произойдет коллапс, т.е. сжатие в точку, в такой модели Вселенной, считая R, v_0 и t_0 известными.

А.Иванов

Ф2562. Удельная теплота плавления снега, состоящего из плоских снежинок со средним диаметром $D = 5$ мм и средней массой $m = 0{,}004$ г, равна $L_с = 0{,}26$ МДж/кг, а удельная теплота плавления сплошного льда равна $L_л = 0{,}33$ МДж/кг. Если смотреть на снежинку, держа ее перед собой так, что она выглядит фигурой с шестилучевой симметрией (рис.2), то почти вся ее площадь закрыта ледяными кристаллами. Оцените минимальную работу внешних сил, которая необходима, чтобы расколоть кусок льда в форме куба с ребром 1 м на маленькие кубики с ребром 1 см.

Рис. 2

А.Айсберг

Ф2563. Все параметры, отмеченные на схеме электрической цепи (рис.3), известны. Иными словами, известны ЭДС батареи, ее внутреннее сопротивление, сопротивления резисторов и емкости конденсаторов. До замыкания ключа заряды всех пластин конденсаторов равны нулю. Каким будет заряд на пластине конденсатора, подключенной к точке 3, через большое время после замыкания ключа?

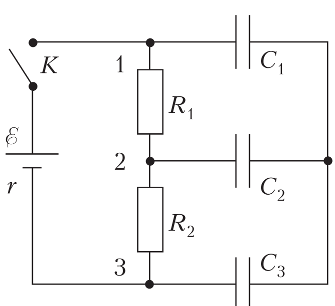


Рис. 3

А.Исагулов

Ф2564. В однородном горизонтальном магнитном поле B в вертикальной плоскости находится закрепленная жесткая металлическая проволока, имеющая форму части окружности радиусом R (рис.4). Вдоль проволоки может без трения, но с обеспечением хорошего электрического контакта скользить маленькая по размерам металлическая шайба массой m. Шайба соединена с одним из выводов катушки индуктивностью L, находящимся в центре O проволочной окружности, тонким гибким и легким проводником, который всегда находится в почти выпрямленном положении. Второй вывод катушки соединен с изогнутой жесткой проволокой. Электрическим сопротивлением всех элементов конструкции можно пренебречь. Также можно пренебречь индуктивностью изогнутой проволоки, по которой скользит шайба, в сравнении с величиной L. В начальный момент шайба находится чуть правее самой верхней точки, ее скорость равна нулю и ток в проводах равен нулю. В тот момент, когда шайба оказывается в самой нижней точке, ее скорость становится равной нулю. С какой скоростью v и с каким ускорением a движется шайба в тот момент, когда она находится на уровне центра окружности O? Какой ток I течет в этот момент по проводам?

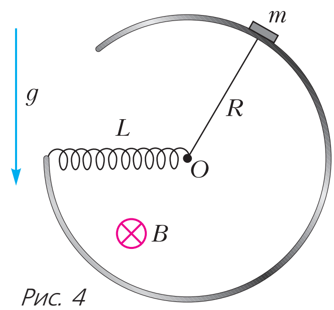


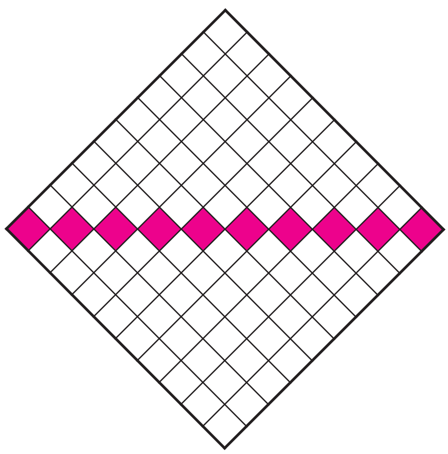
Рис. 4

С.Дмитриев

Решения задач М2542–М2545, Ф2549–Ф2552

М2542. *Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из клетки нижней строки перелететь в некоторую клетку верхней строки, а из клетки крайнего правого столбца перелететь в некоторую клетку крайнего левого столбца. Докажите, что кузнечику понадобится не менее 9 перелетов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.*

Для удобства повернем квадрат на $45°$ так, чтобы кузнечик прыгал по диагонали вниз-влево или вниз-вправо (см. рисунок). Таким образом, если кузнечик не совершает перелета, то за каждый прыжок



он смещается вниз. Покрасим красным 10 клеток, лежащих на «горизонтальной» диагонали квадрата. Кузнечик не сможет попасть из одной красной клетки в другую, не совершив перелета. Значит, перелетов было хотя бы 9, что и требовалось доказать. Задача решена.

Заметим, что между клетками квадрата можно установить отношение *частичного порядка*, считая, что кузнечик из *большей* клетки всегда переходит в *меньшую*. Тогда красная диагональ, которую мы использовали в решении, – это *максимальная антицепь*. Общие факты и теоремы на этот счет читатель может найти в статье А.Спивака «Цепи и антицепи» («Квант» №5 за 2003 г.).

П.Кожевников

М2543. *В десятичной записи чисел A и B по 2019 цифр. В числе A ровно 12 цифр отличны от нуля: пять самых левых и семь самых правых. В числе B ровно 14 цифр отличны от нуля: пять самых левых и девять самых правых. Докажите, что в десятичной записи наибольшего общего делителя A и B не более 14 цифр.*

Из условия следует, что данные числа можно представить в виде $A = a_1 + 10^{2013}a_2$, $B = b_1 + 10^{2013}b_2$, где в десятичной записи чисел a_2 и b_2 по пять цифр, а в a_1 и b_1 семь и девять цифр соответственно. Пусть A и B делятся на некоторое натуральное число d. Тогда на d делится и число $a_2B - b_2A = a_2b_1 - a_1b_2$. Заметим, что $a_2b_1 > 10^{4+8} = 10^{5+7} > a_1b_2$, поэтому $a_2b_1 - a_1b_2$ больше нуля, но $a_2b_1 - a_1b_2 < a_2b_1 < 10^{5+9} = 10^{14}$, т.е. не более чем 14-значное число делится на d, а значит, и d не более чем 14-значное.

Л.Самойлов

М2544. *Пусть*
$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$
– многочлен степени n, имеющий n корней, лежащих на интервале $(0;1)$. Докажите, что для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$(-1)^k(a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) > 0.$$

Докажем наше утверждение индукцией по n. При $n = 1$ имеем линейный многочлен $x + a_1$, у которого корень больше 0. Тогда $-a_1 > 0$, что нам и нужно установить.
Сделаем переход индукции. Докажем наше утверждение для многочлена

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

степени $n \geq 2$, где

$$P(x) = (x - t_1)(x - t_2)\ldots(x - t_n),$$
$$t_i \in (0;1)$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$, предполагая утверждение верным для многочлена

$$Q(x) = (x - t_2)(x - t_3)\ldots(x - t_n).$$

Таким образом, мы предполагаем, что для

$$Q(x) = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

верны неравенства

$$(-1)^k (b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{n-1}) > 0 \quad \text{для } k = 1,2,\ldots,n-1.$$

Положим $t = t_1$; в равенстве

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x-t)\left(x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}\right)$$

приравняем соответствующие коэффициенты и выразим a_i через b_j.

При $k = n$ имеем

$$(-1)^n a_n = (-1)^n(-tb_{n-1}) = (-1)^{n-1} b_{n-1}t > 0.$$

Пусть $1 < k < n$. Тогда

$$(-1)^k (a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) = (-1)^k \left((b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{n-1}) - t(b_{k-1} + b_k + \ldots + b_{n-1})\right) = (-1)^k (b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{n-1}) + (-1)^{k-1}(b_{k-1} + b_k + \ldots + b_{n-1})t,$$

что больше нуля (так как оба слагаемых больше 0).

Наконец, пусть $k = 1$. Тогда

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) + t(1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}).$$

Слагаемое $-(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1})$ больше 0 (по предположению индукции). Покажем, что второе слагаемое тоже больше 0. Заметим, что $1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = Q(1)$. На промежутке $(1;\infty)$ значение многочлена $Q(x)$ не меняет знак, поскольку все его корни меньше 1. Но $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$. Это можно установить, например, используя равенство

$$Q(x) = x^n\left(1 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}\right).$$

Поэтому $Q(1) > 0$, что нам и требовалось.

Н.Сафаэи

M2545. *На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC соответственно взяты точки N, K и L так, что $AL = BK$, а CN – биссектриса угла ACB (рис.1). Отрезки AK и BL пересекаются в точке P.*

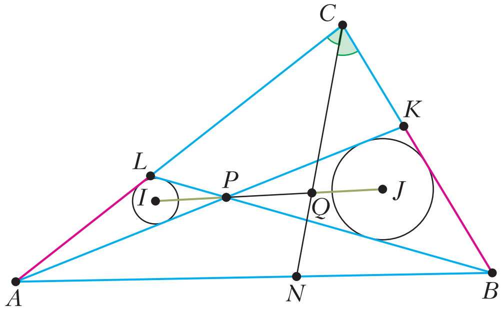


Рис. 1

Обозначим через I и J центры вписанных окружностей треугольников APL и BPK соответственно. Пусть Q – точка пересечения прямых CN и IJ. Докажите, что $IP = JQ$.

Если $CA = CB$, то задача очевидна. Если $CA \neq CB$, то без потери общности можем предположить, что CN пересекает отрезок PK (рис.2).

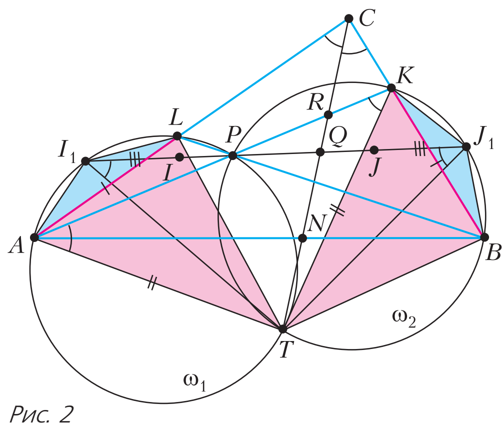


Рис. 2

Пусть описанные окружности ω_1 и ω_2 треугольников APL и BPK соответственно во второй раз пересеклись в точке T. Тогда

$$\angle LAT = \angle TPB = \angle TKB \qquad (1)$$

и $\angle ALT = \angle APT = \angle TBK$, т.е. $\Delta ALT = \Delta KBT$, откуда

$$AT = TK. \qquad (2)$$

Из (1) также следует, что четырехугольник $ACKT$ вписанный, а из (2) – что $\angle ACT = \angle TCK$, т.е. T лежит на биссектрисе CN.

Пусть IJ пересекает ω_1 и ω_2 в точках I_1 и J_1 соответственно. Так как радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны и $AL = BK$, равны и треугольники ALI_1 и BKJ_1. Воспользуемся леммой Мансиона (также называемой леммой о трезубце): *середина дуги XY окружности, описанной около треугольника XYZ, находится на равных расстояниях от концов этой дуги и центра вписанной окружности этого треугольника*. По этой лемме $I_1I = I_1L = J_1K = J_1J$. Кроме того, $\angle PI_1T = \angle PAT = \angle PKT = \angle PJ_1T$, следовательно, $I_1T = J_1T$. Таким образом, T лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку I_1J_1, и на серединном перпендикуляре к отрезку IJ.

Осталось доказать, что T лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PQ. Пусть $R = AK \cap CT$. Тогда

$$\angle PRT = \angle ART = \angle RAC + \angle ACR = \angle RAC + \angle AKT = \angle RAC + \angle KAT = \angle LAT = \angle BPT .$$

Так как PQ делит угол RPB пополам,

$$\angle PQT = \angle PRT + \angle RPQ = \angle BPT + \angle RPQ = \angle BPT + \angle QPB = \angle QPT ,$$

следовательно, T лежит на серединном перпендикуляре отрезка PQ. Поэтому $IP = JQ$. Задача решена.

В качестве добавления укажем один из возможных вычислительных подходов к решению. Построим на отрезке IJ точку Q', симметричную точке P относительно середины этого отрезка. Достаточно доказать, что Q' лежит на биссектрисе угла C, т.е. равноудалена от прямых AB и AC.

В треугольниках APL и BPK равны стороны AL и BK и противолежащие этим сторонам углы. Пусть радиусы вписанных окружностей равны r_1 и r_2 соответственно, а высоты, проведенные из P, равны h_1 и h_2. Используя соотношение $IP/JP = r_1/r_2$, можно записать соотношение на расстояние d_2 от точки I до прямой BC: $\frac{d_2 - h_2}{h_2 - r_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Расстояние t_2 от Q' до прямой BC теперь можно найти, исходя из равенства $r_2 + d_2 = h_2 + t_2$. Проделав аналогичные действия, можно выразить расстояние t_1 от Q' до прямой AC и понять, что $t_1 = t_2$.

М.Кунгожин

Ф2549. *Ракета неудачно стартовала с поверхности Луны. Она двигалась с постоянным ускорением $a = 10$ м/с^2 строго вертикально в течение $t = 200$ с, а затем двигатели перестали работать. На какое максимальное расстояние s от поверхности Луны удалится ракета? Радиус Луны $R_Л \approx 2{,}5$ тыс.км, ускорение свободного падения вблизи поверхности Луны $g_Л \approx 1{,}6$ м/с^2.*

Скорость, которую приобрела ракета к моменту выключения двигателей, направлена вертикально вверх и равна $v_0 = at = 2$ км/с. При этом ракета удалилась от поверхности Луны на расстояние $L = at^2/2 = 200$ км $\ll R_Л$. Первая космическая скорость для Луны равна $v_1 = \sqrt{g_Л R_Л} = 2$ км/с $= v_0$. А вторая космическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше, т.е. $v_2 \approx 2{,}83$ км/с. Отсюда следует, что ракета обязательно вернется на поверхность Луны. Удар о поверхность будет таким, что ракета, конечно, разрушится. Но в задаче спрашивается о максимальном удалении ракеты от поверхности Луны. Во время полета с неработающим двигателем механическая энергия ракеты – сумма потенциальной энергии взаимодействия с Луной и кинетической энергии движения по отношению к Луне – сохраняется. Потенциальная энергия в момент выключения двигателей, отсчитываемая от положения, когда взаимодействующие тела находятся на очень большом (бесконечном) расстоянии друг от друга, отрицательна и равна $-Mg_Л R_Л^2/(L + R_Л)$, где M – масса ракеты. Максимальное расстояние s, на которое ракета с неработающим двигателем сможет удалиться от поверхности Луны, найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2} - Mg_{Л}\frac{R_{Л}^2}{L+R_{Л}} = -Mg_{Л}\frac{R_{Л}^2}{s+R_{Л}},$$

$$\frac{g_{Л}R_{Л}}{2} - \frac{g_{Л}R_{Л}^2}{L+R_{Л}} = -\frac{g_{Л}R_{Л}^2}{s+R_{Л}},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{R_{Л}}{L+R_{Л}} = -\frac{R_{Л}}{s+R_{Л}},$$

$$s = 3369{,}56 \text{ км}.$$

Д.Мороз

Ф2550. *Не поджатая однородная пружина имеет длину L, которая много больше диаметра D ее витков. Диаметр D, в свою очередь, много больше диаметра проволоки, из которой сделана пружина. Эта пружина имеет жесткость на растяжение (или сжатие) k. Однако растягиваться такая пружина не может, так как внутрь нее помещена нерастяжимая гибкая нить, а вот изгибаться может. Пружину изогнули так, что ее концевые витки соприкоснулись, т. е. пружину свернули в кольцо. Какую работу пришлось совершить для этого?*

На рисунке 1 начальная форма пружины показана красным цветом, а промежуточные формы и конечная форма показаны

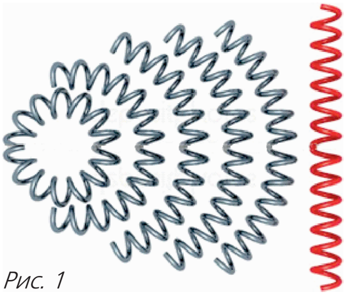


Рис. 1

серым цветом. В качестве модельного описания механических свойств пружины будем считать, что ее жесткость равномерно распределена по «стенкам», образованным ее витками. Если в промежуточном состоянии осевая линия пружины образовала часть окружности радиусом R, то угловой размер этой части окружности $\varphi = L/R$. Понятно, что в конечном положении $\varphi_{кон} = 2\pi$.

На рисунке 2 показан тор, которым моделируется пружина, и сечение тора плоскостью, проходящей через его ось симметрии. Наибольшее удлинение имеет место для участков поверхности тора, которые в наибольшей степени удалены от его оси симметрии. Точки, принадлежащие этим наиболее растянутым участкам, отмечены на рисунке стрелками красного цвета. А наибольшее сжатие испытывают, соответственно, участки поверхности, находящиеся на наименьшем расстоянии от оси симметрии тора. Величина деформации пропорциональна синусу угла α, отсчитываемого от недеформированного кусочка вдоль стенки по направлению, перпендикулярному осевой линии. Небольшой по углу $\Delta\alpha$ участок пружины имеет жесткость на удлинение $k' = k\Delta\alpha/(2\pi)$. Удлинение этого участка равно $\varphi(D/2)\sin\alpha$. Тогда потенциальная энергия деформации пружины равна

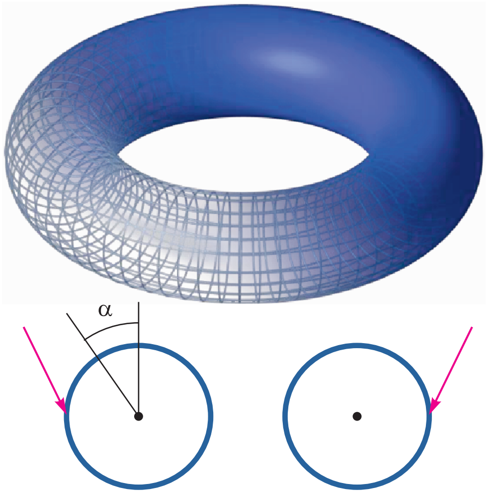


Рис. 2

$$\frac{k\varphi^2}{4\pi}\left(\frac{D}{2}\right)^2\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\cdot d\alpha = \frac{k}{4}\left(\frac{\varphi D}{2}\right)^2.$$

Пружину свернули в кольцо, поэтому $\varphi = 2\pi$. Совершенная работа равна, соответственно,

$$A = k\frac{(\pi D)^2}{4}.$$

Н.Год

Ф2551. *Коэффициент трения шайбы о плоскую поверхность равен μ. Эту по-*

верхность расположили так, что она образует с горизонталью угол α*, для которого* $\operatorname{tg}\alpha = \mu$*, и закрепили. Шайбу, масса которой m, толкнули так, что все ее точки приобрели одинаковую начальную скорость* v_0*, направленную вдоль наклонной поверхности, причем угол* φ_0 *между направлением начальной скорости и направлением наискорейшего спуска по поверхности такой, что* $\cos\varphi_0 = -0{,}5$*. В тот момент, когда угол* φ_1 *между направлением скорости движения шайбы и направлением наискорейшего спуска стал таким, что* $\cos\varphi_1 = +0{,}5$*, шайба оказалась на том же горизонтальном уровне, что и в момент старта. Какое количество теплоты Q выделилось за счет трения между шайбой и поверхностью к этому моменту? Какова длина L пути, который к этому моменту прошла шайба? Какой будет установившаяся через большое время скорость v движения шайбы?*

В ситуации, когда $\operatorname{tg}\alpha = \mu$, между скоростью шайбы v и углом φ, который образует эта скорость с направлением наискорейшего спуска, имеется соотношение, выполняющееся в любой момент времени:

$$v_1\left(1+\cos\varphi_1\right) = v_0\left(1+\cos\varphi_0\right).$$

Это соотношение легко доказывается с помощью второго закона Ньютона, примененного к проекции скорости шайбы на направление наискорейшего спуска, и к проекции скорости шайбы на текущее направление самой скорости.

Скорость, с которой шайба будет двигаться через большой промежуток времени, направлена вдоль направления наискорейшего спуска, т.е.

$$v_\infty\left(1+\cos 0\right) = v_0\left(1+\cos\varphi_0\right).$$

Следовательно, установившееся значение скорости равно

$$v_\infty = \frac{v_0}{4}.$$

Поскольку шайба в начальный момент и во второй момент времени, указанный в условии задачи, находилась на одном и том же горизонтальном уровне, то закон сохранения энергии позволяет получить уравнения, в которые неизвестные величины количество теплоты Q и длина пути L входят составными частями. Уравнение для нахождения величины Q имеет вид

$$Q + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

По условию задачи $\cos\varphi_0 = -0{,}5$ и $\cos\varphi_1 = +0{,}5$, поэтому $v_1 = \frac{v_0}{3}$. Отсюда находим

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m\left(v_0/3\right)^2}{2} = \frac{4mv_0^2}{9}.$$

Уравнения, в которые входит длина L пройденного пути, таковы:

$$\int_0^T v\,dt = L,\quad \int_0^T v\cos\varphi\cdot dt = 0.$$

В первом соотношении подынтегральным выражением является модуль скорости шайбы, а во втором соотношении – проекция скорости шайбы на направление наискорейшего спуска. Работа силы тяжести к этому моменту равна нулю, так как шайба вернулась на тот же уровень по отношению к моменту старта. Изменение кинетической энергии шайбы равно суммарной работе всех действующих на шайбу сил, а это как раз отрицательная работа силы трения, которая действовала на шайбу со стороны наклонной поверхности:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\sin\alpha\cdot\int_0^T v\left(1-\cos\varphi\right)dt,$$

или

$$mg\sin\alpha\cdot\int_0^T\left(v - v\cos\varphi\right)dt + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении – это модуль скорости шайбы, и интеграл от этого слагаемого равен L. А второе слагаемое – это проекция скорости на направление наискорейшего спуска, и интеграл от этого выражения равен нулю. Отсюда получаем

$$mg\sin\alpha\cdot L + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2},$$

и

$$L = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g\sin\alpha} =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{4v_0^2\sqrt{\left(1+\mu^2\right)}}{9g\mu}.$$

С.Негурочка

Ф2552. *Струя воды с объемным расходом β $\left(м^3/с\right)$ падает на плоскую поверхность перпендикулярно ей. Перед соприкосновением с поверхностью вода движется со скоростью v. Уровень воды на поверхности на большом расстоянии от места падения струи равен H. Воду можно считать маловязкой. Как зависит радиус углубления R на поверхности воды от указанных в условии задачи параметров? При каком соотношении между параметрами углубление не возникает? На фотографии, найденной в интернете (http://*

staff.civil.uq.edu.au/h.chanson/pictures/eviergrnd.jpg), приведен пример такого явления.

Небольшая порция воды, разбегающейся от места падения струи на расстоянии $x < R$ от места падения, имеет ту же скорость движения, что и в момент падения, поскольку жидкость маловязкая. Толщина слоя воды h на таком расстоянии определяется расходом и скоростью, а расход равен произведению скорости воды в струе на сечение струи перед падением:

$$vS = \beta = v \cdot 2\pi hx.$$

Отсюда получаем

$$h = \frac{\beta}{2\pi vx}.$$

Если $x = R$, то в этом месте встречаются поток воды и скачок уровня воды на поверхности. На большом расстоянии $x > R$ от границы скачка в сторону от места падения струи расход воды остается тем же самым, но скорость движения становится совсем маленькой. Условия стационарности формы поверхности воды на участке, где встречается «быстрая» вода с «медленной», заключается в сохранении суммарного импульса в выделенной части объема, включающей в себя и «быструю» воду и «медленную»:

$$\Delta t \cdot LH \cdot \frac{\rho g H}{2} = \Delta t \cdot vLh\rho \cdot v =$$

$$= \Delta t \cdot vL\rho v\frac{\beta}{2\pi vR} = \frac{\Delta t \cdot vL\rho\beta}{2\pi R}.$$

Сокращая на одинаковые величины, получаем

$$H^2 g = \frac{v\beta}{\pi R}, \text{ или } R = \frac{v\beta}{\pi g H^2}.$$

Очевидно, что при условии $R^2 < S = \beta/v$ углубления с характерной формой не возникнет. Иными словами, характерное углубление не наблюдается при выполнении неравенства

$$\frac{\beta}{v} > \left(\frac{v\beta}{\pi g H^2}\right)^2, \text{ или } \beta v^3 < \left(\pi g H^2\right)^2.$$

П.Январский

Задачи

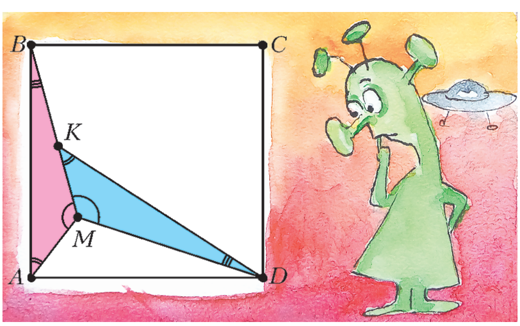
1. Ньют хочет перевезти девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 фунтов в трех чемоданах, по три твари в каждом. Каждый чемодан должен весить меньше 20 фунтов. Если вес какой-нибудь твари будет

делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. Как Ньюту распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался?

