

АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221

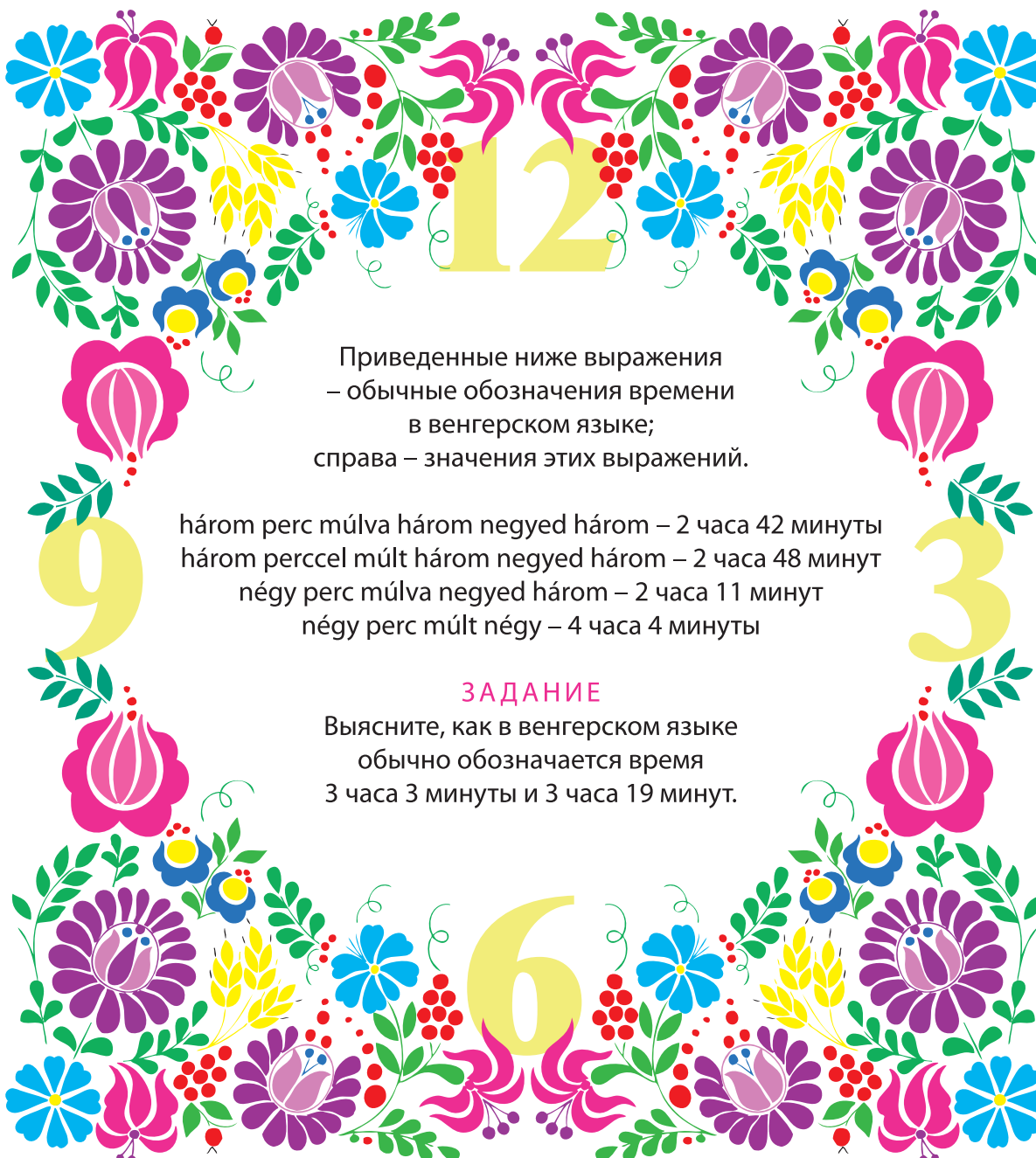
2021 · № 4

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Время по-венгерски



Приведенные ниже выражения
– обычные обозначения времени
в венгерском языке;
справа – значения этих выражений.

három perc múlva három negyed három – 2 часа 42 минуты
három perccel múlt három negyed három – 2 часа 48 минут
négy perc múlva negyed három – 2 часа 11 минут
négy perc múlt négy – 4 часа 4 минуты

ЗАДАНИЕ

Выясните, как в венгерском языке
обычно обозначается время
3 часа 3 минуты и 3 часа 19 минут.

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонovich,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Эгоцентризм, системы мира и воздушный шарик. *Е.Соколов*
- 6 Линейная независимость радикалов (окончание). *А.Канунников, И.Воробьев*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 5 Задачи 29–32

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 11 Бывают ли отрицательные цифры?
Д.Златопольский

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи М2646–М2649, Ф2653–Ф2656
- 19 Решения задач М2634–М2637, Ф2641–Ф2644

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 25 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 26 Ищем «экстремальный» экстремум.
В.Голубев

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 30 Как возникает хаос. Законы равновесного хаоса идеального газа. *А.Власов*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 36 Олимпиада «Ломоносов». Физика

- 40 Ответы, указания, решения

Наша обложка (10)

Вниманию наших читателей (39)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Е.Соколова*
- II *Лингвистические задачи*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

Эгоцентризм, системы мира и воздушный шарик

Е. СОКОЛОВ

Две вещи наполняют душу мою вечно новым и все возрастающим удивлением и благоговением... — это звездное небо надо мною и нравственный закон во мне.

Иммануил Кант. Критика практического разума

РЕБЕНОК ВСЕГДА РАСПОЛАГАЕТ себя в центре Мира. Он считает, что все вокруг совершается для него и ради него. Такое отношение к Миру называется эгоцентризмом (от лат. *ego* – я и *centrum* – центр). Бывает, что и взрослые люди не могут избавиться от эгоцентризма. Тогда это приводит их к проблемам в общении.