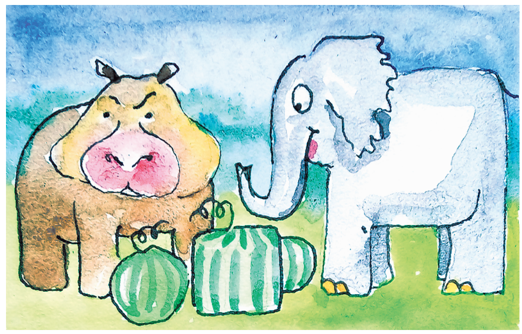
М.Евдокимов, И.Раскина

2. Два равных треугольника расположены внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите их углы.

Е.Бакаев



3. На завтрак группа из 5 слонов и 7 бегемотов съела 11 круглых и 20 кубических арбузов, а группа из 8 слонов и 4 бегемотов – 20 круглых и 8 кубических арбузов. Все слоны съели поровну (одно и то же целое число) арбузов. И все бегемоты съели поровну арбузов. Но один вид животных ест



и круглые и кубические арбузы, а другой вид привередливый и ест арбузы только одной из форм. Определите, какой вид (слоны или бегемоты) привередлив и какие арбузы он предпочитает.

М.Хачатурян

4. У Максима есть 9 квадратов и 19 равносторонних треугольников. Стороны всех квадратов и треугольников равны 1 см. Как ему сложить из них (не накладывая их друг на друга) многоугольник с периметром 15 см?

М.Волчкевич

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXX Математическом празднике.

Чем круг отличается от квадрата?

С.ВОЛЧЁНКОВ

С первого взгляда вопрос кажется странным. Каждый знает, и что такое круг, и что такое квадрат. И каждый знает, что это разные геометрические объекты. Но в этой статье речь пойдет не столько о геометрии, сколько о комбинаторной геометрии, где геометрические объекты рассматриваются с комбинаторной точки зрения – как элементы конечных множеств. Мы разберем три задачи, в которых круги и квадраты какими-то своими, на первый взгляд незначительными, различиями порождают различные ответы.

Задача 1 про круги. *На плоскости расположены 5 кругов, каждые два из которых имеют общую точку. Верно ли, что всегда найдутся 3 круга, имеющих общую точку?*

Ответ: верно.

Решение. Обозначим круги (и их центры) буквами O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 соответственно. Соединим центры друг с другом отрезками. Какие-то два из проведенных отрезков должны пересечься. Это известный факт (даже если точки пытаться соединять ломаными) – попробуйте доказать его самостоятельно или прочитайте в Приложении в конце статьи. Пусть отрезки O_1O_2 и O_3O_4 пересекаются в точке X (рис.1). Осталось доказать, что верна такая лемма.

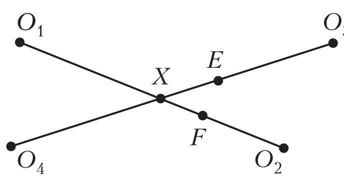


Рис. 1

Лемма. *Если есть две пары пересекающихся кругов (пара O_1, O_2 и пара O_3, O_4), причем отрезки, соединяющие их центры (O_1O_2 и O_3O_4), имеют общую точку (X), то какие-то три из этих четырех кругов имеют общую точку.*

Так как круги O_1 и O_2 пересекаются, на отрезке O_1O_2 есть точка F, принадлежащая им обоим. Аналогично, на отрезке O_3O_4 есть точка E, принадлежащая кругам O_3 и O_4. Пусть они расположены, как на рисунке 1, причем $XE \geq XF$ (остальные случаи аналогичны). Тогда $O_4E \geq O_4X + XF \geq O_4F$, т.е. точка F принадлежит кругам O_1, O_2 и O_4. Лемма доказана.

Задача 1 про квадраты. *На плоскости расположены 5 квадратов, каждые два из которых имеют общую точку. Верно ли, что всегда найдутся 3 квадрата, имеющих общую точку?*

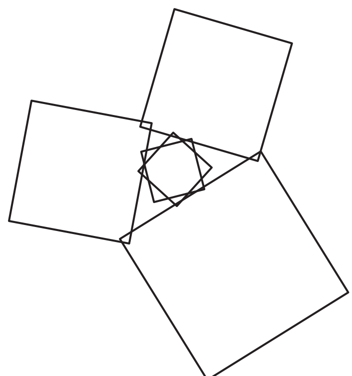


Рис. 2

Ответ: неверно. Контрпример изображен на рисунке 2.

Задача 2 про круги. *На плоскости расположены 3 красных и 3 синих круга, причем каждые два разноцветных круга имеют общую точку. Верно ли, что всегда найдутся два одноцветных круга, имеющих общую точку?*

Ответ: верно.

Решение. Соединим центры разноцветных кругов друг с другом отрезками. Какие-то два из проведенных отрезков долж-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190403

ны пересечься. Это тоже известный факт, часто называемый «три дома, три колодца» (докажите его самостоятельно или прочитайте в Приложении).Тогда, по лемме из задачи 1, какие-то три круга имеют общую точку. А среди этих трех найдутся два круга одного цвета, что и требовалось.

Задача 2 про квадраты. *На плоскости расположены 3 красных и 3 синих квадрата, причем каждые два разноцветных квадрата имеют общую точку. Верно ли, что всегда найдутся два одноцветных квадрата, имеющих общую* точку?

Ответ: неверно. Контрпример изображен на рисунке 3.

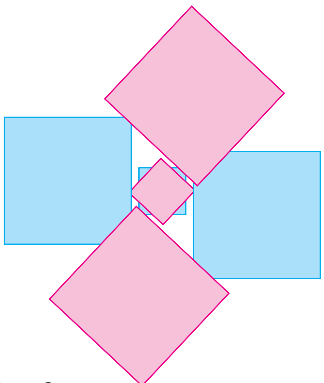


Рис. 3

Замечание. В задачах 1 и 2 квадраты можно заменить на другие многоугольники, в частности на правильные N-угольники, где N сколь угодно велико. При этом многоугольники становятся почти неотличимыми от кругов. Правда, рисунки 2 и 3 пришлось бы рассматривать под микроскопом, чтобы увидеть на них все пересечения.

Задача 3 про круги. *В выпуклом многоугольнике расположены N непересекающихся кругов. Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно один из кругов?*

Прежде чем переходить к решению этой задачи, рассмотрим более простую задачу.

Задача 3 про точки. *В выпуклом многоугольнике отмечены N точек (с номерами от 1 до N). Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно одну отмеченную точку?*

Ответ: верно.

Решение. Разобьем точки многоугольника на области с номерами от 1 до N по такому правилу: область с номером k состоит из точек, более близких к точке k, чем к любой другой отмеченной точке (такое разбиение называется *диаграммой Вороного*). При таком разбиении область с номером k ограничена серединными перпендикулярами отрезков, проведенных из точки k к остальным отмеченным точкам, т.е. является выпуклым многоугольником. Пример такой диаграммы приведен на рисунке 4.

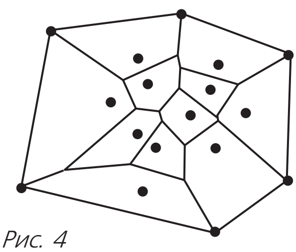


Рис. 4

А теперь вернемся к задаче 3 про круги. Оказывается, что нужное нам разбиение многоугольника может быть образовано не серединными перпендикулярами, а так называемыми радикальными осями окружностей.

Радикальная ось двух непересекающихся окружностей – это геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к двум данным окружностям, имеют равные длины. Нетрудно показать, что радикальная ось двух окружностей любых радиусов с несовпадающими центрами – это прямая (см. Приложение).

Если окружности не пересекаются, они будут целиком по разные стороны от радикальной оси. Разобьем тогда точки многоугольника (лежащие снаружи окружностей) на области, состоящие из точек, касательные из которых к одной окружности короче, чем к другим. Аналогично получим, что каждая окружность лежит целиком в одной области и эта область – выпуклый многоугольник.

Кстати, в случае «окружностей» нулевого радиуса касательные превращаются в расстояния до центров, и получается предыдущая задача.

И последняя задача.

Задача 3 про квадраты. *В выпуклом многоугольнике расположены N непересекающихся квадратов. Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно один из квадратов?*

Ответ: неверно. Контрпример изображен на рисунке 5.

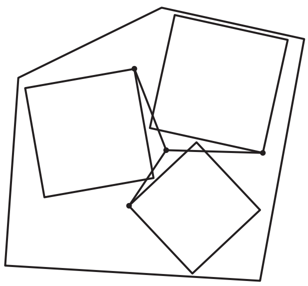


Рис. 5

Пояснение. В пятиугольнике расположены три квадрата. Разрезать пятиугольник на три выпуклые части, каждая из которых содержит один квадрат, невозможно. Точка в центре рисунка не может принадлежать ни одной из частей, так как каждый из трех отрезков, идущих из нее к одной из точек квадратов, будет пересекать контур другого квадрата, т.е. ни один из этих отрезков не будет принадлежать выпуклой фигуре.

Приложение

Пять домов. *Докажем, что на плоскости нельзя соединить друг с другом пять домов непересекающимися дорожками так, чтобы каждый дом был соединен с каждым отдельной дорожкой.*

Допустим, это все-таки удалось сделать. Уберем все дорожки и будем возвращать их последовательно. Сначала добавим четыре дорожки, соединяющие четыре дома по циклу, получится «четырехугольник» из дорожек. Соединим теперь пары противоположных вершин этого четырехугольника (проведем «диагонали»). Одна диагональ будет внутри, другая – снаружи (рис. 6). В результате плоскость разделится на три «треугольника» и бесконечную

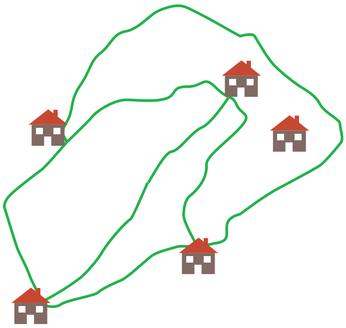


Рис. 6

часть, граница которой тоже будет треугольником (назовем эту часть «бесконечным» треугольником). Пятый дом окажется в одном из этих треугольников, и его можно будет соединить только с тремя вершинами этого треугольника. Противоречие – останется еще один дом, который нельзя соединить с пятым.

Три дома и три колодца. *Докажем, что на плоскости нельзя соединить непересекающимися дорожками три дома с тремя колодцами так, чтобы каждый дом был соединен с каждым колодцем отдельной дорожкой.*

Допустим, это все-таки удалось сделать. Уберем все дорожки и будем возвращать их последовательно. Сначала обойдем по замкнутому циклу все дома и колодцы. Так как дорожки не пересекаются, это будет «шестиугольник» из дорожек, причем дома и колодцы в нем чередуются (рис. 7). Осталось провести еще три дорожки, соединяющие противоположные вершины шестиугольника. Хотя бы две из

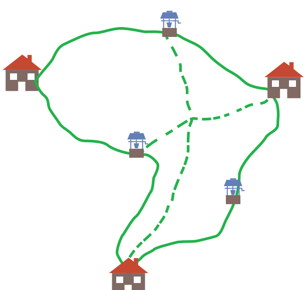


Рис. 8

этих трех дорожек попадут обе либо внутрь, либо наружу шестиугольника и неизбежно пересекутся.

Радикальные оси. Пусть даны две окружности с различными центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 соответственно (рис.8). Пусть точка O_1 имеет координаты (a, b),

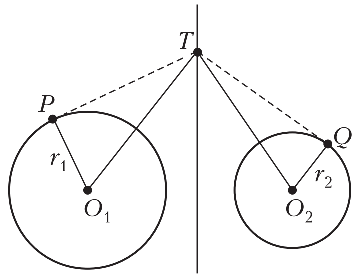


Рис. 8

а точка O_2 – координаты (c, d). Найдем все такие точки $T(x, y)$, что касательные TP и TQ к нашим окружностям, проведенные из этой точки, равны. Касательные равны, когда равны их квадраты, а квадраты касательных можно найти по теореме Пифагора:

$$TP^2 = TO_1^2 - O_1P^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r_1^2,$$

$$TQ^2 = TO_2^2 - O_2Q^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r_2^2.$$

Приравнивая TP^2 и TQ^2, видим, что квадраты иксов и игреков взаимно уничтожаются и получается уравнение вида $mx + ny - k = 0$, которое задает прямую, если хотя бы один из коэффициентов m и n ненулевой (а это так, поскольку центры окружностей различны).

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Опыт по Галилею

М.СТАРШОВ

Великий ученый семнадцатого века Галилео Галилей оставил богатое наследство в науке, занимаясь разнообразными исследованиями. Чаще всего вспоминают его работы по механике, оптике и астрономии. Гораздо реже отмечают вклад ученого в материаловедение, или в сопротивление материалов, по современной терминологии.

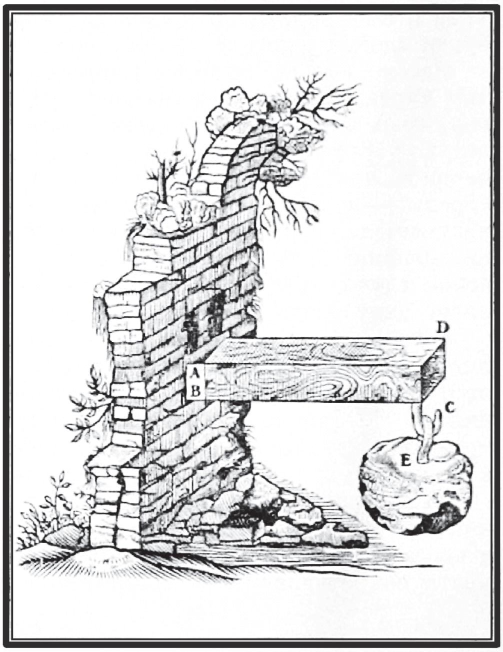
«Ни одна область физики не была столь тесно связана с потребностями практики, как физика твердого тела, т.е. физика тех материалов, которые применялись в строительном деле и в машиностроении...

Первым и важнейшим ответом на эту общественную потребность явилось произведение Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки», написанное пленником инквизиции в 1638 г. в его загородном имении Арчетри и пересланное за границу через французского посла графа де Ноайль, <бывшего когда-то студентом Галилея в Падуе – *М.С.*>. Две отрасли науки, о которых упоминается в заглавии, – это наука о движении... и наука о сопротивлении материалов. Этой второй отрасли науки фактически не было до Галилея».[1]

Галилей недоумевает, как это железный или стеклянный стержень выдерживает подвешенный к его концу значительный груз «в тысячу фунтов» (или в четыреста привычных для нас килограммов), но сломается от груза всего лишь в 50 фунтов, если конец стержня закреплен в стене, а груз прикреплен к другому его концу.

Дорфман видит у Галилея важные предположения, касающиеся вопроса о сопротивлении тел сгибанию, но непривычная терминология и сложные выводы освобождают его от рассмотрения всей проблемы. В самом деле, читать переводы великого итальянца очень тяжело, гораздо увлекательнее обсудить или даже провести некоторые эксперименты, отталкиваясь от идей Галилея.

[1] Я.Г.Дорфман. Всемирная история физики (с древнейших времен до конца XVIII века). – М.: Наука, 1974, с.214.



Призма ABCD, вделанная в стену; на свободный ее конец действует груз (гравюра из «Бесед» Галилея)

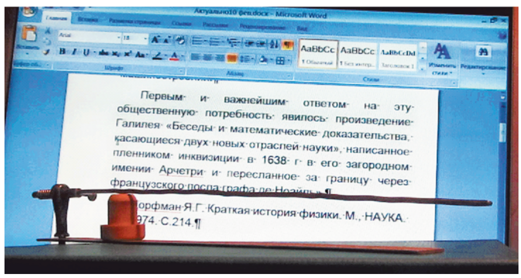
Прекрасная гравюра, воспроизведенная в «Беседах» Галилея, показывает довольно толстую балку, закрепленную одним концом в каменной стенке, тогда как на другой конец действует своей тяжестью некий груз. Между прочим, Галилей написал эту свою последнюю книгу во многом потому, что этой темой ему дозволяли заниматься надзиратели от инквизиции, а он к этому времени совсем осиротел и ослеп. Так что вполне вероятно, сам Галилей этой гравюры и не видел.

Сегодня можно изменить этот опыт и показывать студентам и школьникам его простой и эффектный вариант. Для этого берется горизонтальная палочка свинцового припоя для пайки и закрепляется за один конец. Если палочка тонкая, диаметром немного меньше трех миллиметров, а длиной примерно 20–30 см, то она сама собой изгибается под своей тяжестью. Не нужен никакой дополнительный груз, чтобы за четверть часа свободный конец палочки опустился на несколько сантиметров. Это производит большое впечатление на зрителей. Мы просто своими глазами наблюдаем пластическую деформацию металла.

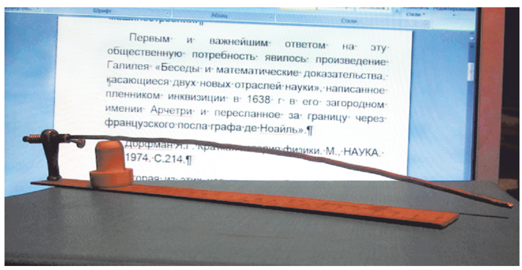
Раньше встречался припой в виде гораздо более толстых прутков, и с ними этот эксперимент получался еще эффектнее, только требовалось большее время. Приходилось крепить горизонтальный стержень в начале беседы или лекции и привлекать к нему внимание часа через полтора – металлический стержень чуть ли не в палец толщиной сгибался на пару сантиметров!

Очень быстро сгибается под собственной тяжестью совсем тоненький прутик припоя, диаметром около миллиметра. Длина в этом варианте, разумеется, может быть совсем небольшой, примерно 10–15 см.

Если под руками есть пруток припоя средней толщины и длиной сантиметров тридцать, то пластичность металла можно проиллюстрировать совсем просто и быстро – достаточно подвесить пруток на нитке за середину или вставить в самую примитив-



Палочка свинцового припоя в начале эксперимента...



...и в конце эксперимента

ную пластинку с отверстием. Через несколько минут будет четко видно, как опустились оба конца прутика.

Члены кружка юных техников легко могли бы дополнить эту простейшую экспериментальную установку, скажем, электрическим звонком, или регулятором длины свободной части висящего стержня для сравнения времени деформации.

Драма в облаках

А.СТАСЕНКО

Древние мудрецы как-то записали: «Темна вода в облацех воздушных», отметив таким образом загадочность происходящих процессов. А эти процессы не только загадочны – они трагичны! Однако, все по порядку.

Вспомним одну из важнейших идей термодинамического равновесия. Если есть два энергетических состояния E_1 и E_2, в которых могут находиться участники равновесия при температуре T, то количество этих участников n_1 и n_2 экспоненциально зависит от отношения энергий этих двух состояний и некой характерной энергии теплового хаотического движения kT, а именно: $n_{1,2} \sim e^{-\frac{E_{1,2}}{kT}}$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – универсальная константа Больцмана. Тут сразу «приходит на ум» распределение молекул массой m по высоте h в изотермической атмосфере (рис.1):

$$\frac{n(h)}{n(0)} = \frac{e^{-\frac{mgh}{kT}}}{e^0},$$

где $g = 9{,}8$ м/с^2 – ускорение тяготения.

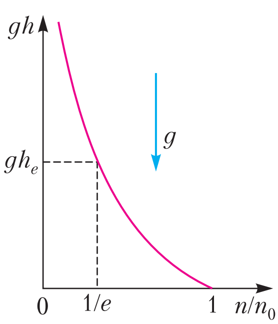


Рис. 1. Распределение по высоте концентрации молекул – равновесие между энергиями гравитации и теплового хаоса

Применим эту идею к описанию ситуации в облаке, где присутствуют водяные пары, капли воды и кристаллы льда. Прежде всего, как известно, чтобы испарить из водяной лужи (т.е. с плоской поверхности) один килограмм воды, требуется энергия фазового перехода $L_в$. В расчете на одну молекулу эта энергия равна $L_в m$. Следовательно, в равновесии отношение концентрации молекул, которых «вытащили из потенциальной ямы» глубиной $L_в$ (рис.2), к тем, которые остались «на дне» этой потенциальной ямы, равно

$$\frac{n_п}{n_в} = e^{-\frac{L_в m}{kT}}.$$

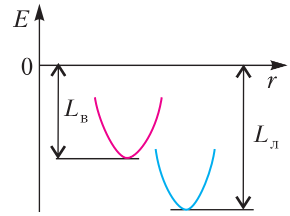


Рис. 2. Удельные энергии испарения (конденсации) и сублимации (плавления) как потенциальные ямы

Понятно, что для испарения с поверхности замерзающей лужи придется затратить энергию сублимации, превосходящую энергию испарения: $L_л > L_в$ – поскольку для этого надо сначала превратить лед в воду. Значит, показатель экспоненты теперь будет больше, а концентрация пара надо льдом будет соответственно меньше, чем над водой.

Но капли в чем-то отличаются от лужи: они характеризуются радиусом кривизны a. Согласно понятию поверхностного натяжения, силы взаимодействия всех молекул капли в ее внешнем слое сжимают каплю тем сильнее, чем меньше a. На рисунке 3 сравниваются две капли – побольше и поменьше; видно, что равнодействующая сил поверхностного натяжения, приложенных к одинаковым площадкам на их поверхности, растет с уменьшением a. Это, конечно, сказывается на росте давления в капле и в окружающем паре. Оказывается, над выпуклой поверхностью плотность насыщенного пара выше, чем над плоской поверхностью. Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим сообщающиеся сосуды – один широкий, другой узкий радиусом a (рис.4,a; здесь изображены два узких сосуда радиусами a_1 и a_2). Будем считать, что стенки сосудов не смачиваются водой. Тогда поверхность воды в капилляре (в узком сосуде) будет выпуклой, а уровень воды

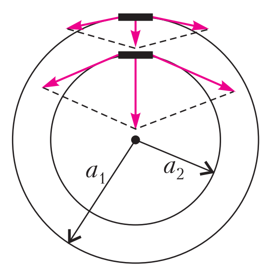


Рис. 3. С уменьшением радиуса кривизны капли растет равнодействующая сил поверхностного натяжения

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190404

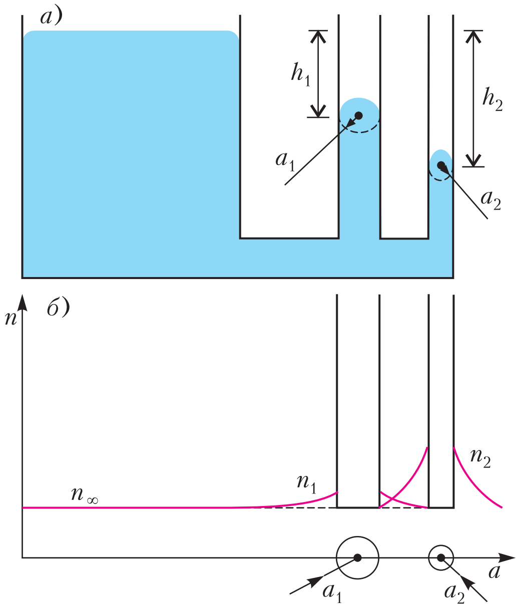


Рис. 4. а) Высота опускания несмачивающей жидкости в капилляре зависит от его радиуса. б) Равновесная концентрация пара зависит от радиуса кривизны капли

будет ниже плоского уровня на $h = \frac{2\sigma}{\rho_{в} g a}$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Если закрыть сосуды сверху крышкой, то вскоре пар во всем объеме станет насыщенным и будет находиться в состоянии равновесия со своей жидкостью. При не очень малом a плотность пара можно считать постоянной, и давление пара над выпуклой поверхностью будет больше давления над плоской поверхностью на величину

$$p_h - p_0 = \rho_{п} g h = \frac{2\sigma\rho_{п}}{\rho_{в} a}.$$

Если же a очень мало ($\sim 10^{-7}$ м), то для расчета разности давлений надо использовать формулу Больцмана:

$$p_h = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = p_0 e^{-\frac{2\sigma m}{\rho_{в} a k T}}.$$

И что же получается – давление и концентрация пара над большей каплей воды меньше, чем над меньшей (рис.4,*б*), значит, молекулы пара будут диффундировать через воздух (вспомним и о нем) от малой капли к большой, конденсируясь на последней и увеличивая ее массу. Поистине, как говорили древние мудрецы, «кто имеет, тому дано будет и приумножится, а кто не имеет, у того отнимется и то, что имеет».