Три тысячи лет назад молодое человечество поступило так же, как поступают

дети. Оно поместило нашу планету Земля в центр Вселенной. Такая система мира получила название геоцентрической (от др. греч. *Γη* – Земля). По Птолемею, в центре такой системы находится Земля (рис.1). Ее окружают восемь хрустальных сфер, на которых располагаются небесные тела. А что за ними? На этот счет существовали различные мнения: другие миры (Демокрит), двигатель (Аристотель), ничто (стоики), сфера ангелов (теологи).

В XVI веке Николай Коперник предложил гелиоцентрическую систему мира (от др. греч. *ἥλιος* – Солнце). Он поместил в центр Вселенной нашу звезду Солнце (рис.2). Земля и Солнце поменялись местами, но суть осталась прежней – центром Вселенной осталась наша Солнечная система.

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210401>

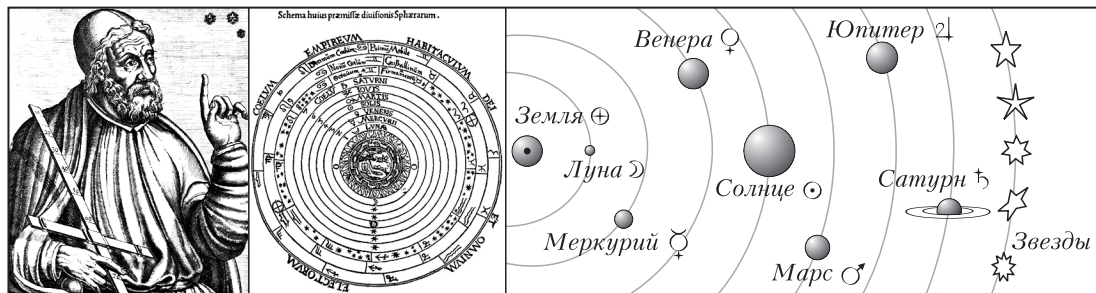


Рис. 1. Геоцентрическая система мира по Птолемею

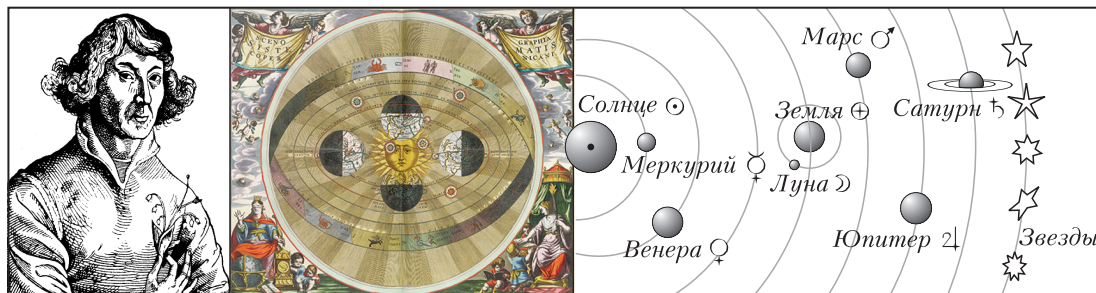


Рис. 2. Гелиоцентрическая система Коперника

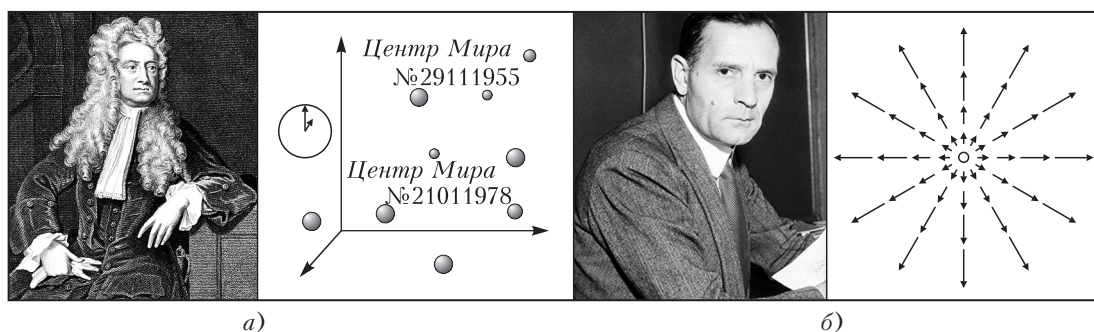


Рис. 3. а) «Демократическая» Вселенная Ньютона; б) разбегающиеся галактики Хаббла

Человечество повзрослело благодаря Исааку Ньютону. По Ньютону, Вселенная есть бесконечное неизменное абсолютное пространство, в котором равномерно и неумолимо течет абсолютное время. А что касается центра Вселенной, то, согласно Ньютону, наша Вселенная абсолютно демократична – любое тело может быть выбрано в качестве центра Вселенной (рис.3,а).

Абсолютное спокойствие ньютоновской картины Мира было нарушено, когда в 1929 году американский астроном Эдвин Хаббл обнаружил, что все галактики (громadne звездные скопления) разбегаются от нас во все стороны. При этом скорость их удаления оказалась прямо пропорциональной расстоянию до них:

$$v = H \cdot R,$$

где $H = 2,2 \cdot 10^{-18}$ 1/с – постоянная Хаббла, которую он определил из своих наблюдений.

Посмотрите на рисунок 3,б, который иллюстрирует закон Хаббла. Что из него видно? Что наша Вселенная имеет центр!

И этот центр – мы! Это настолько очевидно, что сразу же после открытия Хаббла газеты запестрели заголовками: «Настоящий центр Вселенной – наша галактика Млечный Путь!», «Мы – центр Вселенной!», «Мы – ...!», «Мы – ...!» и только «Мы – ...!»

Картинка на рисунке 3,б – сама очевидность, но доказывает ли она на самом деле, что наша Галактика является центром Вселенной? Не будем спешить с ответом и разберем следующую ситуацию:

Астрономы планеты А видят, что все остальные планеты разлетаются от нее в разные стороны (рис.4,а). При этом скорость удаления каждой планеты прямо пропорциональна расстоянию до нее. Что видят астрономы планеты В?

Слова о том, что планеты разлетаются в разные стороны со скоростями, прямо пропорциональными расстоянию до них, означают, что скорость всех разлетающихся планет подчиняется закону $\vec{v} = H \cdot \vec{R}$, где $\vec{R}$ – радиус-вектор некоторой планеты относительно планеты А, а H – некоторый постоянный для всех планет коэффициент

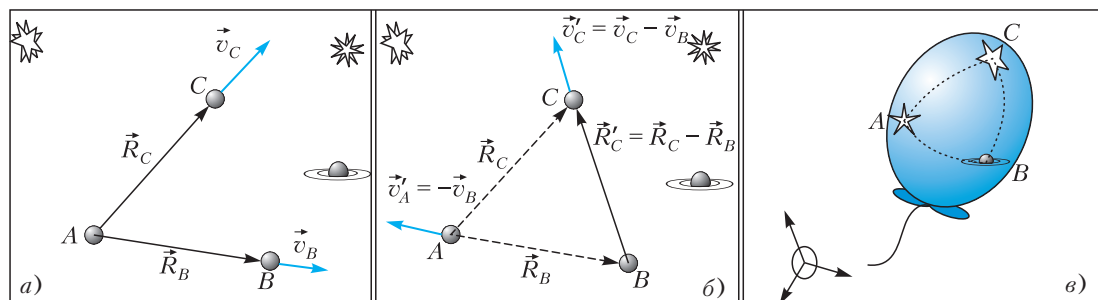


Рис. 4. а) и б) Разлетающиеся планеты; в) наша Вселенная как летящий воздушный шарик

ент. Отсюда для скоростей двух произвольных планет B и C получаем

$$\vec{v}_B = H \cdot \vec{R}_B \text{ и } \vec{v}_C = H \cdot \vec{R}_C.$$

Чтобы узнать, что видят астрономы планеты B , сядем на эту планету. В новой системе отсчета (системе отсчета, связанной с планетой B) мы, конечно, увидим все те же тела, но вот скорости у них будут другие. Согласно классическому закону сложения скоростей, при переходе в систему отсчета, движущуюся со скоростью $\vec{v}_B$, скорости всех других тел, следует переисчислять по правилу

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_B.$$

Поэтому скорость планеты C в системе отсчета, связанной с планетой B (рис.4,б), будет равна

$$\begin{aligned} \vec{v}'_C &= \vec{v}_C - \vec{v}_B = H \cdot \vec{R}_C - H \cdot \vec{R}_B = \\ &= H \cdot (\vec{R}_C - \vec{R}_B) = H \cdot \vec{R}'_C. \end{aligned}$$

Осталось прочесть этот ответ: астрономы планеты B видят... то же самое, что и астрономы планеты A , – все планеты разлетаются от них в разные стороны со скоростями, прямо пропорциональными удаленности планеты. Иными словами, астрономы любой планеты видят одно и то же, абсолютная демократичность нашей Вселенной спасена!

Открытый Э.Хабблом факт разлета галактик было первым подтверждением те-

ории Большого взрыва. Согласно этой теории когда-то, давным-давно, наша Вселенная была просто точкой, а потом стала безостановочно расширяться. Закон Хаббла позволяет определить, когда это произошло. Для этого достаточно просто разделить расстояние, которое успела пролететь каждая галактика, на ее скорость:

$$T = \frac{R}{v} = \frac{R}{H \cdot R} = \frac{1}{H} = 4,5 \cdot 10^{17} \text{ с} = 14 \text{ млрд лет.}$$

Итак, вот уже четырнадцать миллиардов лет существует наша Вселенная. В ней бушуют космические бури, образуются черные дыры, рождаются и умирают звезды. Но что самое интересное, в ней до сих пор существуют непосредственные свидетели того неимоверно далекого события – рождения нашей Вселенной! Кто они? Это частицы света, которые были рождены в момент Большого взрыва, – реликтовое излучение. Четырнадцать миллиардов лет они движутся без остановок и хранят в себе историю самых первых моментов жизни нашей Вселенной. Ученые пылливо изучают их (рис.5). Они пытаются прочесть в этих частицах тайны нашей Вселенной.

Недавно было выяснено, что «тонкие детали распределения реликтового излучения по направлениям», возможно, указывают на то, что все-таки центр у нашей



а)



б)



Рис. 5. а) Р.Вильсон и А.Пензиас – лауреаты Нобелевской премии 1978 года за открытие реликтового излучения; б) Д.Мазер и Д.Смут – лауреаты Нобелевской премии 2006 года за изучение свойств реликтового излучения

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Вселенной существует и расположен он где-то в направлении созвездия Льва. Так что вопрос о центре Вселенной снова становится актуальным. Но очень хотелось бы, чтобы абсолютная демократичность нашей Вселенной была ее неотъемлемым свойством. Поэтому давайте сейчас не будем спешить с выводами и подождем, пока тонкие детали распределения реликтового излучения не будут подвергнуты «еще более тонкому анализу».

И, все-таки, в голове никак не укладываются две вещи: то, что мы видим – очевидную «недемократичность» рисунка 3,б, и то, что мы получили рассмотре-

ниями – полную демократичность нашей Вселенной!

Однако это противоречие легко разрешить. Давайте представим, что наша Вселенная – это воздушный шарик (рис.4,в), летящий в веселом голубом небе. Когда шарик поднимается все выше и выше, его размеры увеличиваются, а все звезды и галактики, нарисованные на его поверхности, удаляются друг от друга абсолютно демократично. Так и наша Вселенная – она абсолютно демократична, но увидеть это воочию может лишь наблюдатель, находящийся вне ее!

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы завершаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest Желаем успеха!

29. В каждой клетке квадратной таблицы стоит 1 или -1 . Сумма всех чисел в таблице равна 1. Можно ли определить, чему равно их произведение?

Б.Френкин

30. Точки K , L , M и N лежат на сторонах AB , BC , CD и DA четырехугольника $ABCD$. Каждая точка делит соответствующую сторону в отношении $1 : 2$ (для стороны AB либо $AK : KB = 1 : 2$, либо $BK : KA = 1 : 2$ и т.д.). Могло ли оказаться, что площадь четырехугольника $KLMN$ больше площади четырехугольника $ABCD$?