Результат известен – падение! Причем, чем крупнее капля, тем труднее ей удержаться в восходящем потоке воздуха: сила тяжести пропорциональна кубу размера, а поддерживающая аэродинамическая сила – квадрату. Возникающая при этом разность скоростей приводит к тому, что большие капли, сталкиваясь с мелкими и объединяясь с ними, растут еще быстрее. Облако разрушается – на земле выпадают осадки!

Ситуация становится еще более драматичной, когда на сцене появляются кристаллы. Поскольку $L_{л} > L_{в}$ и давление над их поверхностью меньше, чем над жидкостью, они нещадно поглощают и большие и малые капли. Укрупняясь до размеров, которые уже невозможно поддерживать в восходящих потоках воздуха, кристаллы выпадают вниз, образуя в достаточно плоских облаках «дыры» (рис.5) – редкое, но яркое явление,

Рис. 5. Дыры в облаках

которое впечатлительные наблюдатели приписывают инопланетным пришельцам. Этот процесс назван по имени его исследователей явлением (механизмом, эффектом, теорией) Вегенера–Ленгмюра–Бержерона–Финдайзена.

Конечно, в этом наброске не уделено должного внимания воздуху, в котором и рассматриваются драматические события. А чтобы добавить свою фамилию к приведенной выше замечательной плеяде исследователей, нужно разобраться в явлениях подробнее, поступив в Московский физико-технический институт, например на факультет аэромеханики и летательной техники.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

29. Даны 1000 дробей $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}$.

а) Можно ли из них выбрать 8 дробей, которые образуют арифметическую прогрессию?

б) Можно ли это сделать так, чтобы знаменатель наибольшей выбранной дроби отличался от знаменателя наименьшей выбранной дроби меньше чем на 600?

М.Малкин

30. Каждое из натуральных чисел n и $49n$ представляется в виде произведения трех, но не представляется в виде произведения четырех попарно различных натуральных чисел. Найдите все такие n.

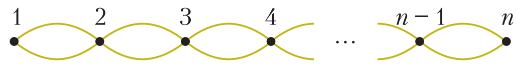
В.Лецко

31. На границе квадрата отметили точки, разбивающие ее на 20 отрезков равной длины. Отмеченные точки покрасили в 20 разных цветов и 20 отрезков покрасили в те же 20 цветов. Из каждой отмеченной точки отрезок одного с ней цвета виден под ненулевым углом. Верно ли, что среди таких углов обязательно найдутся два равных?

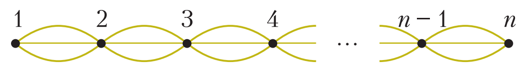
Е.Бакаев

32. На прямой расположены n городов, соединенных дорогами. Пешеход выходит из города 1. Он хочет пройти по всем дорогам, причем по каждой дороге только один раз. Сколько существует таких маршрутов? Маршруты считаются разными, если они отличаются последовательностью выбора дорог. Решите задачу для случаев, когда каждые два соседних города соединены между собой:

а) двумя дорогами;



б) тремя дорогами.



В.Расторгуев

Где спрятался Ним?

И.КОПЫЛОВ

В статье «Плюсы–минусы и игра Ним» (см. «Квант» №7, 8 за 2018 г.) была рассказана стратегия игры Ним, которая играет особую роль в теории игр. Игра Ним состоит в следующем. Имеется m кучек, количество камней в которых равно $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Двое ходят по очереди; каждый игрок при своем ходе выбирает одну из кучек и берет из нее любое ненулевое число камней. Побеждает тот, кто забрал последний камень.

Многие игры сводятся к Ниму. Если в игре удается распознать Ним, то для нее сразу же появляется стратегия, заимствованная из Нима. В данной статье сведем к Ниму несколько разнообразных игр.

Игра 1. *Пять фишек находятся на клетках горизонтальной полоски из 25 клеток. За каждый ход необходимо передвинуть одну из фишек влево на любую клетку, перепрыгивать через другие фишки разрешается, на одной клетке могут находиться несколько фишек. Выигрывает игрок, после хода которого все 5 фишек окажутся на крайней левой клетке полоски.*

Игра очевидным образом сводится к Ниму с 5 кучками камней. Занумеруем клетки полоски, начиная с 0, слева направо (рис.1). Тогда фишку, стоящую на клетке с номером n, за 1 ход можно передвинуть на любую из клеток 0, 1, …, $n-1$ вне зависимости от расположения остальных фишек. Аналогично и в игре Ним количество камней в одной из кучек за ход уменьшается вплоть до 0. Поэтому для сведения к Ниму фишку на клетке n следует заменить кучкой с n камнями. Тогда фишка на самой левой клетке равносильна пустой кучке. Игра заканчивается, когда все кучки пусты, т.е. все фишки собраны на клетке с номером 0.

Итак, если 5 фишек расположены на клетках с номерами a, b, c, d и e, то для чисел a, b, c, d и e составляется Ним-сумма. Напомним, что Ним-сумма вычисляется поразрядно следующим образом: Ним-суммируемые числа записываются в двоичной системе исчисления, и если в данном разряде оказалось нечетное число единиц, то в результирующей сумме в соответствующем разряде ставим 1, если четное – 0. Ним-сумма чисел a, b, c, d, e обозначается $a \oplus b \oplus c \oplus d \oplus e$. Своим ходом игрок должен обнулить Ним-сумму.

Рассмотрим пример. Пусть фишки стоят на клетках 5, 10, 14, 16 и 22 полоски (см. рис.1). Вычисление соответствующей Ним-суммы приведено на рисунке 2.

Кучка 1	5:			1	0	1
Кучка 2	10:		1	0	1	0
Кучка 3	14:		1	1	1	0
Кучка 4	16:	1	0	0	0	0
Кучка 5	22:	1	0	1	1	0
Ним-сумма:		0	0	1	1	1

Рис. 2. Вычисление Ним-суммы для определения хода в игре 1

Итак,

$$5 \oplus 10 \oplus 14 \oplus 16 \oplus 22 =$$
$$= 101_2 \oplus 1010_2 \oplus 1110_2 \oplus 10000_2 \oplus 10110_2 =$$
$$= 111_2 = 7.$$

Ним-сумма отлична от 0. Игрок, делающий ход, должен ее обнулить. Старшая единица в Ним-сумме находится во 2-м двоичном разряде, если считать разряды справа налево, начиная с нулевого. Единицы во втором разряде присутствуют в записи количеств камней в 1, 3 и 5 кучках. Поэтому в рассматриваемом примере у игрока есть 3 варианта хода: либо в первой кучке оставить $10_2 = 2$ камня, т. е. передвинуть фишку с

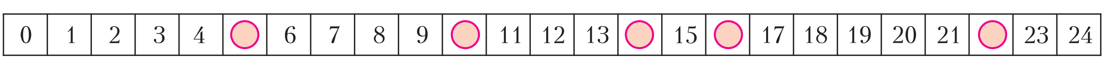


Рис. 1. Нумерация клеток полоски и расположение фишек в примере

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190405

(Продолжение см. на с. 34)

Когда один отрезок равен сумме двух других

Геометрические задачи, в которых один из отрезков равен сумме двух других, полезны, интересны, эстетичны. Предлагаем небольшую коллекцию задач, в которых $x = y + z$.

1. Точка F взята произвольно на основании BC равнобедренного треугольника ABC (рис.1). Расстояния от нее до AC и AB равны y и z соответственно. Высота, проведенная из вершины B, равна x. Докажите, что $x = y + z$.

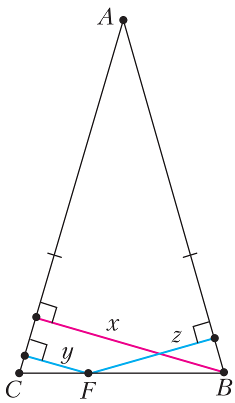


Рис. 1

2. Через точку I пересечения биссектрис прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) проведены прямые параллельно его сторонам (рис. 2). Докажите, что $x = y + z$.

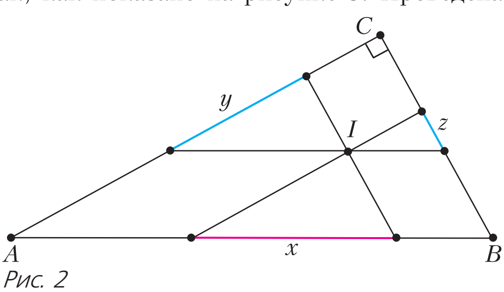


Рис. 2

3. Квадраты $ABCD$ и $CQNT$ расположены так, как показано на рисунке 3. Проведена прямая BQ. Расстояния от вершин A и N до нее равны y и z соответственно. Длина отрезка BQ равна x. Докажите, что $x = y + z$.

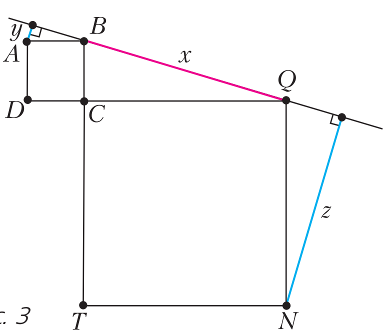


Рис. 3

4 (Л.Кэрролл). Проведите $EF \parallel BC$ (рис. 4) так, чтобы $x = y + z$.

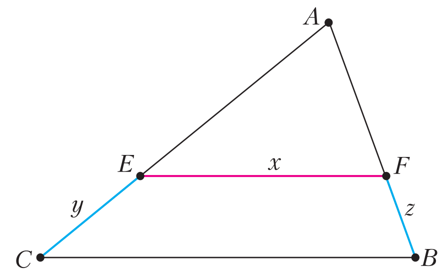


Рис. 4

5 (Л.Кэрролл). Согласно рисунку 5 проведите отрезок KT параллельно BC – так, чтобы $x = y + z$.

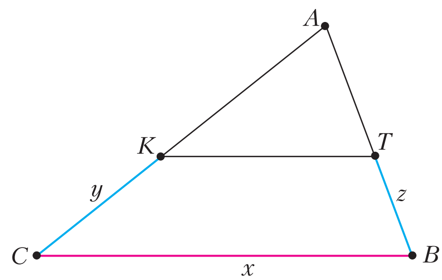


Рис. 5

6. Через центроид M – точку пересечения медиан треугольника ABC – проведена произвольная прямая t (рис.6). Расстояния от вершин треугольника до нее равны x, y, z. Докажите, что $x = y + z$.

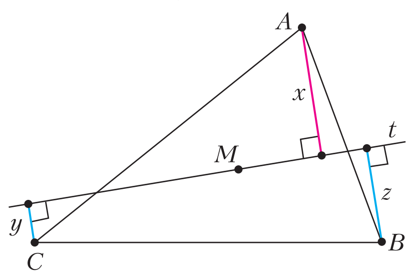


Рис. 6

7. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность, F – произвольная точка дуги BC, не содержащей вершину A (рис.7). Докажите справедливость равенства $x = y + z$.

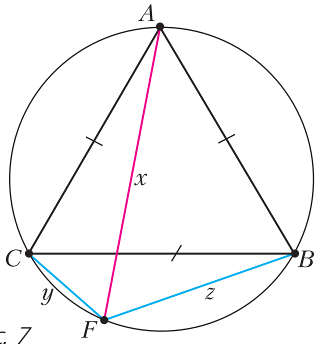


Рис. 7

8 (Архимед). Точка F – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, $FN \perp AC$ (рис.8). Докажите, что $x = y + z$.

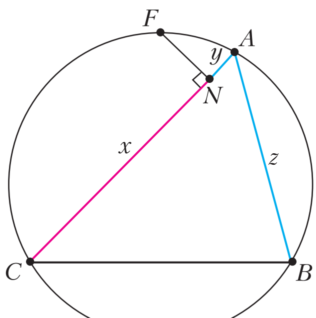


Рис. 8

9. В треугольнике ABC BL и CT – биссектрисы, F – произвольная точка отрезка LT (рис.9). Докажите, что расстояния от нее до сторон треугольника связаны соотношением $x = y + z$. (Этой задаче посвящена статья «Лемма биссектрального треугольника» в «Кванте» №2 за 2016 г.)

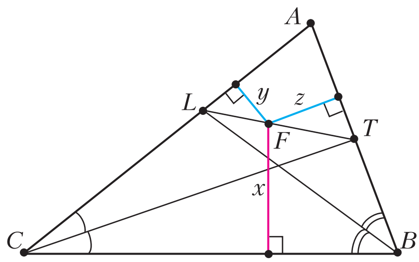


Рис. 9

10. В треугольнике ABC ($b > a > c$) проведены биссектрисы AN, BL и CT (рис.10). Окружность, описанная около ΔNLT, высекает на сторонах треугольника ABC хорды, равные x, y, z. Докажите, что $x = y + z$.

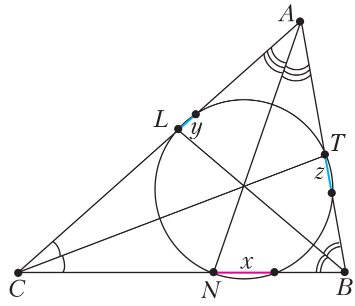


Рис. 10

11. Четырехугольник $ABCD$ ($BC = CD$) вписан в окружность (рис.11). Точки F и N на сторонах AB и AD такие, что $\angle FCN = \frac{1}{2}\angle BCD$. Докажите, что $x = y + z$.

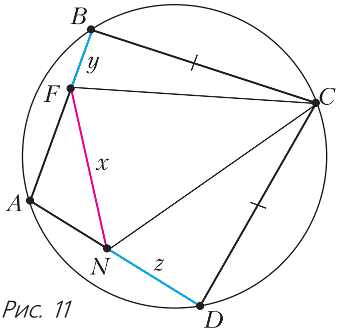


Рис. 11

12. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) описана окружность (рис.12). Точка K – произвольная точка дуги BC этой окружности, не содержащей вершину A, $AQ \perp BK$. Докажите, что $x = y + z$.

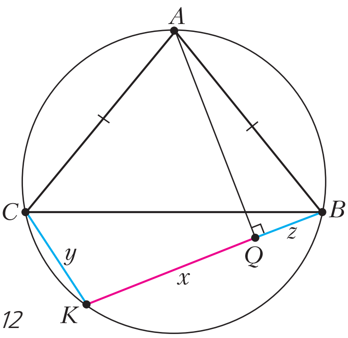


Рис. 12

Материал подготовил Г.Филипповский

клетки 5 на клетку 2, либо в третьей кучке оставить $1001_2 = 9$ камней, т. е. передвинуть фишку с клетки 14 на клетку 9, либо в пятой кучке оставить $10001_2 = 17$ камней, что означает перестановку фишки с клетки 22 на клетку 17.

Игра 2. *Гусеница состоит из 20 звеньев. Некоторые звенья гусеницы окрашены в зеленый цвет, остальные – белые. Два игрока по очереди перекрашивают звенья: зеленое звено делают белым, а белое – зеленым. Своим ходом игрок должен перекрасить одно из зеленых звеньев в белый цвет и может перекрасить еще одно звено, расположенное ближе к хвосту относительно перекрашенного. Выигрывает игрок, после хода которого все звенья гусеницы станут белыми.*

Данная игра представляет собой скрытый Ним. Пронумеруем звенья гусеницы, начиная с хвоста. Хвостовое звено получит номер 1, головное – 20 (рис.3). Зеленое звено гусеницы с номером k заменим кучкой с k камнями.

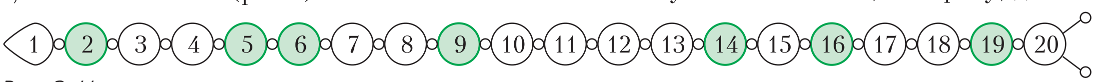


Рис. 3. Нумерация звеньев гусеницы

Игрок при своем ходе перекрашивает зеленое звено с некоторым номером k и может перекрасить еще одно звено с номером, меньшим k. Если игрок перекрашивает только одно звено, то считаем, что он опустошил кучку с k камнями. Если второе перекрашенное звено имеет номер m $(m < k)$ и до хода игрока было белым, то считаем, что игрок из кучки с k камнями забрал $k - m$ камней и оставил в ней m камней. А в том случае, когда второе перекрашенное звено с номером m было зеленым, а стало белым, то будем считать, что игрок в кучке с k камнями оставил m камней. Так как до этого уже была кучка с m камнями, то их стало уже две. А две одинаковые кучки вклад в Ним-сумму дают нулевой. Поэтому далее в игре Ним их можно не рассматривать и исключить из игры. Таким образом, данная игра сводится к Ниму с количеством кучек, равным количеству зеленых звеньев гусеницы. Количество камней в кучке совпадает с номером соответствующего зеленого звена.

Например, на рисунке 3 игра с перекрашиванием звеньев гусеницы эквивалентна Ниму

Кучка 1	2:				1	0
Кучка 2	5:			1	0	1
Кучка 3	6:			1	1	0
Кучка 4	9:		1	0	0	1
Кучка 5	14:		1	1	1	0
Кучка 6	16:	1	0	0	0	0
Кучка 7	19:	1	0	0	1	1
Ним-сумма:		0	0	1	0	1

Рис. 4. Вычисление Ним-суммы для определения хода в игре 2

с 7 кучками с 2, 5, 6, 9, 14, 16 и 19 камнями. Так как соответствующая Ним-сумма равна (рис.4)

$$2 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 9 \oplus 14 \oplus 16 \oplus 19 =$$
$$= 10_2 \oplus 101_2 \oplus 110_2 \oplus 1001_2 \oplus 1110_2 \oplus$$
$$10000_2 \oplus 10011_2 \oplus = 101_2 = 5$$

и есть кучка с 5 камнями, то игроку, делающему ход, достаточно обнулить кучку из 5 камней, и Ним-сумма оставшихся кучек станет равной 0. Следовательно, выигрышный ход из состояния на рисунке 3 – перекрасить зеленое звено 5 в белый цвет.

Игра 3. *Два игрока по очереди разламывают плитку шоколада, разделенную бороздками на 8×12 частей. Одна из частичек плитки помечена крестом. Игрок при каждом своем ходе разламывает плитку вдоль одной из бороздок и съедает ту часть плитки, которая не содержит частички с крестом. Побеждает игрок, после хода которого от плитки шоколада остается всего лишь одна частичка с крестом.*

Эта игра – тоже завуалированный Ним. У игрока существует 4 варианта хода: разломить плитку по бороздке выше частички с крестом, правее частички с крестом, ниже ее либо левее ее. Если в начале игры частичка с крестом расположена, например, так, как показано на рисунке 5, то над частичкой с крестом расположено 4 ряда, правее ее – 5 рядов, ниже – 3 ряда, левее – 6 рядов. Ход в каждом из четырех вариантов уменьшает количество рядов соответствующего направления.

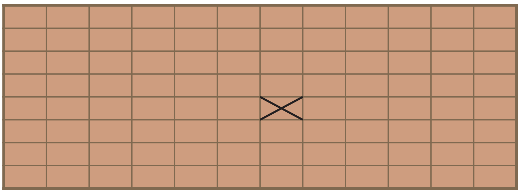


Рис. 5. Вид плитки шоколада с выделенной крестом частичкой

Поэтому игра эквивалентна Ниму с 4 кучками камней. В первой кучке количество камней совпадает, например, с количеством рядов над частичкой с крестом, во второй – с количеством рядов правее частички с крестом, в третьей – ниже и в четвертой – левее ее. В примере на рисунке 5 в начале игры в кучках находится 4, 5, 3 и 6 камней. Игрок при своем ходе выбирает кучку и уменьшает в ней количество камней.

Для определения хода составляем Ним-сумму. В рассматриваемом примере вычисление Ним-суммы проведено на рисунке 6. Получим

$$4 \oplus 5 \oplus 3 \oplus 6 = 100_2 \oplus 101_2 \oplus 11_2 \oplus 110_2 = = 100_2 = 4 .$$

Как видно из рисунка 6, Ним-сумма отлична от 0. Для ее обнуления необходимо удалить

Кучка 1	4:	1	0	0
Кучка 2	5:	1	0	1
Кучка 3	3:		1	1
Кучка 4	6:	1	1	0
Ним-сумма:		1	0	0

Рис. 6. Составление Ним-суммы для определения хода в игре 3

одну единицу в старшем двоичном разряде, т.е. удалить 4 камня в одной из кучек 1, 2 или 4. В рассматриваемой игре игрок должен удалить 4 ряда либо над, либо справа, либо слева от клетки с крестом.

Игра 4. *На пяти клетках горизонтальной полоски из 25 клеток находится по фишке. За каждый ход разрешается передвинуть любую фишку влево на свободную клетку, не перепрыгивая через другие фишки. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.*

Занумеруем клетки полоски слева направо числами от 1 до 25. Фишки на полоске тоже будем нумеровать слева направо. Игрок не может сделать ход, когда пять фишек занимают клетки с номерами от 1 до 5.

Для поиска стратегии сначала упростим игру. Пусть на полоске находится всего одна фишка. Тогда выигрывает начинающий, поставив фишку на клетку 1.

Если фишек на полоске две, то стратегия определяется без особых усилий. Игроку следует разместить фишки на соседних клетках. Соперник сможет сделать ход только фишкой 1. Игрок своим очередным ходом перемещает влево фишку 2 так, чтобы фишки опять оказались на соседних клетках. В итоге после нескольких ходов фишки окажутся на клетках 1 и 2, и соперник не сможет сделать ход.

Далее рассмотрим случай игры с тремя фишками на полоске. Для построения стратегии воспользуемся правилами расстановки знаков «+» и «–», приведенными в статье «Плюсы–минусы и игра Ним». Состояние игры задают 3 числа – номера клеток с фишками. Поэтому расставлять знаки необходимо в клетках трехмерной таблицы. Координаты клеток (a_1, a_2, a_3) удовлетворяют соотношениям

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 , \qquad (1)$$

где a_1 – номер клетки с фишкой 1, a_2 – с фишкой 2, a_3 – с фишкой 3. В результате хода одного из игроков одна из трех координат уменьшается, причем соотношение (1) остается в силе.

Заполнять знаками таблицу будем по слоям. В нижнем слое, где $a_1 = 1$, фишка 1 ходить не может. А для двух фишек мы уже установили, что в минусовом состоянии фишки размещаются в соседних клетках полоски. Значит, $a_2 + 1 = a_3$, и во всех клетках с координатами $(1, a_2, a_2 + 1)$, $1 < a_2$, стоит знак «–», а во всех остальных клетках первого слоя – знак «+».

В клетках второго слоя таблицы, где $a_1 = 2$, минусы находятся в клетках с координатами $(2,3,5)$, $(2,4,6)$, $(2,5,7)$, …, т.е. в клетках вида $(2, a_2, a_2 + 2)$, $2 < a_2$.

Заполняя знаками «+» и «–» клетки третьего слоя, замечаем, что минусы оказываются в клетках с координатами вида $(3, a_2, a_2 + 3)$, $3 < a_2$.

Глядя на заполнение минусами первых трех слоев таблицы, можно предположить, что знаки «–» находятся в клетках с координатами $(a_1, a_2, a_2 + a_1)$, $0 < a_1 < a_2$. Или, в другом виде, координаты (a_1, a_2, a_3) минусовых клеток связаны соотношением

$$a_1 = a_3 - a_2 . \qquad (2)$$

Эта гипотеза доказывается методом математической индукции по a_1.