С.Дворянинов

31. На окружности отмечено 50 точек. Рассмотрим все треугольники с вершинами в них. Может ли среди них тупоугольных треугольников быть ровно в 2 раза больше, чем остроугольных?

Е.Бакаев, С.Дворянинов

32. Рассмотрим последовательность чисел $1, 2, 3, \dots, n$. За один шаг можно поменять местами любые два числа. Найдите количество последовательностей, которые можно получить из начальной за $n - 1$ шагов, но нельзя получить за меньшее количество шагов.

В.Расторгуев

Линейная независимость радикалов

А.КАНУННИКОВ, И.ВОРОБЬЕВ

§4. Дополнение про след

Мы построим функцию след $\text{tr}: L \rightarrow L$ для любого расширения $L \supseteq \mathbb{Q}$, порожденного конечным числом алгебраических чисел, в частности для $L = \mathbb{Q}(\sqrt[k_1]{Q_1}, \dots, \sqrt[k_N]{Q_N})$. Сделаем это двумя способами. Начнем с того, который более соответствует рассуждению в §3 и обогащает его, переводя на язык теории Галуа. Затем мы дадим основное определение следа, объясняющее, кстати, его название. На этом пути нам понадобятся начальные сведения из линейной алгебры:

- базис и размерность расширения, теорема о башне [4, §5];
- операции над матрицами, обратная матрица [1, с.41–44, 73];
- матрица линейного оператора в базисе, ее преобразование при смене базиса [1, с.234–236].

Первый подход (в духе теории Галуа).

Нам нужен хорошо известный факт [4, теорема 2]: множество $\mathbb{A}$ алгебраических (над $\mathbb{Q}$) чисел является полем. Отсюда $L \subseteq \mathbb{A}$, так как L порождено над $\mathbb{Q}$ алгебраическими числами.

Назовем отображение $\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}$ *вложением*, если $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $a, b \in L$ и $\varphi(c) = c$ при $c \in \mathbb{Q}$. В частности, φ линейно: $\varphi(ca) = \varphi(c)\varphi(a) = c\varphi(a)$ при $c \in \mathbb{Q}$ и $a \in L$. Ниже мы покажем, что существует лишь конечное число вложений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ поля L . Определим

$$\text{tr}(\alpha) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\alpha). \quad (19)$$

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

Задача 12. Не читая далее, а) докажите, что все вложения $\mathbb{Q}(i) \rightarrow \mathbb{C}$ суть $a + bi \mapsto a \pm bi$ ($a, b \in \mathbb{Q}$); б) опишите все вложения $\mathbb{Q}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \mathbb{C}$. Найдите $\text{tr}(1+i)$ в каждом из пунктов.

Вложения открывают новый взгляд на сопряженные числа, которые прежде мы характеризовали в терминах корней неприводимых многочленов. Пусть $\alpha \in L$ и

$$\mu_\alpha(x) = x^m - c_{m-1}x^{m-1} - \dots - c_1x - c_0. \quad (20)$$

Применив любое вложение $\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}$ к обеим частям равенства $\mu_\alpha(\alpha) = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_\alpha(\alpha)) &= \varphi(\alpha)^m - c_{m-1}\varphi(\alpha)^{m-1} - \dots \\ &\dots - c_1\varphi(\alpha) - c_0 = \mu_\alpha(\varphi(\alpha)) = \varphi(0) = 0, \end{aligned}$$

получим, что $\varphi(\alpha)$ сопряжено с α . Обратное, пусть α_j – любое сопряженное с $\alpha \in L$. Существует ли вложение $L \rightarrow \mathbb{C}$, переводящее α в α_j ? Такое вложение должно задаваться в поле $\mathbb{Q}(\alpha)$ правилом $f(\alpha) \mapsto f(\alpha_j)$, где $f \in \mathbb{Q}[x]$ (по лемме 4 всякое число из $\mathbb{Q}(\alpha)$ имеет такой вид). С другой стороны, это правило корректно (не зависит от выбора многочлена f) и задает вложение $\mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$, так как для всех $f, g \in \mathbb{Q}[x]$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= g(\alpha) \Leftrightarrow f(x) - g(x): \mu_\alpha(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(\alpha_j) = g(\alpha_j), \\ f(\alpha) + g(\alpha) &= (f+g)(\alpha), \\ f(\alpha)g(\alpha) &= (fg)(\alpha). \end{aligned}$$

Не очевидно, впрочем, что это вложение продолжается с $\mathbb{Q}(\alpha)$ на L , но во всяком случае для *простых* (порожденных одним числом) расширений поля $\mathbb{Q}$ приведенное

выше рассуждение доказывает следующую теорему о вложениях.

Теорема 4. Пусть $\theta_1 = \theta, \dots, \theta_n$ – все сопряженные с $\theta \in \mathbb{A}$. Тогда все вложения $\mathbb{Q}(\theta) \rightarrow \mathbb{C}$ суть

$$\varphi_j : f(\theta) \mapsto f(\theta_j) \quad (f \in \mathbb{Q}[x]), \quad j = 1, \dots, n.$$

К счастью, расширение, порожденное конечным числом алгебраических чисел, порождается одним числом – так называемым *примитивным элементом*.

Пример 11. Покажем, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Включение $\supseteq$ очевидно. Обратное,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &\ni \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \ni \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}, \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Теорема 5 (о примитивном элементе). Существует такое $\theta \in L$, что $L = \mathbb{Q}(\theta)$.

На практике бывает проще работать с несколькими порождающими, но более просто устроенными.

Задача 13. Опишите все вложения полей $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{2})$.

Докажем, что функция (19) обладает требуемыми свойствами. Линейность следа вытекает из линейности вложений. Пусть $\alpha \in L$. Докажем (17), т.е. что $\text{tr}(\alpha) = d\sigma(\alpha)$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. По теореме 5 $\alpha = f(\theta)$, где $f \in \mathbb{Q}[x]$. Далее, $\varphi_j(\alpha) = \varphi_j(f(\theta)) = f(\varphi_j(\theta))$, что по теореме 4 равно $f(\theta_j)$. Итак,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (x - \varphi_j(\alpha)) &= \prod_{j=1}^n (x - f(\theta_j)) \stackrel{\text{лемма 6}}{=} \\ &\stackrel{\text{лемма 6}}{=} \mu_{f(\theta)}(x)^d = \mu_\alpha(x)^d, \quad d \in \mathbb{N}. \quad (21) \end{aligned}$$

Приравняв суммы корней (с кратностями) многочленов в левой и правой частях, получим (17).

Второй подход (только линейная алгебра). След $\text{tr } A$ квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ – это сумма ее диагональных элементов, $\text{tr } A = \sum_i a_{ii}$. Непосредственно проверяется, что $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ для мат-

риц A и B одного размера. Отсюда следует, что след матрицы оператора не зависит от выбора базиса: $\text{tr}(C^{-1}AC) = \text{tr}(ACC^{-1}) = \text{tr}(A)$. Он называется следом этого оператора.

Пусть $L \supseteq K$ – расширение полей. Размерность L как векторного пространства над K называется *степенью* расширения $L \supseteq K$ и обозначается $[L : K]$. Расширение конечной степени называется *конечным*. Верно следующее классическое утверждение (оно следует, например, из приведенных в [4] теорем 8 и 9):

Лемма 7 (о башне). Пусть $K \supseteq P \supseteq L$ – конечные расширения, $e_1, \dots, e_m$ – базис в L над P , а $f_1, \dots, f_n$ – базис в P над K . Тогда элементы $e_i f_j$, где $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$, образуют базис в L над K . В частности, $[L : K] = [L : P] \cdot [P : K]$.

Из лемм 4 и 7 следует, что расширения, порожденные конечным числом алгебраических элементов, конечны. В частности, таково наше расширение $\mathbb{Q}(\sqrt[k_1]{Q_1}, \dots, \sqrt[k_N]{Q_N}) \supseteq \mathbb{Q}$.

Итак, пусть $L \supseteq \mathbb{Q}$ – любое конечное расширение, лежащее в $\mathbb{C}$. Пусть $\alpha \in L \subset \mathbb{C}$. След линейного оператора $L \rightarrow L$, $x \mapsto \alpha x$, называется следом числа α и обозначается $\text{tr}_L^{\mathbb{Q}}(\alpha)$ или $\text{tr}(\alpha)$, если расширение $L \supseteq \mathbb{Q}$ фиксировано.

Пример 12. Матрица умножения на $\sqrt[3]{2}$ в базисе $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ расширения $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \supseteq \mathbb{Q}$ есть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

так как $1 \mapsto \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{4} \mapsto 2$. Следовательно, $\text{tr}(\sqrt[3]{2}) = \text{tr } A = 0$.

Ясно, что $\text{tr}(\alpha)$ линейно зависит от α . Уточним смысл множителя d в (17) и докажем формулу

$$\text{tr}(\alpha) = [L : \mathbb{Q}(\alpha)] \sigma(\alpha), \quad \alpha \in L. \quad (22)$$

Для этого выберем удобный базис в L над $\mathbb{Q}$. Сохраним обозначение (20). Тогда

$1, \alpha, \dots, \alpha^{m-1}$ – базис в $\mathbb{Q}(\alpha) \supseteq \mathbb{Q}$. Возьмем любой базис $e_1, \dots, e_d$ в расширении $L \supseteq \mathbb{Q}(\alpha)$. По лемме 7,

$$\underbrace{e_1, e_1\alpha, \dots, e_1\alpha^{m-1}}_{1\text{-й блок}}, \dots, \underbrace{e_d, e_d\alpha, \dots, e_d\alpha^{m-1}}_{d\text{-й блок}}$$

– базис в $L \supseteq \mathbb{Q}$. Векторы i -го блока при умножении на α преобразуются внутри блока по правилу

$$\begin{aligned} e_i &\mapsto e_i\alpha \mapsto e_i\alpha^2 \mapsto \dots \mapsto e_i\alpha^{m-1} \mapsto e_i\alpha^m = \\ &= e_i(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{m-1}\alpha^{m-1}). \end{aligned}$$

Поэтому в этом базисе матрица умножения на α блочно-диагональная с d одинаковыми блоками

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{m-1} \end{pmatrix}$$

и ее след равен dc_{m-1} . Так как $d = [L : \mathbb{Q}(\alpha)]$ и $c_{m-1} = \sigma(\alpha)$, то формула (22) доказана. Заметим, что она также следует из (21):

$$d = \frac{n}{\deg \mu_\alpha(x)} = \frac{[L : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} = [L : \mathbb{Q}(\alpha)].$$

Поэтому два данных определения следа эквивалентны.

В заключение отметим, что $\mu_\alpha(x)$ – это минимальный многочлен оператора умножения на α , а $\mu_\alpha(x)^d$ – характеристический многочлен этого оператора.

§5. Доказательства лемм и теорем

Лемма 1. Пусть $\sqrt[k]{A/B} = a/b$, где $a, b \in \mathbb{N}$, тогда $Ab^k = Ba^k$. Каждый простой делитель p числа A не делит B и входит в разложение чисел a^k и b^k в степенях, кратных k , поэтому p входит в разложение A в степени, тоже кратной k . Рассуждение с простыми делителями числа B аналогично. В обратную сторону утверждение очевидно.

Теорема 1 $\Rightarrow$ Теорема 2. Применим теорему 1 к $\{Q_1, \dots, Q_N\} = \{r_1^{l_1} \dots r_n^{l_n} \mid 0 \leq l_1, \dots, l_n < k\}$ и $k_1 = \dots = k_N = k$. Условие $\sqrt[k]{Q_i/Q_j} \notin \mathbb{Q}$ при $i \neq j$ верно по лемме 1.

Теорема 2 $\Rightarrow$ Теорема 1. Пусть $p_1, \dots, p_n$ – простые делители числителей и знаменателей в несократимых представлениях $Q_1, \dots, Q_N$ и $k = k_1 \dots k_N$. Тогда $\sqrt[k]{Q_i} = \sqrt[k]{Q_i^{k/k_i}}$ пропорционально с рациональным коэффициентом числу вида $\sqrt[k]{p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}}$, где $0 \leq l_1, \dots, l_n < k$.