Перепишем соотношение (2) в виде

$$a_1 - 0 = a_3 - a_2 \qquad (3)$$

и предположим, что к полоске добавили слева еще одну клетку с номером 0, на которой стоит нулевая условная фишка. Тогда расстояние в клетках между первой и нулевой фишками совпадает с расстоянием в клетках между третьей и второй фишками. Если расстановка фишек удовлетворяет соотношению (3), то любой ход соперника приведет к его нарушению, и игрок своим ответным ходом должен восстановить выполнение соотношения (3). Наблюдается соответствие Ниму с двумя кучками камней. Количество камней в первой кучке совпадает с количеством свободных клеток между нулевой и первой фишками, а во второй кучке – между второй и третьей фишками. В Ниме с двумя кучками игрок должен каждым своим ходом уравнивать количества камней в кучках. В отличие от Нима в данной игре соперник может, передвинув фишку 2, увеличить количество свободных клеток между фишками 2 и 3, что в игре Ним соответствует увеличению числа камней во второй кучке. В этом случае игрок должен ответным ходом передвинуть фишку 3 влево, вернув прежнее число свободных клеток между второй и третьей фишками. Случай с 3 фишками на полоске разобран.

Пусть теперь игра проводится с 4 фишками на полоске. Тогда условная фишка, введенная при рассмотрении предыдущего случая, получает воплощение. Обозначим через a_i номер клетки, на которой стоит i-я фишка (i = 1, 2, 3, 4). По аналогии с предыдущим случаем номера клеток с фишками для минусового состояния удовлетворяют соотношению

$$a_2 - a_1 = a_4 - a_3 .$$

И, наконец, для 5 фишек на полоске введем опять условную неподвижную нулевую фишку, которую поместим на условную нулевую клетку, присоединенную к полоске слева. Игра сводится к Ниму с 3 кучками камней. Количество камней в первой кучке полагаем равным количеству свободных клеток между фишками 0 и 1. Размер второй кучки определяется количеством свободных клеток полоски между фишками 2 и 3. Камней в третьей кучке ровно столько, сколько свободных клеток полоски между 4-й и 5-й фишками.

На рисунке 7 показан пример определения размеров трех кучек в эквивалентном Ниме.

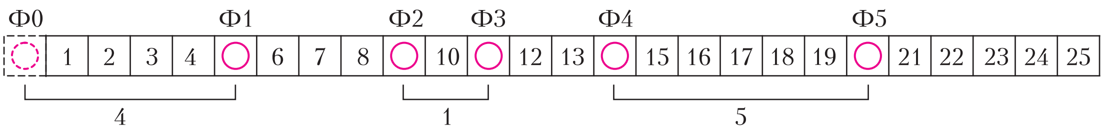


Рис. 7. Пример определения количеств камней в игре 4

В примере количества камней в кучках равны 4, 1 и 5.

Для победы игрок должен каждым своим ходом обнулять соответствующую Ним-сумму для трех кучек. Перемещения фишек с нечетными номерами уменьшают количество камней в одной из кучек. Если соперник перемещает фишку 2 или 4, скажем, на k клеток влево, то в кучке 2 или 3 соответственно количество камней увеличивается. В этом случае игрок должен своим ходом восстановить количество камней в кучке, переместив соответствующую фишку с нечетным номером на k клеток влево.

В рассматриваемом примере Ним-сумма равна 0 (рис.8). Следовательно, игрок, чья очередь делать ход, проигрывает.

Кучка 1	4:	1	0	0
Кучка 2	1:			1
Кучка 3	5:	1	0	1
Ним-сумма:		0	0	0

Рис. 8. Вычисление Ним-суммы для 3 кучек в игре 4

Игра 5. *Клетки полоски из 10 клеток пронумерованы от 1 до 10. На каждой* *клетке в начале игры может находиться от 0 до 5 фишек. Игрок при своем ходе выбирает клетку и ненулевое количество фишек с нее перекладывает на соседнюю клетку с меньшим номером. Фишки с клетки 1 перемещаются в мешок. Выигрывает игрок, после хода которого все фишки оказываются в мешке.*

В данной игре Ним также хорошо «замаскировался». Чтобы его увидеть, сначала упростим игру. Будем считать, что полоска состоит не из 10, а только из одной клетки. Тогда выигрывает начинающий: первым ходом он все фишки с клетки 1 перемещает в мешок.

Пусть теперь полоска состоит из двух клеток. Начинающий снова выигрывает. Своим первым ходом он также перемещает в мешок все фишки с клетки 1. У второго игрока есть только одна возможность – переместить несколько фишек со второй клетки на первую. Начинающий своим ходом все фишки, оказавшиеся на клетке 1, перемещает в мешок. И опять фишки могут присутствовать только на второй клетке полоски. После возможного следующего хода второго игрока начинающему следует снова обнулить количество фишек на клетке 1. Таким образом, последний ход в игре останется за начинающим.

Рассмотрим теперь случай, когда полоска состоит из трех клеток. Отметим ключевой момент – фишки на второй клетке не влияют на состояние и результат игры. Действительно, если соперник переместит, скажем, k фишек со второй клетки на первую, то игроку следует ответным ходом переместить те же k фишек с первой клетки в мешок. И ход снова переходит к сопернику. Поэтому можно считать, что вторая клетка равносильна мешку. И игроку достаточно следить за количеством фишек на клетках 1 и 3. Получаем игру Ним с двумя кучками. Одну кучку образуют фишки на клетке 1, вторую – фишки на клетке 3. Для победы в соответствии со стратегией Нима с 2 кучками игрок каждым своим ходом должен уравнивать количество фишек на первой и третьей клетках.

Если к полоске добавить четвертую клетку, количество фишек на ней никак не окажет влияние на результат игры. Игрок опять должен отслеживать количество фишек только на первой и третьей клетках и после своего хода оставлять одинаковое количество фишек на клетках 1 и 3. Если соперник переместит несколько фишек с четвертой клетки на третью, то игроку следует ответным ходом перенести те же фишки дальше с третьей клетки на вторую. Можно считать, что вторая и четвертая клетки полоски равносильны мешку: при перемещении соперником фишек с них на клетки с нечетными номерами 1 и 3 игрок ответным ходом перемещает те же фишки далее на соседнюю клетку с четным номером или в мешок (мешок – условная клетка с четным номером 0).

Проведенные рассуждения переносятся на случай полоски с произвольным числом клеток, в частности, на полоску с 10 клетками. Игрок должен следить за количеством фишек на клетках с нечетными номерами. Каждая клетка с нечетным номером – это кучка, в которой количество камней совпадает с числом камней на данной клетке. Небольшое отличие от Нима состоит в том, что после хода соперника количество камней в кучке может увеличиться. Соперник с клетки с четным номером $2n$ может перенести некоторое количество k фишек на клетку с нечетным номером $2n-1$. Тогда игрок должен ответным ходом эти k фишек переместить на клетку с четным номером $2n-2$.

Игроку для победы следует каждым своим ходом обнулять Ним-сумму, составленную для количеств фишек на клетках с нечетными номерами.

Рассмотрим пример. Пусть распределение фишек по клеткам такое, как показано на рисунке 9.

Номер клетки полоски	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество камней в клетке	2	4	3	1	3	3	1	2	4	3

Рис. 9. Распределение фишек по клеткам полоски в игре 5

В клетках с нечетными номерами находится 2, 3, 3, 1 и 4 фишек. Составим для данных 5 чисел Ним-сумму (рис.10). Ним-сумма отлична от 0. Обнулить ее можно только изменением количества камней в кучке 5, т.е. перемещением фишек с клетки 9 на соседнюю клетку с четным номером 8. Игроку

Кучка 1	2:	1 0
Кучка 2	3:	1 1
Кучка 3	3:	1 1
Кучка 4	1:	1
Кучка 5	4:	1 0 0
Ним-сумма:		1 1 1

Рис. 10. Составление Ним-суммы для чисел в игре 5

следует передвинуть из клетки 9 одну фишку, оставив на ней три фишки. Ним-сумма после такого хода станет нулевой.

Игра 6. *Игра происходит с 4 ломаными. Количество звеньев у ломаной не превышает 20. Три ломаные прикреплены к неподвижному основанию одним концом, а четвертая – обоими концами (рис. 11). За*

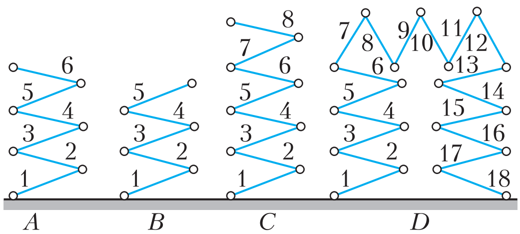


Рис. 11. Пример начального состояния игры

каждый ход разрешается удалить одно звено у любой ломаной. Если после хода оказались звенья, оторванные от основания, то все они также удаляются. Выигрывает игрок, после хода которого звенья всех ломаных будут удалены.

Сведем игру к Ниму с 4 кучками камней. Пусть ломаные A, B и C прикреплены к основанию одним концом, а ломаная D – двумя. Последовательно занумеруем звенья каждой ломаной. У ломаных A, B и C номер 1 получит звено, прикрепленное к основанию (рис.11).

Покажем, что каждую из ломаных A, B и C можно заменить кучкой, количество камней в которой равно количеству звеньев в соответствующей ломаной. Пусть ломаная A, например, содержит k звеньев. При удалении i-го звена ломаной A, $1 \le i \le k$, у нее остается $i-1$ звено с номерами от 1 до $i-1$. Тем самым, удаление i-го звена равносильно оставлению в кучке $i-1$ камня.

Ломаную D также заменим на некоторую обобщенную кучку камней. Пусть ломаная D вначале содержит m звеньев. После удаления одного из ее звеньев, скажем звена i, $1 \le i \le m$, ломаная распадается на 2 ломаные с $i-1$ и $m-i$ звеньями, каждая из которых прикреплена к основанию одним концом. Покажем, что 2 новые ломаные в игре можно заменить одной кучкой камней в Ниме.

Если в ломаной D четное количество звеньев, то после удаления одного звена в полученных двух ломаных будет неравное количество звеньев, и у соперника есть возможность своим ходом уравнять количество звеньев в новых ломаных. Две одинаковые кучки имеют одинаковое двоичное представление и дают нулевой вклад в Ним-сумму. Получаем, что и обобщенная кучка, которой мы хотим заменить ломаную D, дает нулевой вклад в Ним-сумму, т.е. является пустой. Отличие обобщенной кучки камней от простой при игре в Ним заключается в том, что даже когда обобщенная кучка является пустой, то возможен ход игрока, переводящий ее в непустую кучку. При этом соперник своим ходом обнуляет ее. И снова игрок должен делать ход, а обобщенная кучка – пуста. Вернулись к состоянию, которое уже было. После каждого хода суммарное количество звеньев у ломаных уменьшается, поэтому бесконечное количество раз возвращаться к одному и тому же состоянию обобщенной кучки невозможно.

Рассмотрим теперь случай, когда у ломаной D нечетное количество звеньев. Тогда игрок удалением среднего звена может получить две ломаные с одинаковым числом звеньев, которые дают нулевой вклад в Ним-сумму. Покажем, что при удалении любого другого звена ломаной D соперник может после своего последующего хода оставить две ломаные, вклад которых в Ним-сумму такой же, как и от кучки с одним камнем.

Ломаная D после удаления одного звена не может распасться на две ломаные, количество звеньев в которых отличается ровно на 1. Но тогда соперник, уменьшая своим ходом количество звеньев у ломаной с большим числом звеньев, может получить в новых ломаных количества звеньев, являющиеся двумя последовательными числами, допустим $2n$ и $2n+1$, где наименьшее число $2n$ является четным. Вклад двух таких чисел в

Ним-сумму совпадает с вкладом от кучки с одним камнем.

Последующим ходом игрок либо уравнивает количество звеньев в двух новых ломаных, получая от них нулевой вклад в Ним-сумму, либо оставляет в них такие количества звеньев, которые ходом соперника могут быть сведены к ломаным с количествами звеньев, совпадающими опять с двумя последовательными числами, и меньшее из них четно. Получаем, что ломаная D с нечетным числом звеньев эквивалентна обобщенной кучке с одним камнем.

Итак, игра свелась к Ниму с четырьмя кучками, причем в четвертой кучке камней либо 0, когда ломаная D состоит из четного количества звеньев, либо 1, если ломаная D содержит нечетное количество звеньев. Игрок для победы должен обнулять Ним-сумму для соответствующих 4 кучек.

В примере на рисунке 11 при сведении игры к Ниму количество камней в кучках равно 6, 5, 8 и 0. В ломаной D четное число звеньев, что равносильно пустой обобщенной кучке.

На рисунке 12 показано вычисление Ним-суммы для рассматриваемого примера. Ним-сумма отлична от 0. Обнуляет ее единственный ход: в третьей кучке с 8 камнями следует оставить $11_2 = 3$ камня. Следовательно, игрок должен удалить звено 4 у ломаной C.

Кучка 1	6:		1	1	0
Кучка 2	5:		1	0	1
Кучка 3	8:	1	0	0	0
Кучка 4	0:				0
Ним-сумма:		1	0	1	1

Рис. 12. Составление Ним-суммы для чисел в игре 6

Предлагаем читателям в следующих упражнениях свести игры к Ниму.

Упражнения

1. Четыре фишки находятся на клетках горизонтальной полоски из 25 клеток. За каждый ход необходимо передвинуть одну из фишек влево на любую свободную клетку, перепрыгивать через другие фишки разрешается, на одной клетке не могут находиться несколько фишек. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

2. На пяти клетках горизонтальной полоски из 25 клеток находится по фишке. За каждый ход разрешается передвинуть любую фишку влево на любое количество клеток, не перепрыгивая через другие фишки. Ставить фишку на уже занятую другой фишкой клетку допускается только для самой левой клетки полоски. Выигрывает игрок, после хода которого все фишки соберутся на крайней левой клетке полоски.

3. На пяти клетках горизонтальной полоски из 25 клеток находится по фишке. Средняя из них выделена цветом. За каждый ход разрешается передвинуть любую фишку влево на любое количество клеток, не перепрыгивая через другие фишки. Ставить фишку на уже занятую другой фишкой клетку допускается только для самой левой клетки полоски. Выигрывает игрок, который поставит выделенную цветом фишку на крайнюю левую клетку полоски.

4. Имеется 3 пустых корзины вместимостью N_1, N_2 и N_3 мячей ($N_1, N_2, N_3 < 15$). Два игрока по очереди раскладывают ($N_1 + N_2 + N_3 - 1$) мячей в 3 корзины. За один ход игрок может положить любое количество мячей в одну из корзин. Выигрывает игрок, который положит в корзины последний мяч.

5. Гусеница состоит из двадцати звеньев. Некоторые звенья гусеницы окрашены в зеленый цвет, остальные – белые. Два игрока по очереди перекрашивают звенья: зеленое звено делают белым, а белое – зеленым. Своим ходом игрок должен перекрасить два звена, причем звено из двух перекрашиваемых, ближнее к голове гусеницы, должно перекрашиваться из зеленого в белый цвет. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.

6. На столе – три кучки камней. В каждой кучке не более 25 камней. Каждый из двух игроков при своем ходе может взять любое ненулевое количество камней из одной из кучек либо положить на стол несколько камней из числа взятых им ранее в игре. Камни можно добавить в одну из имеющихся кучек или образовать из них новую кучку. Выигрывает игрок, взявший со стола последний камень.

Стратегии всех игр из упражнений приведены в недавно вышедшей книге: И.А.Копылов. Логические игры: Разрабатываем стратегию парных игр. – М.: ЛЕНАНД, 2019.

Относительность движения в задачах динамики

А.ЧЕРНОУЦАН

Задачи динамики, в которых удобно (а иногда и необходимо) использовать разные системы отсчета – СО, можно условно разделить на две группы. В задачах первой группы переход в другую СО является удобным приемом для учета кинематических связей, накладываемых на поведение двух движущихся тел нитями, стержнями, твердыми поверхностями (одно из тел движется по поверхности другого). В задачах второй группы дополнительная СО, например СО центра масс, используется для упрощения записи уравнений движения и законов сохранения импульса и энергии.

Поскольку мы будем использовать только поступательно движущиеся СО, то формулы сложения скоростей и ускорений выглядят совершенно одинаково:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{СО}}, \quad (1)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{СО}}. \quad (2)$$

Приступим к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *К концам нити, перекинутой через легкий блок, прикрепили грузы массами $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 10$ кг. К оси блока приложили силу, направленную вертикально вверх и равную $F = 120$ Н (рис.1). С каким ускорением будет подниматься блок?*

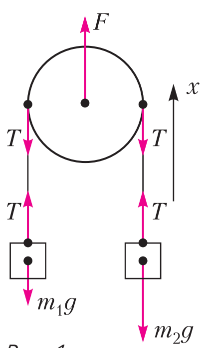


Рис. 1

Решение. Поскольку блок идеальный (невесомый и вращается без трения), то силы натяжения нитей по обе стороны блока одинаковы (вращательный момент равен нулю). Второй закон Ньютона для невесомого блока имеет вид $F - 2T = 0$, откуда находим $T = 60$ Н. Записав уравнения второго закона Ньютона для грузов:

$$T - m_1g = m_1a_{1x},$$

$$T - m_2g = m_2a_{2x},$$

(ось x направлена вверх), вычисляем $a_{1x} = 10$ м/с^2, $a_{2x} = -4$ м/с^2. Чтобы найти ускорение блока, надо записать кинематическую связь между тремя ускорениями, обусловленную нерастяжимостью нити. Это можно сделать разными способами, например выразив длину нити через координаты грузов и блока и затем дважды продифференцировав это соотношение. Попробуйте проделать это самостоятельно. Мы же отметим, что в СО, связанной с блоком, кинематическая связь очевидна – относительные ускорения грузов равны по модулю и противоположны по знаку:

$$(a_{1б})_x + (a_{2б})_x = 0.$$

Используя формулу (2) (закон сложения ускорений), получаем

$$(a_{1x} - a_{бx}) + (a_{2x} - a_{бx}) = 0,$$

откуда

$$a_{бx} = \frac{1}{2}(a_{1x} + a_{2x}) = \frac{F(m_1 + m_2)}{4m_1m_2} - g = 3 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2. *В центре верхней грани вертикального цилиндра, стоящего на гладкой горизонтальной поверхности, сделали полусферическую выемку (рис.2). С края выемки съезжает маленькая шайба. Найдите силу давления шайбы на поверхность выемки в нижней точке движения. Масса шайбы $m_1 = 0,2$ кг, масса цилиндра $m_2 = 0,4$ кг. Трением пренебречь.*

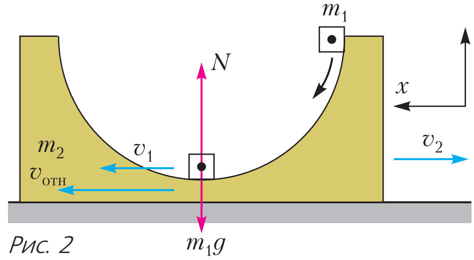


Рис. 2

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190406

Решение. Искомая сила давления шайбы на поверхность выемки равна по величине силе реакции, которая входит во второй закон Ньютона, записанный для нижней точки траектории шайбы в проекции на вертикальную ось y. В СО земли траектория шайбы представляет собой сложную кривую (не окружность) за счет того, что цилиндр также движется, причем с переменной скоростью. Ускорение шайбы можно найти в СО, связанной с цилиндром, где шайба движется по окружности радиусом R: $a_{\text{отн}} = v_{\text{отн}}^2/R$. Поскольку ускорение цилиндра в проекции на ось y в рассматриваемый момент равно нулю, то в соответствии с формулой (2) таким же будет ускорение шайбы относительно земли. Получаем

$$N - m_1 g = m_1 \frac{v_{\text{отн}}^2}{R}.$$

Закон сложения скоростей (1) в проекции на ось x дает

$$v_{\text{отн}} = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2.$$

Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

$$m_1 g R = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Из закона сложения скоростей и закона сохранения импульса выразим v_1 и v_2 через $v_{\text{отн}}$:

$$v_1 = \frac{m_2 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{m_1 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2}$$

и подставим в закон сохранения энергии. Получим

$$m_1 g R = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_{\text{отн}}^2}{2},$$

откуда выражаем $v_{\text{отн}}^2$, подставляем во второй закон Ньютона и находим силу реакции:

$$N = m_1 g + m_1 \frac{v_{\text{отн}}^2}{R} = m_1 g \frac{3m_2 + 2m_1}{m_2} = 8 \text{ Н}.$$

Для проверки ответа можно m_2 устремить к бесконечности (неподвижный цилиндр) и мы получим известный результат $N = 3m_1 g$.

Задача 3. *Маленькая шайба массой m_1 соскальзывает с вершины гладкой полусферы радиусом R и массой m_2, которая стоит на гладкой горизонтальной поверхности (рис.3). Найдите, для случая $m_1 = m_2$, на какой высоте шайба оторвется от полусферы.*

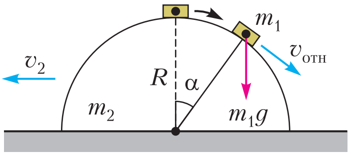


Рис. 3

Решение. Поскольку в момент отрыва шайбы от поверхности полусферы ускорение полусферы обращается в ноль, то в соответствии с законом сложения ускорений (2) ускорение шайбы относительно земли равно ускорению шайбы относительно полусферы. В СО полусферы радиус кривизны траектории в момент отрыва все еще равен R и проекция ускорения на радиальное направление равна $v_{\text{отн}}^2/R$. Второй закон Ньютона будет иметь вид

$$m_1 g \cos\alpha = m_1 \frac{v_{\text{отн}}^2}{R}.$$

Закон сложения скоростей (1) для данного случая

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_2$$

изображен на рисунке 4. С помощью теоремы косинусов выражаем v_1:

$$v_1^2 = v_2^2 + v_{\text{отн}}^2 - 2 v_2 v_{\text{отн}} \cos\alpha.$$

Закон сохранения импульса можно записать в СО земли (опираясь на рисунок 4), но проще всего сделать это в СО, движущейся влево со скоростью v_2:

$$(m_1 + m_2) v_2 = m_1 v_{\text{отн}} \cos\alpha.$$

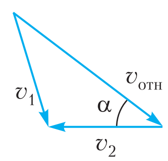


Рис. 4

Выразим отсюда v_2, подставим в закон сохранения энергии

$$m_1 g R (1 - \cos\alpha) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

и после преобразований придем к уравнению

$$m_1 g R (1 - \cos\alpha) = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{2} \left(1 - \frac{m_1 \cos^2\alpha}{m_1 + m_2}\right).$$

Подставляя $v_{\text{отн}}^2$ из второго закона Ньютона, приходим к кубическому уравнению относительно $\cos\alpha$:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2 = 0.$$

Проверкой правильности полученного уравнения может служить то, что в пределе $m_2 \to \infty$ (неподвижная полусфера) получается известный результат $\cos\alpha = 2/3$. В случае $m_1 = m_2$ уравнение

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

имеет простой корень $x = 2$. Разделив кубический многочлен на $x - 2$, придем к квадратному уравнению относительно $x = \cos\alpha$:

$$x^2 + 2x - 2 = 0,$$

откуда $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$, а искомая высота отрыва шайбы

$$h = R\cos\alpha = R\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

В следующих двух задачах ускорение СО не равно нулю и закон сложения ускорений работает в полную силу.

Задача 4. *Маленькая шайба массой m_1 соскальзывает с вершины гладкого клина массой m_2, стоящего на гладкой горизонтальной плоскости (рис.5). Найдите время соскальзывания шайбы, если высота клина h, а угол при основании клина α.*

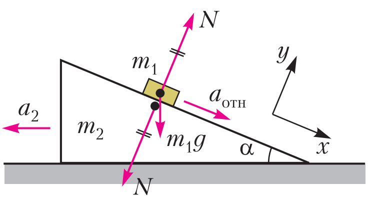


Рис. 5

Решение. Чтобы определить время соскальзывания шайбы, надо найти ускорение $a_{отн}$ шайбы относительно клина:

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{a_{отн}t^2}{2}.$$

Закон сложения ускорений (2) связывает ускорение $\vec{a}_1$ шайбы относительно земли, ускорение $\vec{a}_2$ клина (ускорение СО) и $\vec{a}_{отн}$ (рис.6):

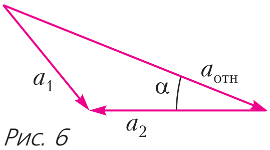


Рис. 6

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_2.$$

Опираясь на этот рисунок, запишем второй закон Ньютона для шайбы $\vec{N} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1$ в проекциях на оси x и y:

$$m_1 g\sin\alpha = m_1\left(a_{отн} - a_2\cos\alpha\right),$$

$$N - m_1 g\cos\alpha = -m_2 a_2 \sin\alpha.$$

Проекция второго закона Ньютона для клина на горизонтальную ось имеет вид

$$N\sin\alpha = m_2 a_2.$$

Исключая N из последних двух уравнений, выражаем ускорение клина a_2:

$$a_2 = \frac{m_1 g\cos\alpha\sin\alpha}{m_1\sin^2\alpha + m_2},$$

после чего находим $a_{отн}$:

$$a_{отн} = g\sin\alpha\cdot\frac{m_1 + m_2}{m_1\sin^2\alpha + m_2}.$$

(В пределе $m_2 \to \infty$, неподвижный клин, получаем правильный ответ $g\sin\alpha$.) Подставив $a_{отн}$ в самое первое кинематическое равенство, найдем время соскальзывания.

Задача 5. *Брусок стоит на гладкой горизонтальной плоскости, на бруске закреплен штатив, к которому на легкой нити подвешен груз массой m_1 (рис.7). Масса бруска вместе со штативом равна m_2. Вначале нить с грузом удерживают в горизонтальном положении, затем отпускают. Найдите силу натяжения нити в момент, когда нить составляет угол α с вертикалью.*

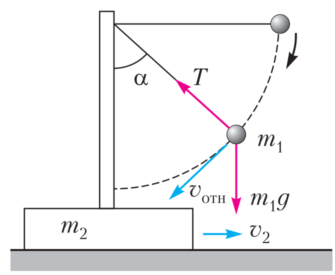


Рис. 7

Решение. Ускорение груза относительно земли выражается через ускорение бруска $\vec{a}_2$ и ускорение $\vec{a}_{отн}$ груза относительно СО, связанной с бруском (формула (2)):

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_2.$$

Это соотношение (точнее, два его «участника») изображено на рисунке 8, где $\vec{a}_{отн}$ разложено на две составляющие – нормальную $\vec{a}_n$ и тангенциальную $\vec{a}_\tau$. Поскольку в СО бруска груз движется по окружности радиусом l, то $a_n = v_{отн}^2/l$. В проекции на ось, направленную вдоль нити к центру окружности, второй закон Ньютона для

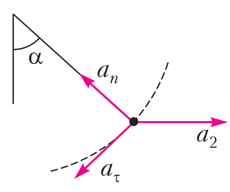


Рис. 8

груза принимает вид

$$T - m_1 g\cos\alpha = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{l} - m_1 a_2 \sin\alpha.$$

Записав второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось:

$$T\sin\alpha = m_2 a_2$$

и исключив ускорение a_2, получим уравнение

$$T\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\sin^2\alpha\right) = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{l} + m_1 g\cos\alpha.$$

Чтобы найти $v_{\text{отн}}^2$, надо записать законы сохранения импульса и энергии. Закон сохранения импульса проще всего записать в СО, движущейся вправо со скоростью v_2:

$$(m_1 + m_2)v_2 = m_1 v_{\text{отн}}\cos\alpha\,.$$

Это соотношение мы используем, чтобы выразить v_2 через $v_{\text{отн}}$. А чтобы избавиться от v_1^2 в законе сохранения энергии

$$m_1 gl\cos\alpha = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

запишем закон сложения скоростей (1):

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_2,$$

изобразим его на рисунке 9 и воспользуемся теоремой косинусов:

$$v_1^2 = v_2^2 + v_{\text{отн}}^2 - 2v_2 v_{\text{отн}}\cos\alpha.$$

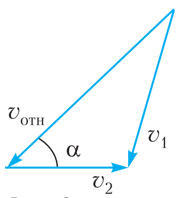


Рис. 9

Подставив это выражение в закон сохранения энергии и выразив v_2 через $v_{\text{отн}}$, придем к уравнению

$$m_1 gl\cos\alpha = \frac{m_1}{2}\,\frac{m_1\sin^2\alpha + m_2}{m_1 + m_2}\,v_{\text{отн}}^2.$$

Выразив отсюда $m_1 v_{\text{отн}}^2/l$ и подставив в уравнение для T, получим

$$T = \frac{m_1 m_2 g\cos\alpha}{m_1\sin^2\alpha + m_2}\left(\frac{2(m_1 + m_2)}{m_1\sin^2\alpha + m_2} + 1\right).$$

Полученный ответ может быть проверен двумя способами. При $m_2 \to \infty$ (неподвижный брусок) это выражение переходит в известный результат $3m_1 g\cos\alpha$. При $\alpha = 0$ это выражение совпадает с результатом задачи 2.

Теперь рассмотрим несколько примеров того, как использование СО центра масс может существенно упростить задачу. Напомним, что координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по формулам

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots},\ \ldots,$$

а скорость центра масс – по формуле

$$\vec{v}_{\text{ц}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\vec{p}_{\text{сист}}}{m_{\text{сист}}}.$$

Ускорение центра масс равно отношению суммы всех внешних сил, действующих на тела системы, к массе системы:

$$\vec{a}_{\text{ц}} = \frac{\vec{F}_{\text{внеш}}}{m_{\text{сист}}}.$$

Из последних двух формул видно, что скорость центра масс замкнутой системы ($\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, $\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$) постоянна, т.е. СО центра масс замкнутой системы является инерциальной.

Задача 6. *Шар массой m, движущийся со скоростью v, сталкивается с шаром массой 2m, движущимся ему навстречу со скоростью 2v. Найдите скорости шаров после удара, считая его центральным и абсолютно упругим.*

Решение. Задачу об упругом центральном ударе решают обычно через составление системы двух уравнений – законов сохранения импульса и энергии. Как правило, ограничиваются случаем, когда один из шаров вначале покоится, иначе система уравнений становится слишком громоздкой. Однако в СО центра масс конечные скорости определяются сразу, без составления системы уравнений. Импульс системы был и остается равным нулю, и достаточно изменить направление скоростей на противоположные, чтобы обеспечить и сохранение импульса и сохранение энергии.

Решение задачи состоит из нескольких шагов. Выберем положительное направление оси x вдоль начальной скорости первого шара. Скорости в СО земли будем обозначать буквами v, относительно центра масс – буквами u, скорости после удара будем писать со штрихом.

Шаг 1. Найдем скорость центра масс:

$$v_{\text{ц}x} = \frac{mv - 2m\cdot 2v}{m + 2m} = -v.$$

Шаг 2. Определим скорости шаров в СО центра масс до удара (формула (1)):

$$u_{1x} = v_{1x} - v_{\text{ц}x} = v - (-v) = 2v,$$
$$u_{2x} = v_{2x} - v_{\text{ц}x} = -2v - (-v) = -v.$$

Шаг 3 (главный). Определим скорости шаров в СО центра масс после удара:

$$u'_{1x} = -u_{1x} = -2v, \quad u'_{2x} = -u_{2x} = v.$$

Шаг 4. Найдем конечные скорости шаров в изначальной СО с помощью закона сложения скоростей (1):

$$v'_{1x} = u'_{1x} + v_{цx} = (-2v) + (-v) = -3v,$$

$$v'_{2x} = u'_{2x} + v_{цx} = v + (-v) = 0.$$

Задача 7. *Шар массой m_1 налетает на покоящийся шар массой $m_2 < m_1$. Найдите максимальный угол отклонения налетающего шара в результате косого абсолютно упругого удара. Поверхности шаров гладкие.*

Решение. Перейдем в СО центра масс, скорость которого

$$\vec{v}_ц = \frac{m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

Начальные скорости шаров в этой СО равны

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_ц = \frac{m_2\vec{v}_1}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{u}_2 = 0 - \vec{v}_ц = -\frac{m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку импульс системы после соударения должен остаться равным нулю, а энергия должна сохраниться, то конечные скорости шаров равны начальным, а направлены в противоположных направлениях (рис.10):

$$u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2,$$

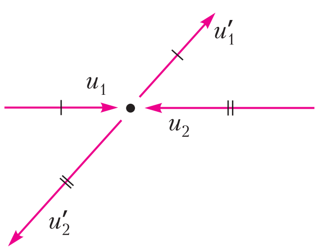


Рис. 10

причем $\vec{u}'_1$ может составлять любой угол (от нуля до $360°$) с $\vec{u}_1$. Возвращаясь в изначальную СО, получаем

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_ц + \vec{u}'_1$$

Конец вектора $\vec{u}'_1$ описывает окружность (рис.11). Максимальный угол между $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}_1$ соответствует касательной к окружности:

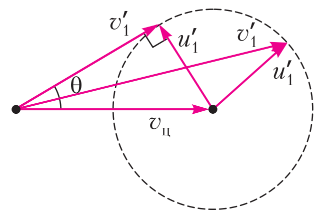


Рис. 11

$$\sin\theta = \frac{u'_1}{v_ц} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Задача 8. *Два шарика массами m и 3m, соединенные нитью длиной l, движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент один из шариков (массой m) неподвижен, а скорость другого равна v и направлена перпендикулярно нити. Чему равна сила натяжения нити?*

Решение. В СО земли движение шариков выглядит сложно. Однако если перейти в СО центра масс, то каждый из шариков будет равномерно двигаться по окружности вокруг неподвижного центра масс. Центр масс находится между шариками на расстояниях

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{3}{4}l, \quad l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4}l$$

от первого и второго шариков соответственно. Скорость центра масс относительно земли равна (рис.12)

$$v_ц = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = \frac{3}{4}v.$$

Скорости шариков относительно центра масс

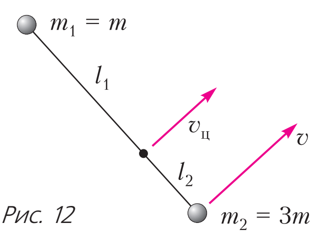


Рис. 12

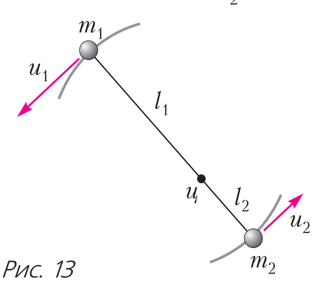


Рис. 13

равны (рис.13)

$$u_1 = 0 - v_ц = -\frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = -\frac{3}{4}v,$$

$$u_2 = v - v_ц = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4}v.$$

Сила натяжения нити может быть найдена из второго закона Ньютона для любого из шариков:

$$T = \frac{m_1 u_1^2}{l_1} = \frac{m_2 u_2^2}{l_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{v^2}{l} = \frac{3}{4}\frac{mv^2}{l}.$$

В рассмотренных выше задачах мы обошлись без привлечения неинерциальных систем отсчета – НСО и сил инерции. Однако умение работать в НСО в некоторых задачах может быть незаменимым. Мы ограничимся несколькими примерами использования сил инерции в поступательно движущихся СО.

Выразим ускорение произвольного тела во втором законе Ньютона с помощью формулы сложения ускорений (2):

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}_{отн} + \vec{a}_{СО}\right)$$

($\vec{F}$ – равнодействующая обычных сил) и перенесем $m\vec{a}_{СО}$ в левую часть равенства:

$$\vec{F} + \left(-m\vec{a}_{СО}\right) = m\vec{a}_{отн}.$$

Определяя силу инерции формулой

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_{СО},$$

получаем второй закон Ньютона в НСО:

$$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = m\vec{a}_{отн}.$$

Как и сила тяжести, сила инерции пропорциональна массе тела. Равнодействующая сил инерции, как и сил тяжести, приложена к центру тяжести тела. Во многих случаях оказывается удобным присоединить силу инерции к силе тяжести и считать, что появление сил инерции привело к изменению ускорения свободного падения:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_{СО}.$$

Задача 9. *Во сколько раз изменится циклическая частота колебаний математического маятника, если точка подвеса будет перемещаться с горизонтальным ускорением $a = 0{,}75g$?*

Решение. Перейдем в СО, связную с точкой подвеса маятника. В этой НСО действует горизонтальная сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение точки подвеса. В положении равновесия нить будет направлена вдоль нового ускорения свободного падения $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$ (рис.14), т.е. будет отклонена назад под углом, тангенс которого равен a/g. Циклическая частота малых колебаний маятника около этого положения равновесия равна

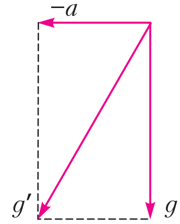


Рис. 14

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}} = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}}.$$

Отношение новой частоты колебаний к старой (с неподвижной точкой подвеса) равно

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{g}} = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}12.$$

Задача 10. *Тело, плотность которого $\rho = 500$ кг/м^3, плавает на поверхности воды в сосуде. Сосуд поднимается вертикально вверх с ускорением $a = g/2$. Какая часть объема тела (в процентах) погружена в воду?*

Решение. Поскольку в уравнении

$$\rho V g = \rho_в g V_{погр},$$

выражающем условие плавания тела, ускорение g сокращается, а переход в НСО, связанную с сосудом, сводится к замене g на $g' = g + a$, то доля погруженного объема не меняется:

$$\frac{V_{погр}}{V} = \frac{\rho}{\rho_в} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Решая эту задачу в СО земли, часто делают ошибку, полагая, что поскольку сила Архимеда возрастает, то глубина погружения должна увеличиться. Чтобы избежать этой ошибки, надо разобраться, как меняется формула для силы Архимеда за счет движения сосуда с ускорением. В НСО же такой проблемы нет.

Задача 11. *Два одинаковых тела лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Тела соединены прямой ненатянутой нитью длиной l. Середину нити начинают перемещать горизонтально перпендикулярно нити с ускорением a. Найдите, на сколько нагреются тела при ударе, если считать удар абсолютно неупругим, а удельную теплоемкость равной c.*

Решение. В СО земли движение тел выглядит сложно. Однако в СО, в которой центр нити неподвижен, на каждое из тел действует постоянная сила инерции $F_{\text{ин}} = ma$, направленная перпендикулярно нити. Такая задача эквивалентна задаче о падении и столкновении двух тел, связанных нитью, середина которой неподвижна, но с заменой g на a. Закон сохранения энергии для такой задачи выглядит просто:

$$2 \cdot ma\frac{l}{2} = c \cdot 2m \cdot \Delta t, \text{ откуда } \Delta t = \frac{al}{2c}.$$

Напоследок – задача, в которой одно из действующих лиц имеет значительно большую массу, чем другое.

Задача 12. *Санки съезжают с гладкой горки высотой h и приобретают скорость v. Начальная потенциальная энергия mgh равна конечной кинетической энергии $mv^2/2$. Однако в инерциальной СО, которая движется горизонтально со скоростью v, начальная энергия равна $mgh + mv^2/2$, а конечная равна нулю. Спасите закон сохранения энергии.*

Решение. Чтобы понять, куда делась энергия, надо ввести в игру еще одного участника, энергия которого также будет меняться. Этим участником должно стать тело, с которым санки взаимодействуют при спуске. Этим телом является... земной шар! Оказывается, изменением энергии Земли (любого очень массивного тела) можно пренебречь только в СО, где это тело покоится. Изменение скорости Земли при скатывании санок можно найти из закона сохранения импульса

$$mv - M \cdot \Delta V = 0,$$

и изменение энергии Земли, равное

$$\frac{M(\Delta V)^2}{2} = \frac{m}{M}\frac{mv^2}{2},$$

оказывается ничтожно малым. Однако в СО, которая движется со скоростью v, изменение энергии Земли, равное

$$\frac{M(v + \Delta V)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = Mv(\Delta V) + \frac{M(\Delta V)^2}{2} \approx mv^2,$$

не только не является бесконечно малым, но в точности компенсирует потерянную нами в условии энергию.

Мораль этой задачи такова: изменением энергии очень массивного тела можно пренебрегать только в СО, где это тело покоится. Хорошо знакомый пример: упругий удар мяча о стенку. Если стенка неподвижна, то мяч отскакивает с такой же скоростью, энергия стенки не меняется. Если же стенка движется, то скорость после отскока не равна начальной – энергия стенки изменяется!

Упражнения

1. К потолку кабины лифта, поднимающегося с ускорением $2\ \text{м/с}^2$, прикреплен динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами 1 кг и 3 кг. Определите показания динамометра.

2. Демонстрационная установка состоит из наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю» радиусом R. Установка закреплена на тележке, стоящей на горизонтальной плоскости. Груз массой 0,2 кг съезжает с высоты $3R$, отсчитанной от нижней точки петли. Чему равна сила давления груза в верхней точке петли? Трением пренебречь. Масса установки вместе с тележкой в 4 раза больше массы груза.

3. Два шара двигаются в одном направлении, первый со скоростью v, второй со скоростью $2v$. Масса второго шара в 4 раза больше массы первого. Найдите скорости шаров после абсолютно упругого центрального удара.

4. В маятниковых часах используется математический маятник с периодом колебаний 1 с. Часы помещают в ракету, которая начинает подниматься с постоянным ускорением. Чему равно это ускорение, если за 7 с подъема маятник часов совершает 8 полных колебаний? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$.

5. Открытую цистерну в форме куба со стороной 2 м, стоящую на платформе, заполнили жидкостью наполовину. Платформа стала разгоняться с ускорением $2\ \text{м/с}^2$. На сколько поднялся уровень жидкости у задней стенки платформы к тому моменту, когда жидкость и платформа стали двигаться как единое целое?

6. Пуля массой 20 г, летящая со скоростью 100 м/с, попадает в летящий ей навстречу очень массивный шар, скорость которого 10 м/с, и застревает в нем. Какое количество теплоты выделилось при ударе?

7. Для системы, описанной в задаче 3 статьи, найдите зависимость силы давления N шайбы от угла α.

Указание. Воспользуйтесь подходом, развитом в задаче 5 статьи.

Московская физическая олимпиада школьников 2019 года

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

7 класс

1. Нильс на веточке (1 тур)

Рост Нильса Хольгерссона после заклятия гнома уменьшился в 10 раз. Пропорции тела остались прежними. Когда он был большим, то сил рук еле-еле хватало, чтобы подтянуться на турнике. Какой груз маленький Нильс может поднять вместе с собой, подтягиваясь на руках на горизонтальной веточке дерева? Масса большого Нильса 30 кг.

Подсказка. Сила мышц пропорциональна площади их поперечного сечения.

С.Варламов

2. «Жидкий» песок (1 тур)

Если сосуд с песком подвергнуть вибрации (проще говоря, потрясти), то можно наблюдать интересное явление – песок становится похож на жидкость. Тяжелые предметы (с большой плотностью) тонут в этом «жидком» песке, а легкие (например, деревянные) предметы наоборот всплывают на поверхность, даже если изначально они были на дне сосуда. Это происходит потому, что при встряхивании уменьшаются силы трения между песчинками. Рассмотрим опыт. На дне цилиндрического сосуда находится песок. Поверх песка насыпана галька. Сосуд подвергают вибрации, и песок становится «жидким». Галька постепенно опускается на дно сосуда, а песок заполняет все пустоты между ее камнями. Чему станет равен уровень содержимого в сосуде после оседания гальки, если изначально уровень песка был $h_1 = 0{,}6$ м, а уровень гальки $h_2 = 1$ м (рис.1)? Плотность камней гальки $\rho_0 = 2600$ кг/м^3, а ее насыпная плотность $\rho_1 = 1500$ кг/м^3.

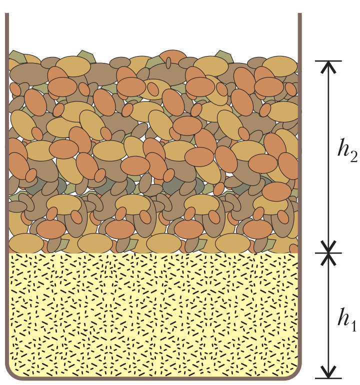


Рис. 1

М.Ромашка

3. Василий и бетон (2 тур)

Василию нужно залить фундамент дачного дома, для чего ему необходимо 9,4 м^3 бетона, при этом бюджет Василия ограничен суммой 50000 рублей. Известно, что для получения бетона необходимо смешать цемент с песком и щебнем, при этом чем больше объемная доля цемента в смеси, тем качественнее получается бетон и тем больше значение марки бетона. В магазине Василий узнал, что цена цемента 180 руб. за 50 кг, цена песка 102 руб. за 50 кг, цена щебня 130 руб. за 40 кг, а соотношения объемов материалов для разных марок бетона указаны в таблице. К сожалению, часть данных в таблице была утеряна.

Марка бетона	$V_ц : V_п : V_щ$	Цена бетона (руб. за м^3)
М200	1,0 : 3,2 : 4,9	
М250	1,0 : 2,4 : 3,9	
М300	1,0 : 2,2 : 3,7	
М400		5385

1) Помогите Василию заполнить пустые ячейки в таблице. Известно, что объем песка в марке бетона М400 в два раза меньше объема щебня.

2) Определите, какую наилучшую марку бетона может позволить себе Василий.

Плотность цемента $\rho_ц = 1200$ кг/м^3, плотность песка $\rho_п = 1600$ кг/м^3, плотность щебня $\rho_щ = 2100$ кг/м^3.

Н.Трушников

4. О пробке (2 тур)

Поток автомашин движется по четырехполосной магистрали. При этом средняя скорость автомобиля 60 км/ч, средняя длина автомобиля 4 метра. Вблизи места дорожно-транспортного происшествия количество полос, доступных для движения, уменьшается до двух, а скорость автомашин уменьшается до 6 км/ч. На рисунке 2 приведена схема, изображенная без соблюдения масштаба. Если среднее расстояние между автомобилями при движении по магистрали небольшое, то перед ДТП образуется пробка – область, в которой машины движутся вплотную друг к друг с маленькой скоростью.

1) При каком среднем расстоянии x между автомобилями при их движении по магистрали произошедшее ДТП не приведет к возникновению протяженной пробки?

2) За полтора километра до ДТП на трассе располагается перекресток со светофором. За какое время после возникновения ДТП необходимо ликвидировать его последствия для дорожного движения, чтобы это не привело к затору на перекрестке, если $x = 16$ м?

С.Ролдугин

5. Пешком до кафе (2 тур)

Утром после крепкого сна Крокодил Гена и Чебурашка отправились каждый из своего дома в кафе позавтракать. Шли друзья навстречу друг другу с постоянными скоростями по прямой дороге. Каково же было их удивление, когда они встретились у входа в кафе. Оказалось, что за 5 мин до встречи расстояние между ними равнялось 1200 м, за 10 мин до встречи – 2025 м, за 15 мин – 2475 м и за 20 мин – 2655 м. Найдите расстояние между домами, в которых живут Гена и Чебурашка. Определите, с какими скоростями они шли.

И.Акулич

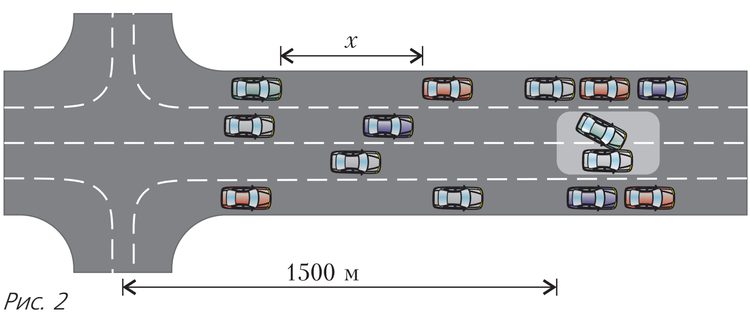


Рис. 2

8 класс

1. Минимальная средняя скорость (2 тур)

Между городами A и B действует автобусный маршрут, длина которого $s = 180$ км. Движение автобуса по этому маршруту не равномерное: из-за различных дорожных условий скорость автобуса часто меняется. В момент отправления пассажир Петров засекает на своих часах время и каждые 10 минут вычисляет среднюю скорость автобуса за эти 10 минут. Для этого он узнает путь, пройденный автобусом, с помощью GPS-навигатора. Автобус доехал из A до B за 3 часа. За это время Петров получил 18 значений средней скорости: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{18}$.

1) Известно, что ни одно из значений не превышает 63 км/ч. Чему может быть равно наименьшее из этих значений (в каких пределах оно может лежать)?

2) Ответьте на тот же вопрос, если ни одно из измеренных значений средней скорости не превышает 64 км/ч.