Лемма 2. 1) При нуле можно взять ненулевой коэффициент, а при пропорциональных числах kx и lx ($0 \neq k, l \in K$) – коэффициенты l и $-k$ соответственно. Взяв нулевые коэффициенты при остальных элементах системы, получим ее нулевую линейную комбинацию, в которой не все коэффициенты равны 0.

2) Пусть система $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ линейно независима над K и $a_1x_1 + \dots + a_mx_m = 0$. Тогда из равенства $a_1x_1 + \dots + a_mx_m + 0x_{m+1} + \dots + 0x_n = 0$ следует, что $a_1 = \dots = a_m = 0$.

3) Если $x \in K$, то, положив в равенстве $a \cdot 1 + b \cdot x = 0$ значения $a = x$ и $b = -1$, получим, что 1 и x линейно зависимы над K . Обратно, если $x \notin K$, то из равенства $a \cdot 1 + b \cdot x = 0$, где $a, b \in K$, следует, что $b = 0$ (иначе $x = -a/b \in K$), а тогда и $a = 0$.

4) Если $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$, где $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in K$, то $(a_1 - b_1)x_1 + \dots + (a_n - b_n)x_n = 0$. Линейная независимость чисел $x_1, \dots, x_n$ равносильна равенствам

$$a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0.$$

Теорема 2' $\Rightarrow$ теорема 2. Индукция по n . При $n = 1$ теоремы совпадают буквально: $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1}) = \mathbb{Q}$. Пусть $n > 1$. Переформулируем теорему 2: если $F(x_1, \dots, x_n)$ – многочлен над $\mathbb{Q}$, имеющий по каждой переменной степень меньше k , и $F(r_1, \dots, r_n) = 0$, то $F = 0$ (т. е. все коэффициенты многочлена F нулевые). Запишем F в виде

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= f_0(x_1, \dots, x_{n-1}) + \\ &+ f_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + \dots + f_{k-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{k-1}. \end{aligned}$$

По условию $F(r_1, \dots, r_n) = 0$. По теореме 2' имеем $f_j(r_1, \dots, r_{n-1}) = 0$ для всех $j = 0, \dots, k-1$. По предположению индукции $f_0 = \dots = f_{n-1} = 0$, т.е. $F = 0$.

Теорема 3. 1) Это верно по определению минимального многочлена и линейной зависимости.

2) Если многочлен μ_α раскладывается в произведение многочленов над K меньшей степени, то α – корень одного из сомножителей, что противоречит минимальности степени $\deg \mu_\alpha$.

3) Пусть $f \in K[x]$ и $f(\alpha) = 0$. Разделим f на μ_α с остатком: $f = \mu_\alpha q + s$, где $q, s \in K[x]$ и либо $s = 0$, либо $\deg s < \deg \mu_\alpha$. Второй вариант невозможен, так как $s(\alpha) = f(\alpha) - \mu_\alpha(\alpha)q(\alpha) = 0$.

4) По пункту 2, $p(x)$ делится на $\mu_\alpha(x)$, а так как $p(x)$ неприводим над K , то $p(x)/\mu_\alpha(x) = c \in K$. Поскольку старшие коэффициенты у $p(x)$ и $\mu_\alpha(x)$ равны 1, то $c = 1$.

Лемма 3. Предположим, что двучлен $x^k - r^k$ имеет делитель из $K[x]$ степени $l \in \{1, \dots, k-1\}$ и c – свободный член этого делителя. Из разложения (8) имеем $c = (-r)^l \varepsilon^s$ для некоторого целого s . Поскольку $c \in K \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ и $|\varepsilon^s| = 1$, то $r^l = \pm |c| \in K$, что противоречит условию.

Лемма 4. Числа вида (10) лежат в $K(\alpha)$, поэтому надо проверить, что они сами образуют поле. Замкнутость относительно сложения, вычитания и умножения очевидна. Пусть $f \in K[x]$ и $f(\alpha) \neq 0$. Тогда $f(x)$ не делится на $\mu_\alpha(x)$, а потому эти многочлены взаимно просты. По алгоритму Евклида найдутся такие многочлены $u, v \in K[x]$, что $u(x)f(x) + v(x)\mu_\alpha(x) = 1$. При $x = \alpha$ получим $1/f(\alpha) = u(\alpha)$, что преобразуется к виду (10) заменой u его остатком от деления на μ_α . Коэффициенты c_i определены однозначно, иначе α был бы корнем многочлена степени меньше k .

Лемма 5. Существует наименьшее $m \in \mathbb{N}$ такое, что $r^m \in K$. По лемме 3 двучлен $x^m - r^m$ неприводим над K , а значит, равен $\mu_r^K(x)$. Так как $r \notin K$, то $m > 1$ и $\sigma(r) = 0$.

Немного теории. Многочлен от переменных $x_1, \dots, x_k$, не меняющийся при их перестановках, называется *симметрическим*. Многочлены $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, определяемые равенством

$$(t - x_1) \dots (t - x_k) = t^k - \sigma_1 t^{k-1} + \sigma_2 t^{k-2} - \dots + (-1)^k \sigma_k,$$

называются *элементарными симметрическими*. Например, при $k = 3$: $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$, $\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$.

Основная теорема о симметрических многочленах. Всякий симметрический многочлен от $x_1, \dots, x_k$ выражается через $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ (и притом однозначно).

(Например, $x_1^2 + \dots + x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.)

Для доказательства введем лексикографический порядок на одночленах: сначала сравниваем показатели при x_1 – если они равны, то сравниваем показатели при x_2 и т.д. Старший член ненулевого многочлена F относительно этого порядка обозначим $\text{lt}(F)$. Например, $\text{lt}(x_1 x_2^5 - x_1^2) = -x_1^2$.