М.Ромашка

2. Печка в Солнце (2 тур)

Вблизи центра Солнца каждая тонна находящегося там звездного вещества производит 1 Дж энергии каждую секунду за счет термоядерных реакций. Вся энергия, произведенная в центре, «добравшись» до поверхности Солнца, излучается во все стороны равномерно. На Земле на участок площадью 1 м^2, расположенный перпендикулярно солнечным лучам, за каждую секунду попадает энергия, равная 1370 Дж (эта величина называется солнечной постоянной). Расстояние от Земли до Солнца 150 млн км, плотность вещества вблизи центра Солнца 160 г/см^3, радиус Солнца 655 тыс. км. Используя эти сведения, оцените радиус области внутри Солнца, в которой идут термоядерные реакции, и сравните его с радиусом Солнца.

Для справки: площадь поверхности шара радиусом R равна $S = 4\pi R^2$, а объем шара равен $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

С.Варламов

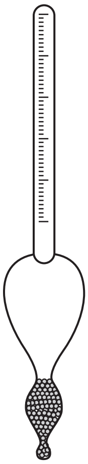


Рис. 3

3. Самодельный ареометр (2 тур)

Ареометр – прибор для измерения плотности жидкостей, принцип работы которого основан на законе Архимеда. Обычно он представляет собой трубку, в нижней части которой помещен груз (рис.3). Верхняя часть ареометра – цилиндр, на который нанесена шкала, проградуированная в значениях плотности. Считается, что ареометр изобрела Гипатия Александрийская – знаменитая женщина-ученый древности. Рассмотрим конструкцию самодельного ареометра для измерения плотности молока, т.е. лактометра. Плотность молока варьируется в пределах от минимального значения $\rho_1 = 1015$ кг/м^3 до максимального $\rho_2 = 1040$ кг/м^3. Разность максимального и минимального значений много меньше среднего значения, благодаря чему шкала такого лактометра линейна. Для изготовления лактометра взяли твердую цилиндрическую пластиковую трубку с внешним диаметром $d = 16$ мм, внутрь которой снизу поместили груз и закрыли нижний конец заглушкой. Снаружи вся конструкция выглядит как цилиндр, а ее общая масса равна $m = 40$ г. На расстоянии $h_0 = 20$ см от нижнего конца трубки нанесли первое деление, которое соответствовало некоторой плотности ρ_0, немного меньшей ρ_1. Вниз от первого деления стали наносить другие деления, расстояние между которыми было $\Delta h = 1$ мм.

1) Чему равна цена деления $\Delta\rho$ такого прибора?

2) Чему равна плотность ρ_0, соответствующая первому делению?

3) Какое минимальное число N делений нужно нанести, чтобы измерять плотность молока во всем диапазоне значений от ρ_0 до ρ_2?

М.Ромашка

4. Таяние снега (2 тур)

Снежный покров состоит из верхнего слоя свежевыпавшего снега толщиной $H_1 = 20$ см и нижнего слоя старого слежавшегося снега толщиной $H_2 = 10$ см. В две одинаковые цилиндрические мензурки с внутренним диаметром $d_0 = 5$ см и высотой $h_0 = 7$ см были помещены образцы снега из каждого слоя, при этом снег в каждую мензурку засыпался доверху, но не утрамбовывался, снег из разных слоев набирался в разные мензурки. После этого мензурки разместили на столе в отапливаемом помещении. На рисунке 4 приведена фотография, полученная в процессе эксперимента. Наблюдения показывают, что с течением времени снежный цилиндр уменьшается в размерах, но сохраняет свою форму. Высота нижней темной части снежного цилиндра со временем растет. Слой воды заметной толщины появляется на дне мензурки после того, как весь снег становится темным. В мензурке со свежим снегом к моменту появления воды на дне диаметр цилиндра из снега $d_1 = 3$ см, а высота $h_1 = 4$ см. На дне мензурки со слежавшимся снегом вода появляется, когда диаметр цилиндра из снега $d_2 = 4$ см, а высота $h_2 = 5$ см. Можно считать, что снег состоит из кристалликов льда и пустот между ними, внутренняя структура снега при таянии не меняется. Пористостью снега α называют отношение объема пустот ко всему объему снега: $\alpha = \dfrac{V_п}{V_0}$.

Рис. 4

1) Определите пористости свежего и слежавшегося снега, считая что снег тает только на внешней поверхности цилиндров.

2) На улице резко потеплело. Снег стал таять. Оцените высоту снежного покрова в тот момент, когда из-под него потекут ручьи. Можно считать, что таяние происходит при условиях, похожих на условия из п.1), но снег тает только на верхней поверхности слоя.

Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Н.Трушников

9 класс

1. Balance board (1 тур)

Балансборд – тренажер для тренировки чувства равновесия – представляет собой жесткую доску, лежащую на цилиндрическом ролике (рис.5). Базовое упражнение

Рис. 5

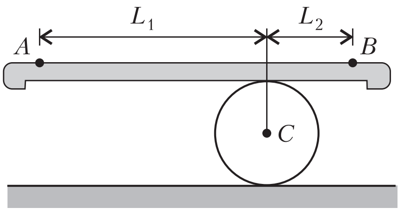


Рис. 6

заключается в том, чтобы сохранять равновесие, перекатываясь на ролике, при этом желательно, чтобы доска располагалась практически горизонтально. Пусть взаимодействие ступней ног с доской происходит в точках A и B (рис.6) и положение этих точек относительно доски не меняется при выполнении упражнения. Ролик по полу и по доске не проскальзывает. В крайнем правом положении расстояния по горизонтали между точками A и B и вертикальной прямой, на которой лежит ось ролика C, равны L_1 и L_2 соответственно. Человек перекатывается в крайнее левое положение, в котором расстояние между точками A и C по горизонтали становится равным L_2.

1) На какое расстояние по горизонтали смещается центр масс человека: относительно доски; относительно земли?

2) На какое расстояние по горизонтали смещается точка A?

П.Крюков

2. Улетающий шар (1 тур)

В цилиндрическую кастрюлю, радиус основания которой $R = 10$ см, налита вода и опущен кусок льда массой $m = 400$ г. В этот кусок вморожена нитка, привязанная к воздушному шарику объемом $V = 8$ л, заполненному гелием. При этом уровень воды в кастрюле $h = 30$ см. Кусок льда постепенно тает, и в некоторый момент воздушный шарик поднимает его над поверхностью воды. После этого шарик и лед улетают. Чему в результате станет равен уровень воды в кастрюле? Плотность воды $\rho_1 = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_2 = 900$ кг/м^3, воздуха $\rho_3 = 1{,}25$ кг/м^3, гелия $\rho_4 = 0{,}18$ кг/м^3, массой оболочки шарика можно пренебречь. Считайте, что масса капель воды, образовавшихся при таянии льда и упавших в кастрюлю после отрыва льда от поверхности воды, пренебрежимо мала. Некоторые числовые данные не являются необходимыми для решения, но их можно использовать, если так вам будет проще.

М.Ромашка

3. Вычисление скорости света (2 тур)

Первая оценка скорости света была дана Рёмером в 1675 году. Изучая движение Ио (спутника Юпитера), он получил значение, близкое к 220000 км/с. Орбита Ио расположена в плоскости орбиты Земли, поэтому спутник периодически исчезает в тени Юпитера. Интервал между двумя последовательными появлениями Ио из тени Юпитера в среднем равен 42,5 ч. Однако, согласно современным исследованиям при различных положениях Солнца, Земли и Юпитера, этот интервал может отклоняться от среднего значения не более чем на 16 с в большую или меньшую сторону. По представленным данным определите скорость света, если расстояние от Земли до Солнца $1{,}5 \cdot 10^8$ км. Можно считать, что орбитальная скорость Юпитера вокруг Солнца намного меньше, чем у Земли.

О.Рёмер

4. Паровая пленка и пузырьковое кипение (2 тур)

Стальной шарик ($m = 110$ г, $R = 1{,}5$ см, $c = 500$ Дж/(кг · °С)), нагретый до температуры $T_1 = 500$ °С, лежит на теплоизолирующей подставке в прозрачном сосуде, который заполняют дистиллированной водой ($m_0 = 0{,}4$ кг, $T_0 = 20$ °С), так что шарик оказывается примерно в середине столба воды. Наблюдается интересное явление. Вокруг шарика очень быстро образуется тонкая паровая пленка, после этого некоторое время толщина пленки остается постоянной и равной $d = 0{,}5$ мм, образование пузырьков пара (как при кипении) не наблюдается, теплообмен между водой и шариком происходит через пленку. В момент, когда температура шарика уменьшается до $T_2 = 250$ °C, пленка «срывается» – и в жидкости вблизи шарика начинается бурное кипение, которое продолжается до тех пор, пока температура шарика не уменьшится до $T_к = 100$ °C. Можно считать, что в процессах образования пленки и пузырькового кипения все количество теплоты, отданное шариком, идет на испарение воды, но треть пара во всплывающих пузырьках (образовавшихся при кипении) конденсируется. Теплообменом с окружающей средой и теплоизолирующей подставкой, а также нагревом пара можно пренебречь. Определите температуру воды к моменту окончания теплообмена между шариком и водой. Удельная теплоемкость и удельная теплота испарения воды равны $c_0 = 4200$ Дж/(кг·°C) и $L = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. Средняя плотность пара $\rho \approx 0{,}6$ кг/м^3.

П.Крюков

10 класс

1. Ходьба на Земле и на Марсе (1 тур)

В простейшей физической модели пешей ходьбы считается, что центр масс человека движется по периодической кривой, повторяющийся участок которой представляет собой дугу окружности с радиусом, равным длине ноги человека H (рис.7). Определите в рамках этой модели отношение максимальных скоростей ходьбы на Земле и на Марсе, а также отношение мощностей, затрачиваемых при ходьбе с максимально возможной скоростью на этих планетах. Масса Марса составляет 0,11 массы Земли, радиус Марса равен 0,53 радиуса Земли. По поверхности Марса человек перемещается в скафандре, масса которого составляет примерно треть массы человека. Траектории центра масс человека на Земле и человека в скафандре на Марсе считайте одинаковыми. Учтите, что при ходьбе необходим постоянный контакт хотя бы одной ноги с поверхностью планеты.

П.Крюков

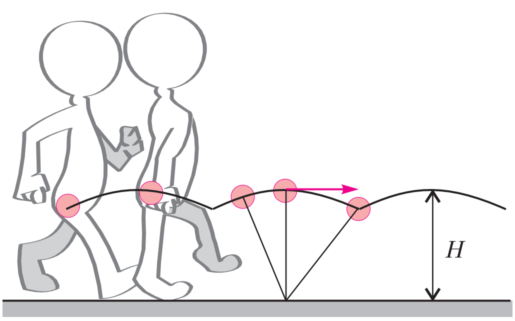


Рис. 7

2. Сухой лед (1 тур)

Сухой лед – это твердый диоксид углерода (CO_2), при нормальных условиях переходящий в газообразное состояние, минуя жидкую фазу (процесс сублимации). При давлении $p_0 = 10^5$ Па динамическое равновесие между твердой и газовой фазами достигается при температуре $t_c = -79$ °C, при которой плотность твердого диоксида углерода $\rho = 1560$ кг/м^3, а удельная теплота сублимации $q = 590$ кДж/кг. При температуре $T_0 = 300$ К в термос объемом $V_0 = 1{,}0$ л, в котором изначально ничего не было, кроме воздуха, поместили небольшой кусочек сухого льда объемом $V_1 = 1$ см^3 и тут же герметично закрыли пробкой. Какая температура и какое давление установятся в термосе в состоянии термодинамического равновесия? Начальная температура сухого льда равна t_c. Молярная масса диоксида углерода $M_1 = 44$ г/моль. Считайте, что термос обеспечивает идеальную теплоизоляцию содержимого. Молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $C_V = \dfrac{5R}{2}$.

М.Ромашка

3. Лягушки на стенах и потолке (2 тур)

Некоторые виды лягушек способны ползать по стенам и потолку при помощи специальных присосок на лапках. Эти присоски обеспечивают силу «прилипания» F, перпендикулярную поверхности. Пусть такая лягушка массой $m = 5$ г может обеспечить силу «прилипания» не больше F_0. Чему должно быть равно значение F_0, чтобы при любом угле наклона стены лягушка могла располагаться на ней неподвижно, если коэффициент трения лап о стену $\mu = 0{,}5$?

А.Бычков

4. Стабилизатор на термисторе (2 тур)

Идеализированная зависимость напряжения от силы тока для нелинейного элемента Z схематично показана на рисунке 8. На основе этого элемента и резисторов R_1 и r по схеме, показанной на рисунке 9, может быть

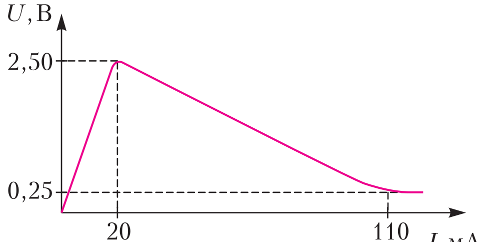


Рис. 8

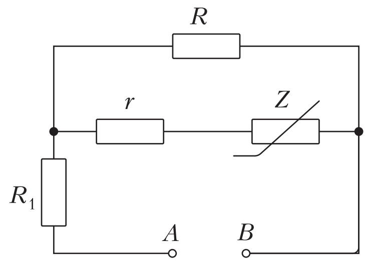


Рис. 9

собрано устройство, называемое стабилизатором напряжения, обеспечивающее неизменное напряжение U_0 на нагрузке (резистор сопротивлением R = 300 Ом) при различных значениях напряжения на входе (между точками A и B). При этом напряжение U_{AB} должно лежать в некотором диапазоне напряжений $U_1 - \Delta U \le U_{AB} \le U_1 + \Delta U$, в противном случае устройство перестает выполнять свою функцию стабилизации напряжения.

1) Чему равны напряжение U_0 и сопротивление резистора r в данной схеме?

2) Найдите сопротивление резистора R_1, при котором полуширина диапазона входных напряжений ΔU будет максимально возможной при напряжении середины диапазона U_1 = 6 В.

З.Резников

5. Двигатель Стирлинга (2 тур)

В задаче рассматривается термодинамическая модель двигателя Стирлинга, схематично изображенного на рисунке 10. Поршни 3 совершают возвратно-поступательные движения, преобразующиеся во вращательные движения с помощью кривошипно-шатунных передач. Рабочий цилиндр 1 нагревают горелкой. В рамках модели считается, что его температура поддерживается постоянной, обозначим ее T. На вытеснительном цилиндре 2 закреплен радиатор 6 для улучшения теплообмена, температура в цилиндре считается равной комнатной температуре T_0. Рабочее тело 4 – воздух – перекачивается из рабочего цилиндра в вытеснительный и обратно по трубке 5. Максимальный объем воздуха в рабочем цилиндре обозначим V_{01}, а в вытеснительном – V_{02}. Объемом трубки можно пренебречь. В результате компьютерных расчетов были получены диаграммы зависимости относительного давления от относительного объема: для рабочего цилиндра – красная линия на рисунке 11, для вытеснительного – синяя линия. При этом цикл для рабочего цилиндра обходится по часовой стрелке, а для вытеснительного – против часовой стрелки; $V_{02} = 1{,}25V_{01}$.

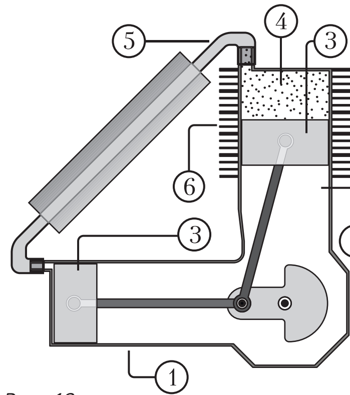


Рис. 10

1) Определите числовое значение отношения температур T и T_0.

2) Какая часть общей массы воздуха находится в рабочем цилиндре при давлении $3p_0$?

3) Определите отношение работы, совершаемой всем газом за цикл, к работе, совершаемой газом в рабочем цилиндре, если площадь фигуры, ограниченной красной линией, S_1 = 1,5 (относительных единиц), а

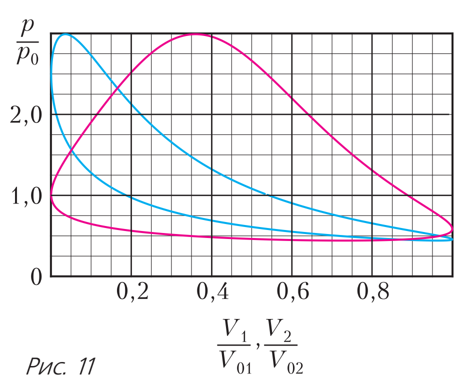


Рис. 11

площадь фигуры, ограниченной синей линией, $S_2 = 0{,}6$.

В.Козляков. Р.Соколовский

11 класс

1. Преобразователь (тренировочный тур)

На рисунке 12 приведена принципиальная схема преобразователя напряжения. На один

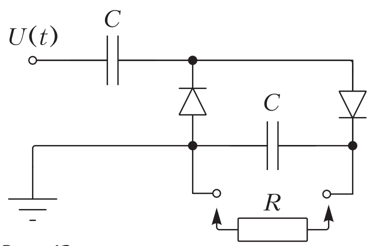


Рис. 12

из входов подается переменный потенциал (фаза) $U(t) = -U_0 \sin \omega t$ от бытовой сети (230 В, 50 Гц), другой вход имеет нулевой потенциал (заземлен). К выводам присоединяется нагрузка R. Диоды – идеальные. Емкость конденсаторов $C = 10$ мкФ, сопротивление нагрузки $R = 100$ кОм. При данных условиях через некоторое время после подключения к сети переменного тока схема обеспечивает почти (!) постоянное напряжение на нагрузке $U_н$.

1) Считая что нагрузка не подключена, найдите напряжение на выходе в моменты времени $t = T$, $t = 3T$, $t \gg T$, где T – период колебаний потенциала на входе.

2) При подключенной нагрузке оцените по порядку величины, на сколько процентов может отклоняться напряжение на нагрузке от среднего значения $U_н$.

П.Крюков

2. Парус как крыло (1 тур)

Динамика буера, т.е. ледовой яхты, может быть описана на основе модели, в которой парус считается вертикально расположенным крылом. Силу F, действующую на парус со стороны воздуха (рис.13, вид сверху), принято раскладывать на две составляющие: D, направленную вдоль скорости w потока воздуха относительно буера, и L, перпендикулярную D. Можно считать, что $D = C_D \frac{\rho w^2}{2} S$, $L = C_L \frac{\rho w^2}{2} S$, где S – площадь паруса, ρ – плотность воздуха, безразмерные коэффициенты C_D и C_L зависят

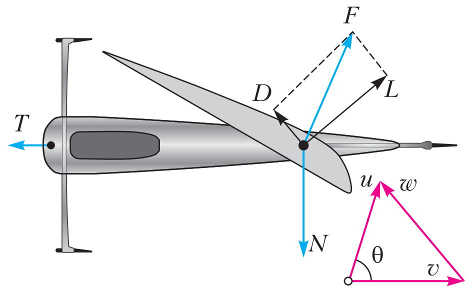


Рис. 13

только от ориентации паруса относительно набегающего потока воздуха. Взаимодействие с горизонтальной поверхностью снега (или льда) характеризуется силами трения T и горизонтальной реакции N. Далее везде трением мы пренебрегаем. Угол между скоростью буера v и скоростью ветра относительно земли u обозначим θ.

1) Пусть известно, что буер движется с постоянной скоростью. Отношение $\frac{C_L}{C_D} = k$ задано. Кроме того, даны скорость ветра u и угол θ. Определите скорость буера v. Если параметр k и скорость ветра u остаются постоянными, а угол θ может изменяться от 0 до $90°$, то чему равна максимально возможная скорость буера в рамках данной модели?

2) На рисунке 14 показана кривая, координаты точек которой равны значениям ко-

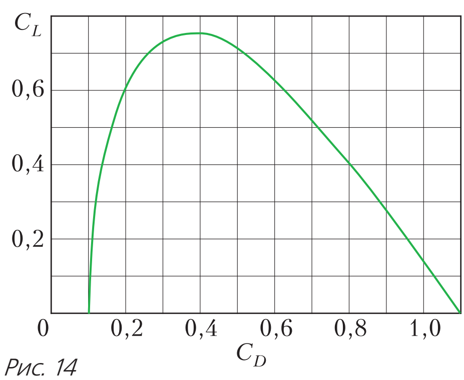


Рис. 14

эффициентов C_D и C_L для разных положений паруса относительно набегающего потока воздуха. Определите максимально возможное ускорение буера при старте из положения покоя. Скорость ветра $u = 10$ м/с, масса буера и человека 100 кг, площадь паруса 7 м^2, атмосферное давление нормальное, температура воздуха -10 °C.

3) Используя кривую, показанную на рисунке 14, определите, при каких значениях угла θ возможно движение буера с постоянной скоростью.

П.Крюков

3. Цепь с неизвестными (2 тур)

В цепи, изображенной на рисунке 15, сопротивление каждого из резисторов равно

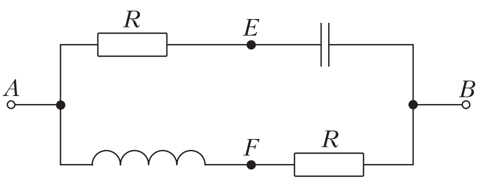


Рис. 15

R. Выводы A и B цепи на время t_0 подключают к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Индуктивность катушки и емкость конденсатора подобраны таким образом, что при подключенном источнике в любой момент времени разность потенциалов точек E и F равна нулю. Определите заряд, протекающий через источник за время t_0. Если за время t_0 подключения источника в резисторах суммарно выделяется количество теплоты Q, то какое количество теплоты выделится в одном резисторе после отключения источника? Чему равны энергия магнитного поля катушки и энергия конденсатора на момент отключения источника?

П.Крюков

4. Шарик на ниточке (2 тур)

Человек раскручивает в вертикальной плоскости полиуретановый шарик, закрепленный на одном конце тонкой, но прочной и нерастяжимой нитки, держась за петельку на другом ее конце. Когда скорость шарика становится достаточно большой и почти перестает изменяться, точка, в которой человек держит петлю, движется по окружности радиусом r. Определите минимально возможное значение r, если длина нитки между петлей и шариком $L = 1$ м, а радиус шарика 1 см. Плотность полиуретана $\rho = 1200$ кг/м^3. Сила сопротивления воздуха дается соотношением $F_c = \frac{\rho_0 v^2}{4} S$, где ρ_0 – плотность воздуха, S – площадь поперечного сечения шарика, v – его скорость. Молярная масса воздуха $\text{M} = 29$ г/моль. Воздух находится при нормальных условиях. Можно считать, что $v \gg \sqrt{gL}$.

П.Крюков, М.Ромашка

5. Фотография пластины (2 тур)

Диск толщиной около 1,5 см, сделанный из прозрачного материала, разрезали вдоль одного из диаметров. Получившуюся пластину, имеющую форму половины цилиндра, поставили на «миллиметровку» так, что поверхность, вдоль которой разрезали диск, оказалась обращена вниз, а выпуклая поверхность полуцилиндра – вверх. Затем эту пластину фотографируют сверху, стараясь ориентировать оптическую ось объектива фотоаппарата вертикально так, чтобы она проходила через середину пластины. Фотография приведена на рисунке 16.

1) Определите показатель преломления материала пластины.

2) На фотографии внутри пластины видны изображения полос сетки. Какое максимальное количество изображений полос, перпендикулярных пластине, может увидеть наблюдатель, располагающийся на расстоянии $h = 15$ см над центром пластины?

3) Оцените расстояние H от «миллиметровки» до главной плоскости объектива фотоаппарата при фотографировании пластины.