Пусть $F(x_1, \dots, x_k)$ – симметрический многочлен и $\text{lt}(F) = ax_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ (если $F = 0$, доказывать нечего). Так как в F входят мономы, полученные из данного перестановками переменных, то $n_1 \geq \dots \geq n_k$. Подберем многочлен $G = a\sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \dots \sigma_k^{l_k}$ с тем же старшим членом. Так как $\text{lt}(\sigma_i) = x_1 \dots x_i$ при всех i и $\text{lt}(fg) = \text{lt}(f)\text{lt}(g)$ для любых ненулевых многочленов f и g , то

$$\text{lt}(G) = ax_1^{l_1} (x_1 x_2)^{l_2} \dots (x_1 \dots x_k)^{l_k},$$

что равно $\text{lt}(F)$ при $l_1 + \dots + l_k = n_1$, $l_2 + \dots + l_k = n_k$, ..., $l_k = n_k$. Ввиду неравенств $n_1 \geq \dots \geq n_k$ такие $l_1, \dots, l_k \geq 0$ существуют. Если $F = G$, все доказано, иначе применим то же рассуждение к многочлену $F - G$, старший член $bx_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$ которого младше, чем у F . Всего таких старших членов конечное число (следует учесть, что $m_1 \geq \dots \geq m_k$), поэтому процесс завершится за конечное число шагов и мы выразим F через элементарные симметрические: $F = H(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$.

Важное следствие: если вместо $x_1, \dots, x_k$ подставить корни многочлена $(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$ с коэффициентами $\pm \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

из того же поля K (что и F , и H), то получится число $F(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ из K .

Лемма 6. Коэффициенты многочлена $g(x) = (x - f(\alpha_1)) \dots (x - f(\alpha_k))$ лежат в K по следствию выше. Значит, число $f(\alpha)$ алгебраично над K и $\mu_{f(\alpha)}(x)$ делит $g(x)$.

Многочлен $\mu_{f(\alpha)}(f(x)) \in K[x]$ имеет корень α , а потому делится на многочлен $\mu_\alpha(x)$. Значит, все корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ последнего являются корнями многочлена $\mu_{f(\alpha)}(f(x))$, т.е. числа $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_k)$ сопряжены.

Пусть $d \in \mathbb{N}$ – наименьшее такое число, что $\mu_{f(\alpha)}(x)^d$ делит $g(x)$. Докажем, что $g(x) = \mu_{f(\alpha)}(x)^d$. Действительно, в противном случае многочлен $g(x)/\mu_{f(\alpha)}(x)^d \in K[x]$ имеет некоторый корень $f(\alpha_j)$, а значит, делится на $\mu_{f(\alpha_j)}(x) = \mu_{f(\alpha)}(x)$, что противоречит минимальности d .

Теорема 5. Достаточно для данных $\alpha, \beta \in L$ найти такое $\theta = \alpha + c\beta \in L$, где $c \in \mathbb{Q}$, что $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ (далее – индукция по числу порождающих). Пусть $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta = \beta_1, \dots, \beta_n$ – все сопряженные с α и β . Общие корни многочленов $\mu_\beta(x)$ и $\mu_\alpha(\theta - cx)$ – такие β_j , что $\theta - c\beta_j = \alpha_i$ для некоторого i . Подберем c так, чтобы $\alpha + c\beta \neq \alpha_i + c\beta_j$ при $(i, j) \neq (1, 1)$.

Тогда β – единственный корень указанных многочленов и с учетом отсутствия у многочлена $\mu_\beta(x)$ кратных корней (замечание после (13))

$$(\mu_\beta(x), \mu_\alpha(\theta - cx)) = x - \beta \in \mathbb{Q}(\theta)[x].$$

Итак, $\beta \in \mathbb{Q}(\theta)$, откуда $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\theta)$.

Литература

1. Э.Б.Винберг. Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2019.
2. Л.Камнев. Иррациональность суммы радикалов. – «Квант», 1972, №2.
3. А.Канунников. Алгебра и геометрия комплексных чисел. – «Квант», 2017, № 5,6.
4. А.Л.Канунников. Алгебраические числа как векторы. – Математическое просвещение, сер.3, вып.26, 2020, с.91–122.
5. В.Олейников. Иррациональность и неприводимость. – «Квант», 1986, №10.
6. В.А.Уфнаровский. Математический аквариум. – М.:МЦНМО, 2010.
7. I.Richards. An Application of Galois Theory to Elementary Arithmetic. – Advances in Mathematics, 13, 1974, p. 268–273.

Работа первого автора поддержана грантом «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем» Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Работа второго автора поддержана грантом РНФ № 17-11-01337.

Почему горячий душ притягивает занавеску?

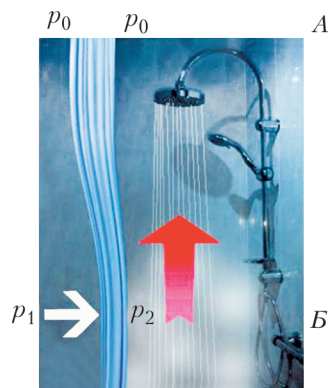
Действительно, стоит зайти в душевую кабину и включить горячий душ, как занавеска, отделяющая кабину от остальной части ванной комнаты, начинает двигаться к нам, будто атакуя. Чтобы найти причину такого поведения занавески, достаточно принять холодный душ и убедиться, что к холодному душу занавеска не притягивается. Поэтому объяснение атакующего поведения душевой занавески может быть, например, таким.

Над занавеской (уровень A на рисунке) давление воздуха p_0 слева и справа от занавески одинаково. Ниже уровня A справа от занавески воздух теплее, а значит легче, и потому давление p_2 на уровне B справа меньше, чем давление p_1 слева. Разность давлений $p_1 - p_2$ и приводит к движению занавески внутрь душевой кабины (см. белую стрелку на рисунке; красной стрелкой показано движение теплого воздуха вверх).

Интересно, что в продаже уже появились устройства, препятствующие движению занавески.

А какое объяснение рассмотренного эффекта могли бы предложить вы?

К. Богданов



Бывают ли отрицательные цифры?