А.Бычков, П.Крюков

6. Электрокалорический генератор (2 тур)

В электродинамике при описании диэлектриков вводится в рассмотрение вектор электрической индукции $\vec{D}$. Вектор $\vec{D}$ количе-

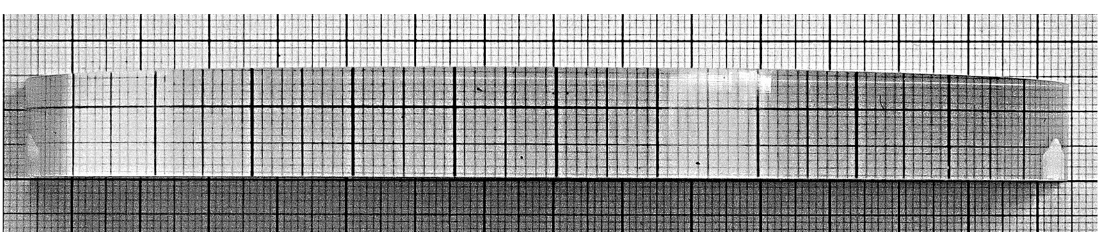


Рис. 16

ственно характеризует поле только (!) свободных зарядов, вектор $\vec{E}$ – поле свободных зарядов и поляризационных зарядов, возникающих в диэлектриках. Обычно вектор $\vec{D}$ пропорционален вектору $\vec{E}$. Однако, существуют материалы – сегнетоэлектрики – с нелинейной зависимостью $\vec{D}$ от $\vec{E}$. В этой задаче векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ сонаправлены. Схематично вид зависимости $D(E)$ для типичного сегнетоэлектрика при постоянной температуре показан на рисунке 17 красной

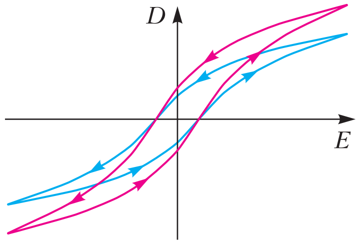


Рис. 17

линией. Зависимость $D(E)$ для того же сегнетоэлектрика при более высокой температуре схематично показана синей линией. Обе зависимости обладают ярко выраженным гистерезисом, иначе говоря, значение D для данного E зависит от характера изменения поля E (увеличивается или уменьшается). Впрочем, в данной задаче это несущественно.

Вид зависимости $D(E)$ в некоторых сегнетоэлектриках весьма сильно меняется с температурой, что позволяет их использовать для преобразования тепловой энергии в электрическую. Присоединим конденсатор с сегнетоэлектриком к идеальному источнику постоянного напряжения. Периодически изменяя температуру сегнетоэлектрика, можно получить периодически изменяющийся ток в цепи. При этом работа источника напряжения за цикл будет равна нулю. Получится преобразователь тепловой энергии в работу тока. Можно считать, что сегнетоэлектрик – это своеобразное рабочее тело тепловой машины, которое характеризуется параметрами D, E, T.

Рассмотрим модельный цикл, показанный на рисунке 18. Процессы 1–2 и 3–4 – зарядка и разрядка конденсатора с сегнетоэлектриком при постоянной температуре, процессы 2–3 и 4–1 – нагревание и охлаждение при постоянном электрическом поле. Цикл имеет

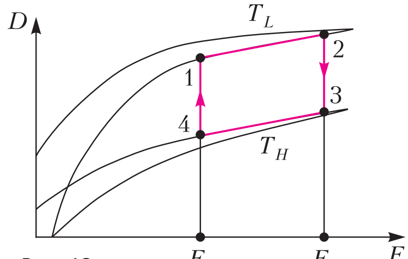


Рис. 18

форму параллелограмма. Термодинамика сегнетоэлектрика описывается соотношениями, справедливыми для малых (!) изменений параметров ΔE, ΔD, ΔT:

$$\Delta D = \varepsilon_0 \varepsilon \Delta E + p\Delta T ,$$

$$\frac{\Delta Q}{V} = c\Delta T + pT\Delta E , \quad \frac{\Delta A}{V} = D\Delta E ,$$

где ε, p и c ($\varepsilon > 0$, $p < 0$, $c > 0$) – известные постоянные коэффициенты, объем V считается постоянным, ΔQ и ΔA – количество теплоты и работа при малых изменениях параметров. Для решения задачи этих соотношений достаточно.

1) Определите КПД цикла 1234. Величины E_L, E_H и T_L, T_H считайте известными ($T_L < T_H$). Если предположить, что E_L и E_H могут изменяться неограниченно, то чему равен максимальный КПД этого цикла?

2) Изобразите качественно на диаграмме D–E термодинамический цикл $12'34'$, в котором на участках $1–2'$ и $3–4'$ зарядка и разрядка конденсатора с сегнетоэлектриком происходят адиабатически. Температуры в точках 1 и 3 равны T_L и T_H.

3) Определите КПД цикла из п. 2), считая E_L, E_H и T_L, T_H известными, а изменения параметров D, E и T в пределах цикла малыми. У какого цикла при одинаковых E_L, E_H, $T_1 = T_L$ и $T_3 = T_H$ больше КПД – у 1234 или у $12'34'$?

П.Крюков

Публикацию подготовили А.Бычков, С.Варламов, П.Крюков, М.Ромашка, М.Семенов, А.Якута

Европейская математическая олимпиада для девушек

Три года назад «Квант» уже рассказывал об относительно новом мероприятии – Европейской олимпиаде среди девушек EGMO. К участию в этой олимпиаде приглашаются по четыре девушки от страны и по сумме набранных ими баллов формируется командный рейтинг.

Сейчас в EGMO принимают участие практически все европейские страны (около 35 команд), помимо этого вне официального конкурса традиционно участвуют более десятка сборных с других континентов (Северная и Южная Америка, Азия и Австралия).

Команда России, ярко дебютировав в 2016 году в Румынии (1 командное место), в дальнейшем продолжила успешные выступления. В 2017 году в Швейцарии наша команда стала второй в официальном командном зачете, а в 2018 году в Италии снова стала первой и вернула себе переходящий главный приз – серебряную тарелку.

В апреле 2019 года очередная, 8-я по счету, Европейская математическая олимпиада для девушек проходила на Украине. За четыре месяца до олимпиады команда России получила приглашение от коллег из Киева, однако вскоре после этого украинские организаторы отозвали приглашение, мотивировав это политической ситуацией и невозможностью обеспечить безопасность участниц. Так наша сборная, являясь одним из фаворитов, не смогла приехать на соревнование.

Но порешать задачи и посоревноваться все-таки удалось. Решено было провести «дубль» олимпиады, и в дни олимпиады Президентский лицей 239 Санкт-Петербурга открыл двери нашим лучшим девушкам-математикам, за плечами которых и отличные результаты на Всероссийской олимпиаде, и преодоление непростого отбора. Основную команду составили десятиклассницы *Екатерина Костина* (Ижевск), *Полина Станкевич* (Иркутск–Санкт-Петербург), *Лия Кульдюшева* (Набережные Челны), а также 11-классница *Екатерина Кочеткова* (Ярославль). В команду «Россия-2» вошли 11-классницы *Анна Седова* (Ульяновск) и *Ксения Струихина* (Курган).

К началу каждого из двух туров организаторы EGMO пересылали условия, и наши девушки трудились над задачами олимпиады одновременно с коллегами из разных стран. Результаты в целом подтвердили хороший уровень нашего математического образования. Мы несколько отстали от ведущих команд по результатам первого тура: с непростой геометрической задачей номер 3 справилась лишь Катя Костина (которая в итоге решила все задачи олимпиады). Но во втором туре наши результаты по трудной комбинаторной задаче номер 6 оказались гораздо лучше, чем у других команд. В итоге по общей сумме баллов наша команда опередила лидера рейтинга – команду США.

От организаторов следующей Европейской олимпиады, которая пройдет в апреле 2020 года в Нидерландах, уже получено письмо, содержащее, помимо приглашения команды России на EGMO-2020, поздравления с нашим результатом и сожаление о том, что олимпиада в этом году прошла без России.

Слева направо: Е.Костина, Е.Кочеткова, П.Станкевич, Л.Кульдюшева, К.Струихина, А.Седова

Подробную информацию об олимпиадах EGMO можно найти на официальном сайте www.egmo.org

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ EGMO–2019

1. Найдите все тройки (a,b,c) вещественных чисел таких, что

$ab + bc + ca = 1$ и

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b\,.$$

Нидерланды

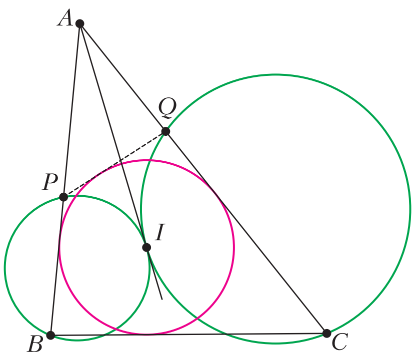
2. Пусть n – положительное целое число. Доминошки расположены на доске $2n \times 2n$ так, что каждая клетка доски является соседней ровно для одной клетки, накрытой доминошкой. Для каждого n определите наибольшее количество доминошек, которое можно расположить таким образом. (*Доминошка* – это плитка размера 2×1 или 1×2. Доминошки расположены на доске так, что каждая доминошка накрывает ровно две клетки доски и доминошки не перекрываются. Две клетки называются *соседними*, если они различные и имеют общую сторону.)

Люксембург

3. Пусть ABC – треугольник, в котором $\angle CAB > \angle ABC$, а I – центр его вписанной окружности. Пусть D – точка на отрезке BC такая, что $\angle CAD = \angle ABC$. Пусть ω – окружность, касающаяся AC в точке A и проходящая через I. Пусть X – вторая точка пересечения ω и описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что биссектрисы углов DAB и CXB пересекаются в точке, лежащей на прямой BC.

Польша

4. Пусть ABC – треугольник, а I – центр его вписанной окружности (см. рисунок).



Окружность, проходящая через B и касающаяся AI в точке I, пересекает сторону AB повторно в точке P. Окружность, проходящая через C и касающаяся AI в точке I, пересекает сторону AC повторно в точке Q. Докажите, что PQ касается вписанной окружности треугольника ABC.

Польша

5. Пусть $n \geq 2$ – целое число, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – положительные целые числа. Докажите, что существуют положительные целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, удовлетворяющие следующим трем условиям:

- $a_i \leq b_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$;
- остатки от деления чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на n попарно различны;
- $b_1 + \ldots + b_n \leq n\left(\dfrac{n-1}{2} + \left[\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right]\right)$.

Нидерланды

6. Алина рисует в окружности 2019 хорд, все концы которых различны. Точка считается *отмеченной*, если она либо одна из 4038 концов хорд, либо точка пересечения по крайней мере двух хорд. Каждой отмеченной точке Алина ставит в соответствие целое число, при этом 2019 концам хорд она ставит в соответствие число 0, а остальным 2019 концам хорд – число 1. Алина рассматривает отрезки, соединяющие последовательные отмеченные точки на каждой хорде (так, на хорде с k отмеченными точками есть $k - 1$ такой отрезок). Рядом с каждым таким отрезком она записывает желтым сумму чисел, соответствующих его концам, и синим – модуль их разности. Алина обнаружила, что есть всего $N + 1$ чисел, записанных желтым, и они принимают каждое значение 0, 1, … …, N ровно один раз. Докажите, что по крайней мере одно число, записанное синим, делится на 3.

Великобритания

Публикацию подготовили П.Кожевников, М.Пратусевич, К.Сухов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. 33.

Среди чисел от 1 до 100 единицу в записи содержат ровно двадцать: это сама единица, десять чисел от 10 до 19, числа 21, 31, …, 91 (их восемь) и число 100. Значит, ни одно из этих чисел не было стерто. Аналогично, чисел с двойкой ровно девятнадцать: сама двойка, десять чисел третьего десятка, а также 12, 32, 42, …, 92 (таких восемь). Значит, и из них Миша ни одно не стер. Всего таких чисел $19+20-2=37$ (мы вычитаем 2, поскольку числа 12 и 21 посчитаны два раза). Всего осталось $37+30=67$ чисел, а Миша стер $100-67=33$ числа.

2. См. рисунки 1 и 2.

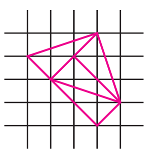


Рис. 1

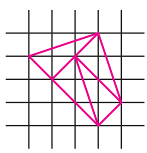


Рис. 2

Комментарий. Решение задачи может стать нагляднее, если вместо обычной сетки с горизонтальными и вертикальными линиями рассмотреть диагональную, изображенную на рисунке 3

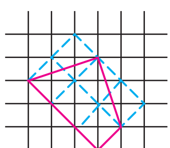


Рис. 3

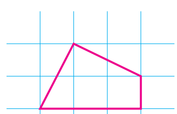


Рис. 4

пунктирными линиями. На диагональной сетке наша фигура имеет площадь 4 клетки, и ее надо разрезать на 4 фигуры площади 1. Аналогичная фигура на обычной сетке изображена на рисунке 4, ее разрезание там проще увидеть, а потом его можно перенести на исходную фигуру.

3. 5.

Если Сеня с ошибкой пишет Д, то из букв О, Е, К, А, Э, Р, которые еще входят в ДОДЕКАЭДР, он в трех ошибается, а три пишет верно. Но все эти буквы, кроме Е, входят и в ИКОСАЭДР, т.е. там он напишет верно как минимум две буквы и никак не сможет сделать 7 ошибок. Значит, букву Д Сеня пишет правильно. Тогда он неминуемо пишет с ошибкой все остальные буквы слов ДОДЕКАЭДР и ИКОСАЭДР, а в слове ТЕТРАЭДР, таким образом, помимо Д, еще верно пишет букву Т, но ошибается во всех остальных. Теперь ясно, что в слове ОКТАЭДР Сеня сделает пять ошибок.

4. Пример с пятью дополнительными рейсами показан на рисунке 5. Можно доказать, что добавить меньшее число рейсов невозможно.

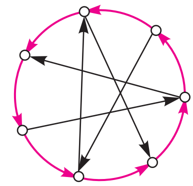


Рис. 5

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №2)

21. а) Да.

Расставим в нечетных вертикалях и горизонталях по 1 фишке, а в четных – по 5 так, как на рисунке 6.

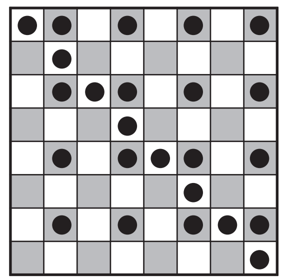


Рис. 6

б) Нет.

Допустим, нам удалось найти такую расстановку. Тогда в каждой горизонтали и вертикали либо 1 фишка – назовем такие ряды тощими, либо 6 – назовем такие ряды толстыми. Толстых вертикалей, как и толстых горизонталей, 4, поэтому фишек, стоящих в толстой вертикали и толстой горизонтали, не более 16. А фишек, стоящих в толстой вертикали и тощей горизонтали, не более 4 – по одной на каждую горизонталь. Итого в толстых вертикалях получается не более 20 фишек, а должно быть $4 \cdot 6 = 24$. Противоречие.

22. а) Нет.

Пусть такая раскраска нашлась. Возьмем три точки A, B, C разных цветов. Они не могут образовывать треугольник, иначе описанная вокруг него окружность содержала бы три цвета. Значит, они лежат на одной прямой. Возьмем теперь любую точку X вне этой прямой. Она совпадает по цвету с одной из точек A, B, C, пусть с A. Тогда X, B, C имеют разные цвета и снова образуют треугольник. Противоречие.

б) Да.

Выберем три точки на одной прямой и покрасим их в три первых цвета, а все остальные точки плоскости – в четвертый цвет. Так как окружность не может содержать три точки, лежащие на одной прямой, на любой окружности не будет хотя бы одного из первых трех цветов.

23. Пусть O – точка пересечения A_1M и B_1K (рис.7). Чтобы доказать равенство площадей MC_1KO и B_1OA_1C, добавим к каждому них треугольник OMB_1 и докажем, что площади получившихся многоугольников MC_1KB_1 и

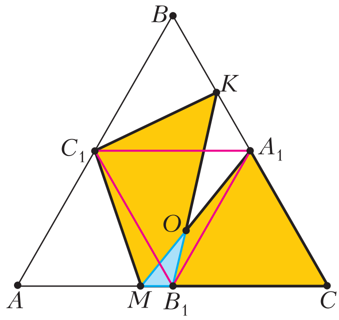


Рис. 7

MA_1C равны. Разрежем первый из них на треугольники $\Delta_1 = MC_1B_1$ и $\Delta_2 = C_1KB_1$, а второй – на $\Delta_3 = MA_1B_1$ и $\Delta_4 = B_1A_1C$. Площади Δ_1 и Δ_3 равны, потому что у них есть общая сторона MB_1, а прямая A_1C_1 параллельна этой стороне, значит, высоты у этих треугольников также равны. Площадь Δ_2 равна площади $A_1B_1C_1$ по тем же соображениям: у них есть общая сторона B_1C_1 и A_1K параллельна этой стороне. А треугольники $A_1B_1C_1$ и Δ_4 равны. Итак,

$$S(MC_1KB_1) = S(\Delta_1) + S(\Delta_2) = \\ = S(\Delta_3) + S(\Delta_4) = S(MA_1C),$$

откуда следует утверждение задачи.

Замечание. Это решение работает для любого треугольника ABC, а не только для правильного.

24. 388.

Приведем уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ к виду

$$(N - x)(y + N) = N^2, \qquad (1)$$

а уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ – к виду

$$(x - N)(y - N) = N^2. \qquad (2)$$

В левой части первого равенства одна из скобок положительна, значит, и вторая тоже. В левой части второго равенства также обе скобки положительны, потому что $\frac{1}{x} < \frac{1}{N}$, а значит, $x > N$.

Пусть $N^2 = KL$ – произвольное представление числа N^2 в виде произведения двух натуральных чисел, причем $K \le L$.

Случай 1) $K = L = N$. Такая пара чисел K, L не дает решений уравнения (1) (поскольку в левой части уравнения (1) первая скобка строго меньше N, а вторая скобка строго больше N), но в то же время дает одно решение ($x = 2N$, $y = 2N$) уравнения (2).

Случай 2) $K < N$ и $L > N$. Такая пара чисел K, L дает одно решение ($x = N - K$, $y = L - N$) уравнения (1) и два решения ($x = N + K$, $y = N + L$ и $x = N + L$, $y = N + K$) уравнения (2).

Значит, количество M_1 решений уравнения (1) и количество M_2 решений уравнения (2) связаны равенством $M_2 = 2M_1 + 1$. Раз $M_2 = 777$, то

$$M_1 = \frac{M_2 - 1}{2} = \frac{777 - 1}{2} = 388.$$

Замечание. Эта ситуация возможна, например, при $N = 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5$, поскольку в этом случае число $N^2 = 2^{36} \cdot 3^6 \cdot 5^2$ имеет $37 \cdot 7 \cdot 3 = 777$ различных натуральных делителей.

КАЛЕДОСКОП «КВАНТА»

Приводим краткие указания к решениям предложенных задач.

1. Проведем $FN \perp x$ и покажем, что $BN = z$.

2. Обозначим концы отрезка x буквами F и N (слева направо). Проведем $IK \perp BC$ и покажем, что $FK = y$, а $KN = z$.

3. Из C проведем перпендикуляр к BQ. Покажем равенство двух пар соответственных треугольников.

4. Проведем EF через инцентр I. Покажем, что $EI = y$, а $IF = z$.

5. Возьмем на стороне BC точку N такую, что $CN = y$, $BN = z$. Покажем, что KN и TN – внешние биссектрисы в ΔAKT. Тогда AN – внутренняя биссектриса угла A.

6. Проведем медиану AD, а из точки D – перпендикуляр к прямой t. Покажем, что его длина равна $\frac{y+z}{2}$.

7. *Первый способ*. Отложим на луче FA отрезок $FN = y$. Покажем, что $\Delta ANC = \Delta BFC$.

Второй способ. Применим теорему Птолемея для вписанного четырехугольника $ABFC$.

8. Проведем $FT \parallel AC$. Тогда $AFTC$ – равнобокая трапеция. Поскольку F – середина дуги BAC, то $\cup FT = \cup AB$ и $FT = z$.

9. Проведем перпендикуляры $LL_1 = LL_2$ к BC и AB, а также перпендикуляры $TT_1 = TT_2$ к BC и AC. Выразив x через основания трапеции LTT_1L_1, а y и z – из подобия соответственных треугольников, получим требуемое.

10. Найдем длины всех отрезков через стороны треугольника ABC (по свойству биссектрисы). Воспользовавшись теоремой о квадрате касательной, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными. Ее решение приведет к равенству $x = y + z$.

11. На продолжении AD (за точку D) отложим $DK = y$. Покажем равенство треугольников CNF и CNK.

12. Продлим AQ до пересечения с окружностью в точке T. Проведем диаметр AF. Перпендикуляр из точки F к KQ позволит применить теорему Архимеда (задача 8).

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

1. $F = 36$ Н. **2.** $F = 3$ Н.
3. $u_1 = 2{,}6v$, $u_2 = 1{,}6v$. **4.** $a = 3$ м/с^2.
5. $\Delta h = 20$ см. **6.** $Q = 121$ Дж.
7. $N = m_1 m_2 g \dfrac{(3\cos\alpha - 2)(m_1 + m_2) - m_1\cos^3\alpha}{\left(m_1\sin^2\alpha + m_2\right)^2}$

(убедитесь, что условие $N(\alpha) = 0$ приводит к ответу задачи 3).

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ». ФИЗИКА

(см. «Квант» №3)

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

7–9 классы

Первый тур

1. $p = \sigma g$.

2. Скорость мальчика относительно берега $\vec{V}$ складывается из скорости мальчика относительно воды и скорости течения, т.е. $\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}$. При этом вектор $\vec{V}$ направлен вдоль отрезка AB, а вектор $\vec{v}$ направлен перпендикулярно этому отрезку, поэтому эти три вектора образуют прямоугольный треугольник, как показано на рисунке 8. Из рисунка видно, что $\sin\alpha = \dfrac{v}{u} = \dfrac{L}{AB}$, откуда $L = \dfrac{v}{u}AB$. Длина отрезка AB равна $V\tau$, причем $V = \sqrt{u^2 - v^2}$.

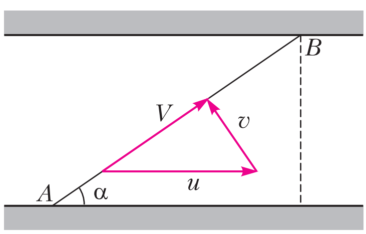


Рис. 8

Окончательно получаем

$$L = \frac{v\tau}{u}\sqrt{u^2 - v^2}.$$

3. Из соображений симметрии ясно, что по диагонали BD ток не течет и ее можно удалить из схемы. Используя стандартные формулы для расчета сопротивления последовательно и параллельно соединенных проводников, находим, что сопротивление цепи $R = \dfrac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC}}$, где $R_{AB} = \dfrac{\rho_м a}{S}$, $R_{AC} = \dfrac{\rho_а a\sqrt{2}}{S}$. Следовательно, $R = \dfrac{\rho_м\rho_а a\sqrt{2}}{S\left(\rho_м + \rho_а\sqrt{2}\right)}$. По закону Джоуля–Ленца,

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 S\left(\rho_м + \rho_а\sqrt{2}\right)}{\rho_м\rho_а a\sqrt{2}}.$$

4. $v_{min} = \sqrt{\dfrac{2c\left(t_{пл} - t_0\right) + 2\lambda}{\alpha}}$.

5. Искомое положение источника изображено на рисунке 9. Оно определяется из условия, что

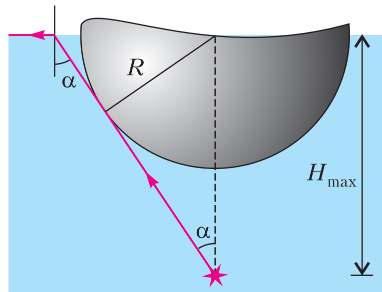


Рис. 9

касательные к шару лучи света, испущенные источником, падают на границу раздела вода–воздух под предельным углом полного отражения. Минимальный угол α падения луча на границу раздела определяется равенством $\sin\alpha = \dfrac{R}{H_{max}}$. Поскольку при полном отражении $\sin\alpha = \dfrac{1}{n}$, то $H_{max} = Rn$.

Второй тур

1. $V = \dfrac{m}{\rho}$.

2. Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с водой. В этой системе лодка движется с постоянной по модулю скоростью, определяемой только режимом работы мотора, а плот неподвижен. Тогда

$$v = \frac{s}{2t}.$$

3. Когда ключ разомкнут, полное сопротивление цепи равно $R' = R_1 + \dfrac{2R}{5}$. При замкнутом ключе полное сопротивление цепи становится равным $R'' = R_1 + \dfrac{R}{3}$. Отсюда находим искомое изменение силы тока:

$$\Delta I = \frac{U}{R''} - \frac{U}{R'} = \frac{UR}{(3R_1 + R)(5R_1 + 2R)}.$$

4. $\Delta t = \dfrac{v^2}{8c}$.

5. Условие задачи будет выполнено, если луч SA, идущий от источника в край диска, будет падать на поверхность воды под критическим углом полного внутреннего отражения $\alpha_{кр}$, для которого выполняется условие $\sin\alpha_{кр} = \frac{1}{n}$. Тогда $d = \frac{2h}{\sqrt{n^2-1}}$.

10–11 классы

Первый тур

1. Столкновение шариков произойдет в воздухе на равных расстояниях от точек бросания. По закону сохранения импульса в проекции на вертикальную ось имеем $mv_y + 2mv_y = 3mv'_y$. Отсюда следует, что вертикальная составляющая скорости шариков после соударения не изменится. Полное время движения шариков от момента бросания до момента падения на землю $t_0 = \frac{2v'_0\sin\alpha}{g}$, а время движения до соударения $t_1 = \frac{l}{2v_0\cos\alpha}$. Искомое время

$$\tau = t_0 - t_1 = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} - \frac{l}{2v_0\cos\alpha}.$$

2. Ускорение $\vec a$ бруска в неподвижной системе отсчета равно $\vec a = \vec a_0 + \vec a_{отн}$. При этом относительное ускорение бруска направлено вдоль наклонной поверхности клина вверх и по модулю совпадает с a_0. Из рисунка 10,*а* видно, что $a = 2a_0\sin\frac{\alpha}{2}$, а вектор $\vec a$ образует с вертикалью угол $\alpha/2$. Силы, действующие на брусок в неподвижной системе отсчета, изображены на рисунке 10,*б*. Записывая уравнение движения бруска в проекции на ось x, имеем $ma\sin\frac{\alpha}{2} = T - mg\sin\alpha$. Используя полученное выше выражение для a, а также формулу $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$, получаем

$$T = mg\sin\alpha + ma_0(1-\cos\alpha).$$

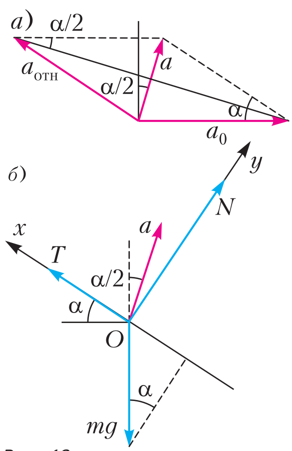


Рис. 10

3. Среднее число соударений молекул с единичной площадкой за единицу времени равно $\bar Z = \frac{1}{2}n|\bar v_x|$, где n – концентрация молекул, а $|\bar v_x|$ – средний модуль проекции скоростей молекул на направление, перпендикулярное стенке. Чтобы его оценить, воспользуемся выражением для среднеквадратичной скорости молекул: $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\text{M}}}$, где R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, а M – молярная масса газа. Поскольку $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, а в силу хаотичности движения молекул $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, то $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ и $\sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}} = \sqrt{\frac{RT}{\text{M}}}$. Из соображений размерности ясно, что $|\bar v_x|$ отличается от $\sqrt{\overline{v_x^2}}$ только некоторым числовым множителем, поэтому $\bar Z \sim n\sqrt{T}$. Следовательно,

$$\alpha = \frac{\bar Z_1}{\bar Z_0} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = \frac{V_0}{V_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_0}},$$

где V_1 и T_1 – объем и температура газа в конечном состоянии, T_0 – начальная температура газа. Работа газа в изобарном процессе $A = p_0(V_1 - V_0) = \nu R(T_1 - T_0)$, где $\nu = \frac{p_0V_0}{RT_0}$ – количество газа. Из этих равенств находим

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + A/(p_0V_0)}}.$$

4. Мощность, выделяющаяся в лампочке, равна $P = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_0^2}{R}$, где R – сопротивление лампочки, $\mathcal{E}_0 = BS\omega$ – амплитудное значение ЭДС электромагнитной индукции. Сопротивление нити накаливания лампочки при рабочей температуре t равно $R = R_0(1 + \alpha(t - 0\ °\text{C}))$. Относительная доля работы тока, преобразованной в световое излучение лампочки, равна $\eta = \frac{P_{св}}{P}$. Отсюда

$$t = \frac{\eta B^2S^2\omega^2}{2P_{св}R_0\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$

5. Обозначим через a и b расстояния от предмета до линзы и от линзы до экрана. По формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, а по условию $b = L - a$. Из записанных выражений получаем квадратное уравнение $a^2 - La + LF = 0$. Корни этого уравнения $a_{1,2} = \frac{L}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F}{L}}\right)$, поэтому $b_{1,2} = \frac{L}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4F}{L}}\right)$. Увеличение, даваемое линзой, равно $\Gamma = \frac{b}{a}$. Это выражение максимально, если $b = b_{max} = b_2$, $a = a_{min} = a_2$. Тогда

$$\Gamma_{max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4F/L}}{1 - \sqrt{1 - 4F/L}}.$$

Второй тур

1. $v_0 = \dfrac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{2g}{h + 2l\operatorname{tg}\alpha}}$.

2. Рассмотрим вначале колебания маятника в отсутствие пружины. Уравнение движения шарика при малых углах α в этом случае имеет вид $ma = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha$. Учитывая, что $\alpha \approx \dfrac{x}{l}$, где x – горизонтальное смещение шарика, перепишем это уравнение в виде $a = -\dfrac{g}{l}x$. Оно описывает гармонические колебания с периодом $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. При наличии пружины к силам mg и T добавляется сила упругости, проекция которой на горизонтальное направление приближенно равна $F_{\text{упр}} \approx -kx$. Уравнение движения шарика в этом случае запишется в виде $a = -\left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)x$. Решение этого уравнения представляет собой гармонические колебания с периодом $T_1 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}}}$. Параметр n, заданный в условии, удобно преобразовать к виду

$$n = \frac{T_0 - T_1}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{kl}{mg}}}.$$

Отсюда находим

$$k = \frac{mg}{l}\frac{n(2-n)}{(1-n)^2}.$$

3. Согласно закону Дальтона давление в цилиндре равно сумме парциальных давлений гелия и азота: $p = \dfrac{\nu_{\text{г}} + \nu_{\text{а}}}{V}RT$, где V – начальный объем смеси газов, $\nu_{\text{г}}$ и $\nu_{\text{а}}$ – количества молей гелия и азота. При указанной температуре гелий конденсироваться не может, так как находится при температуре выше критической, а азот может. При изотермическом сжатии в n раз давление азота становится равным давлению его насыщенных паров, а потому давление в цилиндре оказывается равным $np = \dfrac{n\nu_{\text{г}}}{V}RT + p_{\text{нп}}$, откуда $\nu_{\text{г}} = (np - p_{\text{нп}})\dfrac{V}{nRT}$. Поскольку $\nu_{\text{а}} = \dfrac{p_{\text{нп}}V}{nRT}$, то искомое отношение числа молекул гелия к числу молекул азота в цилиндре будет равно

$$k = \frac{N_{\text{г}}}{N_{\text{а}}} = \frac{\nu_{\text{г}}}{\nu_{\text{а}}} = \frac{np}{p_{\text{нп}}} - 1.$$

4. При повороте рамки изменяется пронизывающий ее магнитный поток Φ, поэтому в рамке возникает электрический ток $I = \dfrac{1}{R}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где R – сопротивление рамки, и по рамке протекает заряд $\Delta q = I\Delta t = \dfrac{\Delta\Phi}{R}$. Поскольку $R = \text{const}$, такая же связь справедлива и для конечных приращений заряда и магнитного потока. При повороте рамки на $180°$ магнитный поток меняется на $\Delta\Phi = 2BS$. Следовательно, $q = \dfrac{2BS}{R}$, откуда $R = \dfrac{2BS}{q}$. При вращении рамки с угловой скоростью ω (при надлежащем выборе начала отсчета времени) магнитный поток через плоскость рамки меняется по закону $\Phi(t) = BS\sin\omega t$ и индукционный ток в рамке равен $I(t) = \dfrac{\Phi'}{R} = \dfrac{BS\omega}{R}\cos\omega t$, где Φ' – производная потока по времени. Выделяющаяся в рамке мгновенная мощность равна $N(t) = I^2(t)R$. Учитывая, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно $\dfrac{1}{2}$, находим искомую среднюю тепловую мощность: $N_{\text{ср}} = \dfrac{BSq\omega^2}{4}$.

5. Лучи, отраженные от зеркального шара, соберутся в переднем фокусе линзы, если они параллельны главной оптической оси линзы. Рассмотрим луч, падающий под малым углом β на поверхность зеркального шара (рис.11). Согласно закону отражения, $\alpha = 2\beta$, причем $\beta' = \beta$. Из

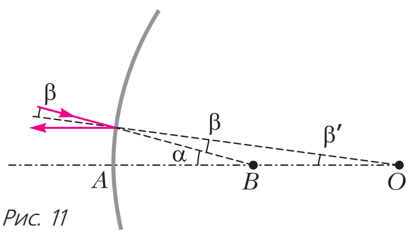


Рис. 11

рисунка видно, что $AB\operatorname{tg}\alpha = AO\operatorname{tg}\beta$. С учетом малости углов α и β приближенно получаем $AB \approx \dfrac{AO}{2} = \dfrac{R}{2}$. Следовательно, условие задачи будет выполнено, если изображение источника, создаваемое линзой, находится внутри шара на расстоянии $\dfrac{R}{2}$ от его поверхности. Используя формулу линзы, находим

$$\frac{aF}{a-F} = l + \frac{R}{2}, \text{ откуда } R = 2\left(\frac{aF}{a-F} - l\right).$$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

7–8 классы

1. Совершенная при опрокидывании цилиндра работа и выделившаяся при его падении энергия равны соответствующим изменениям его потен-

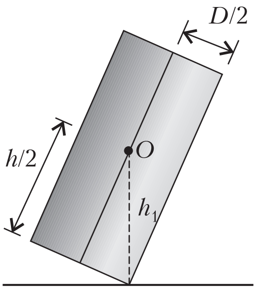


Рис. 12

циальной энергии. Начальная потенциальная энергия цилиндра $E_0 = \frac{mgh}{2}$, где m – масса цилиндра. Цилиндр начнет опрокидываться, когда вертикаль, проведенная из центра тяжести O, выйдет за пределы опоры (рис.12). Потенциальная энергия в момент опрокидывания $E_1 = mgh_1 = \frac{mg\sqrt{h^2 + D^2}}{2}$. Конечная потенциальная энергия цилиндра $E_2 = \frac{mgD}{2}$. При падении цилиндра выделилась энергия

$$E = E_1 - E_2 = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{h^2 + D^2} - D\right)$$

и была совершена работа

$$A = E_1 - E_0 = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{h^2 + D^2} - h\right).$$

Отсюда находим

$$n = \frac{E}{A} = \frac{\sqrt{h^2 + D^2} - D}{\sqrt{h^2 + D^2} - h}.$$

2. $m_2 = m_1\left(1 - \frac{c\tau_2\left(t_{\text{к}} - t\right)}{r\tau_1}\right)$.

3. $r = \frac{X_1}{X_2 - X_1}R$.

4. Поскольку сосуд имеет форму куба, угол падения луча на поверхность воды $\alpha = 45°$. Для того чтобы луч попал в точку c, должно выполняться равенство (рис. 13) $h\operatorname{tg}\beta + a - h = a - a/4$. По закону преломления света, $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, после соответствующих преобразований получаем

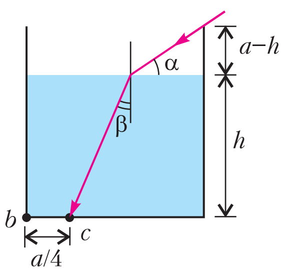


Рис. 13

$$h = \frac{a\sqrt{n^2 - 0{,}5}}{4\sqrt{n^2 - 0{,}5} - 2\sqrt{2}}.$$

9 класс

1. Поместим начало координат в точку старта гепарда, а координатную ось x направим вдоль прямой, по которой движутся животные. На рисунке 14 изображены графики зависимости координат и скоростей гепарда и антилопы от времени. Из рисунка 14,*а* видно, что гепард догонит антилопу, если расстояние между животными в момент начала погони не превышает $s_{\max}$. В свою очередь, $s_{\max}$ находится из условия, что в тот момент, когда гепард догоняет антилопу, одновременно с равенством координат животных достигается и равенство их скоростей. Из рисунка 14,*б* видно, что время движения животных до момента, когда их скорости сравняются, равно $T = \tau_1 + \tau_2 + \left(\tau_1 - \tau\right)$. При этом $\frac{v_{\text{Г}}}{\tau_1} = \frac{v_{\text{А}}}{\tau}$. Пути, пройденные гепардом и антилопой за время T, равны $s_{\text{Г}} = v_{\text{Г}}\left(\tau_1 + \tau_2\right) - \frac{1}{2}v_{\text{А}}\tau$, $s_{\text{А}} = v_{\text{А}}\left(2\tau_1 + \tau_2 - \tau\right)$. Начальное расстояние между ними равно разности этих путей:

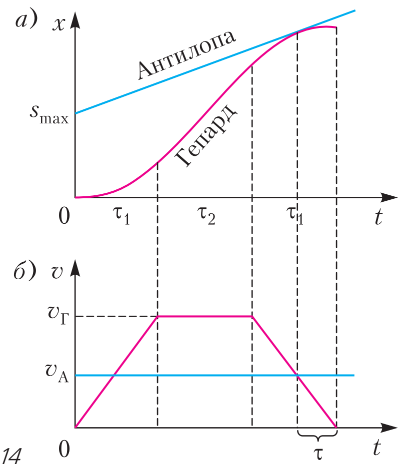


Рис. 14

$$s_{\max} = s_{\text{Г}} - s_{\text{А}} = v_{\text{Г}}\left(\tau_1 + \tau_2\right) - v_{\text{А}}\left(2\tau_1 + \tau_2\right) + \frac{1}{2}\frac{v_{\text{А}}^2}{v_{\text{Г}}}\tau_1.$$

2. $t_2 = \frac{\left(c_{\text{в}} + c_{\text{л}}\right)t_0 - c_{\text{в}}t_1 - \lambda(k-1)/(k+1)}{c_{\text{л}}}$.

3. Записав для данной схемы правила Кирхгофа, найдем $I_1 = \frac{2}{3}I_2$.

4. $D = \frac{1}{F} = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1\Gamma_2\Delta a}$.

10–11 классы

1. Масса отбрасываемого за время Δt винтом вертолета воздуха $\Delta m = \frac{\rho v\Delta t\pi d^2}{4}$, где v – скорость струи воздуха от винта. Импульс, переданный воздуху за это время, $\Delta p = \Delta mv$. Подъемная сила вертолета $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Поскольку вертолет неподвижен, $F = mg$. Энергия, передаваемая воздуху за время Δt, равна $\Delta E = \frac{\Delta mv^2}{2}$. Мощность, развиваемая двигателем вертолета,

$N = \frac{\Delta E}{\eta \Delta t}$. Окончательно находим

$$N = \frac{mg}{\eta d}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}.$$

2. $p = p_0 \frac{kn+1}{n+1}$.

3. Брусок движется по шинам под действием сил, изображенных на рисунке 15. На концах

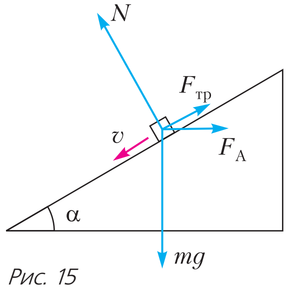


Рис. 15

бруска возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = Blv\cos\alpha$. По контуру, образованному шинами, бруском и резистором, начинает течь ток $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$. В результате появляется сила Ампера, действующая на брусок и по модулю равная $F_{\text{A}} = IBl$. Она нарастает до тех пор, пока скорость движения бруска не перестает увеличиваться, достигая значения $v_{\text{уст}}$. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$0 = mg\sin\alpha - \mu\left(mg\cos\alpha + F_{\text{A}}\sin\alpha\right) - F_{\text{A}}\cos\alpha.$$

Отсюда находим скорость движения бруска:

$$v_{\text{уст}} = \frac{mgR}{B^2l^2\cos\alpha}\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha},$$

силу тока в контуре:

$$I = \frac{mg}{Bl}\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

и тепловую мощность, выделяющуюся в резисторе:

$$N = I^2R = \left(\frac{mg}{Bl}\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\right)^2 R.$$

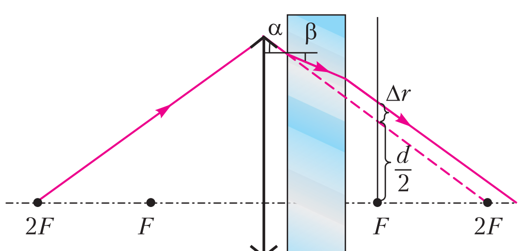


Рис. 16

4. Ход одного из крайних лучей, ограничивающих световое пятно на экране, изображен на рисунке 16. В отсутствие пластинки ход луча показан штриховой линией, а при наличии пластинки – сплошной. Видно, что преломление света на боковых поверхностях пластинки приводит к тому, что луч смещается параллельно самому себе на $\Delta r = h(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$, где α и β – углы падения и преломления, причем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2F} \approx \alpha$ и $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$. Кроме того, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$ и $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} \approx n$. Учитывая, что $d_1 = d + 2\Delta r$, получаем окончательно

$$d_1 = d\left(1 + \frac{h}{F}\frac{n-1}{n}\right).$$

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Аткарская, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: +7 495 363-48-86, htpp: //capitalpress.ru

На шахматных полях МОСКВЫ

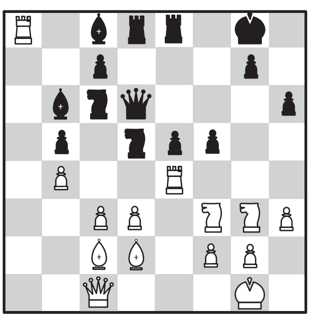
Традиционно самое «шахматное» время в Москве – конец зимы, когда столица принимает шахматные фестивали Moscow Open и Aeroflot Open. В этом году Aeroflot Open порадовал любителей шахмат рядом интересных партий.

Начнем с красивой победы российского гроссмейстера Алексея Гоганова, который, несмотря на ряд ошибок, был вознагражден Каиссой за творческую игру с призером чемпионата мира среди юниоров Абхиману Пураником.

А.Гоганов–А.Пураник

Москва, 2019

1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗c4 ♝c5 4. 0-0 ♞f6 5. d3 d6 6. c3 a6 7. ♗b3 h6 8. ♘bd2 0-0 9. h3 ♜e8 10. ♖e1 ♝e6 11. ♗c2 ♝a7 12. ♘f1 d5 13. ed ♛d5 14. ♘g3 ♜ad8 15. b4 b5. 16. a4 ♝b6 17. ♗d2 ♛d6 18. ♕c1 ♝c8 19. ab ab 20. ♖a8 ♞d5 21. ♖e4 f5. Небольшая неточность, позволяющая белым провести позиционную жертву качества. Компьютер отдает предпочтение 19... ♝d7.



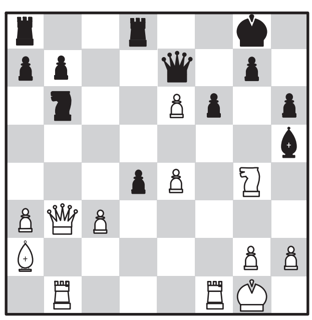
22. ♖c8!? fe 23. ♘e4 ♛f8 24. ♗b3 ♚h8 25. ♗h6 ♜c8 26. ♗d5 ♞e7 27. ♘e5 gh 28. ♘f7+ ♚h7 29. ♗b3 ♜cd8 30. d4? Серьезная ошибка, она могла стоить белым партии. Необходимо было отыграть одно качество: 30. ♘f6+ ♚g6 31. ♘e8 ♜e8 32. d4. **30...♞d5 31. ♗c2 ♚g8 32. ♘h6+ ♚h8 33. ♕g5 ♜d7! 34. ♘g4 ♜e6?** Ошибка. Эту ладью нужно использовать для защиты линии h: 34... ♛g8! 35. ♕h6+ ♜h7. **35. ♘g3?** Ответная любезность. Вернуть преимущество позволял шах – 35. ♕h5+ ♚g7 36. ♘c5. **35... ♛f4 36. ♕h5+ ♚g8 37. ♗f5 ♜e1+ 38. ♔h2 ♜g7?** В цейтноте черные ошибаются последними. Хладнокровное 38... ♜de7 оставляло им перевес и шансы на победу. **39. ♗e4!** Двойной удар: грозит ♕e8 и ♗d5. Черные вынуждены отдать ладью. **39...♜e4 40. ♕d5+ ♚f8 41. ♕e4 ♛e4 42. ♘e4 c6 43. f4 ♝c7 44. ♘e5 ♝e5 45. de ♜d7 46. ♘d6 ♜a7 47. f5 ♜a2 48. ♔g3 ♜e2 49. ♔f4 ♜f2+ 50. ♔g5 ♚e7 51. g4. Выигрыш белых.**

Молодой тюменский гроссмейстер Даниил Юффа (известный по участию в шоу на федеральном канале) подтвердил свой класс, проведя интересную комбинацию в партии первого тура.

Д.Юффа–Чэнь Ци

Москва, 2019

1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. ♘c3 ♞bd7 5. ♗g5 h6 6. ♗h4 ♝e7 7. e3 0-0 8. ♕c2 c5 9. ♖d1 ♛a5 10. a3 dc 11. ♗c4 ♞b6 12. ♗a2 ♞bd5 13. 0-0 ♞c3 14. bc ♝d7 15. ♘e5 ♜fd8 16. ♖b1 ♛c7 17. f4 ♝e8?! Слишком пассивно. Лучше 17...♝c6, беря под контроль центральные поля. **18. ♕b3.** В послематчевых комментариях Даниил отмечал, что уже можно было идти на прорыв: 18. f5! Компьютер с ним согласен. **18...♞d5 19. ♗e7 ♛e7 20. e4 ♞b6 21. f5 cd 22. fe f6 23. ♘g4 ♝h5.**



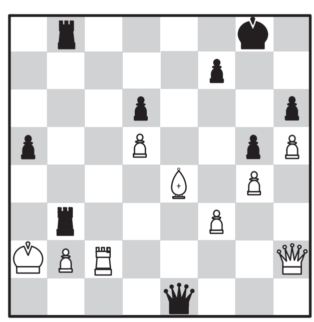
24. ♘f6+. Типичный пример позиционный жертвы фигуры. Белые рассчитывают провести атаку, ослабляя пешечное прикрытие короля. **24...gf 25. cd ♚h7 26. ♕e3 ♜g8** (26...♜ac8!?, активизируя фигуры на ферзевом фланге) **27. ♖b5 ♝g6 28. h4 ♜af8 29. h5 ♝e8 30. ♖bf5 ♜g5 31. e5 ♜f5 32. ♗b1 ♝h5?** Грубая ошибка, позволяющая белым сразу добиться решающего перевеса. Необходимо было защитить ладью: 32...fe 33. ♗f5 ♜f5 34. ♕e4, хотя и в этом варианте черным сложно обороняться из-за связки. **33. ♖f5 ♝g6 34. ♖h5!** Теперь черные сразу под двумя связками. **34... ♛g7 35. e7 ♜e8 36. ef ♞d5 37. ♖d5 ♛f6 38. ♗g6+ ♚g6. 39. ♕e4+ ♚g7 40. ♖e5 b5 41. d5. Выигрыш белых.**

Сенсационным победителем турнира стал многократный чемпион Эстонии Кайдо Кюлаотс. Опытный шахматист провел, наверное, лучший турнир в своей жизни и вместе с солидным денежным призом завоевал путевку в Дортмунд, где получит возможность сразиться с гроссмейстерами из мировой элиты.

Удачно стартовать в турнире ему позволил симпатичный тактический удар.

П.Магсудлу–К.Кюлаотс

Москва, 2019



34... ♜a3+! Белые вынуждены сдаться, так как любое взятие ведет к мату: 35. ♔a3 ♛a1×; 35. ba ♛b1×.

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

ДЫРЫ В... ОБЛАКАХ

Изредка в ровном облачном покрове вдруг возникает большая круглая дыра. Что это – случайная игра природы?

(Подробнее – на с. 28 внутри журнала)

ISSN 0130-2221 19004
9 770130 222191