Д. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ

Что такое отрицательные цифры

Как ни странно, ответ на вопрос, вынесенный в название статьи: «Да, бывают!» Впервые отрицательные цифры предложил использовать еще в 1726 году английский математик Джон Колсон в своей статье «Краткое изложение отрицательно-положительной арифметики» [1]. Чтобы отличить отрицательные цифры от «обычных», он предложил обозначать их с черточкой над цифрой. Так, в начале статьи ученый приводит число $3\bar{7}09\bar{2}865\bar{7}396\bar{1}47\bar{2}$ и далее показывает, что оно соответствует «обычному» числу 2308726432039468, хотя приведенный пример не совсем соответствует цели, которую, как пишет сам Колсон, он ставит, вводя отрицательные цифры. А цель эта такая – упрощение арифметических операций над большими числами путем отказа от использования «больших» цифр 6, 7, 8 и 9 и замены их значениями с отрицательными цифрами $\bar{1}\bar{4}$, $\bar{1}\bar{3}$, $\bar{1}\bar{2}$ и $\bar{1}\bar{1}$. Здесь $\bar{1}\bar{4} = 10 - 4$, так же, как $14 = 10 + 4$ (аналогично для $\bar{1}\bar{3}$, $\bar{1}\bar{2}$, $\bar{1}\bar{1}$). В дальнейшем Колсон приводит пример такого преобразования – вместо числа 181937462 использовать при расчетах число $2\bar{2}\bar{2}\bar{1}\bar{4}\bar{3}\bar{5}\bar{4}\bar{2}$.¹

Удобнее складывать

Показывая преимущества (по его мнению) своей системы, Колсон приводит такой пример сложения нескольких чисел:

¹ Конечно, Колсон описывает в статье правила преобразования чисел с цифрами 6, 7, 8 и 9 в числа с отрицательными цифрами и обратно.

$$2\bar{1}\bar{5}\bar{3}\bar{1}\bar{4}0\bar{4}\bar{3}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{3}$$

$$50\bar{4}\bar{2}03\bar{1}\bar{4}55\bar{1}\bar{2}$$

$$4\bar{3}\bar{1}0\bar{2}\bar{3}\bar{1}0\bar{2}\bar{4}\bar{1}\bar{3}$$

$$5\bar{1}\bar{3}\bar{4}\bar{2}\bar{1}\bar{1}03\bar{2}\bar{1}$$

$$2\bar{1}30\bar{4}\bar{2}\bar{1}03\bar{2}$$

$$1\bar{3}\bar{2}02\bar{1}\bar{2}\bar{2}\bar{4}$$

$$13\bar{2}\bar{2}43\bar{1}\bar{5}$$

$$\hline 1\bar{3}3\bar{3}\bar{3}2\bar{1}4\bar{1}\bar{3}\bar{4}\bar{3}\bar{1}\bar{2}$$

Видно, что если бы слагаемые были представлены в обычной десятичной записи, то пришлось бы, например, в последнем разряде складывать цифры

$$3$$

$$8$$

$$7$$

$$1$$

$$8$$

$$6$$

$$5$$

в то время как в приведенном варианте нужно сложить цифры

$$3$$

$$\bar{2}$$

$$\bar{3}$$

$$1$$

$$\bar{2}$$

$$\bar{4}$$

$$5$$

что, конечно, проще (при этом уменьшается и вероятность ошибки).

Удобнее умножать

Главным преимуществом своей системы Колсон считал упрощение умножения чисел в ней. В его системе таблица умножения включает только 25 небольших значений (каждое из которых может быть со знаками «+» и «-»):

×	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5
1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5
-1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5
2	2	-2	4	-4	6	-6	8	-8	10	-10
-2	-2	2	-4	4	-6	6	-8	8	-10	10
3	3	-3	6	-6	9	-9	12	-12	15	-15
-3	-3	3	-6	6	-9	9	-12	12	-15	15
4	4	-4	8	-8	12	-12	16	-16	20	-20
-4	-4	4	-8	8	-12	12	-16	16	-20	20
5	5	-5	10	-10	15	-15	20	-20	25	-25
-5	-5	5	-10	10	-15	15	-20	20	-25	25

что, конечно, облегчает ее запоминание. В статье он приводит пример умножения чисел

8 605 729 398 715 и 389 175 836 438

после преобразования их в соответствующие числа с отрицательными цифрами

$\overline{11} \ \overline{414} \ \overline{331} \ \overline{401} \ \overline{315}$ и $\overline{411} \ \overline{224} \ \overline{244} \ \overline{442}$

и получает результат, равный

3 349 141 936 903 996 927 377 170 (!).

Отрицательные цифры Коши

Более чем через 100 лет после статьи Колсона, в 1840 году, использовать отрицательные цифры также предложил (с той же целью) французский математик Огюстен Луи Коши [2], скорее всего, не знакомый с работой Колсона. Правда, он не привел примеры расчетов, но обратил внимание на то, что квадраты чисел 11, 12 и 13 (равные, соответственно, 121, 144 и 169) аналогичны квадратам чисел с отрицательными цифрами: $(\overline{11})^2 = \overline{121}$, $(\overline{12})^2 = \overline{144}$ и $(\overline{13})^2 = \overline{169}$ и что периодические дроби с шестизначным периодом

$$1/7 = 0,142857142857\dots,$$

$$1/13 = 0,076923076923\dots$$

при использовании в них отрицательных цифр становятся периодическими с, мож-

но сказать, «трехзначным периодом»:

$$0,143\overline{143}143\overline{143}\dots,$$

$$0,123\overline{123}123\overline{123}\dots$$

Интересно, что Коши обнаружил также такие «аналогичные» значения:

$$1013^2 = 1\,026\,169 \text{ и } (\overline{1013})^2 = 1\,02\overline{6}\,169,$$

$$1006^3 = 1\,018\,108\,216 \text{ и}$$

$$(\overline{1006})^3 = 1\,01\overline{8}\,108\,\overline{216}.$$

Отрицательные цифры Селлинга

В 1887 году немецкий математик Эдуард Селлинг в своей работе [3], описывающей изобретенную им вычислительную машину, рекомендовал использовать отрицательные цифры 1, 2, 3, 4 и 5, записывая их вверх тормашками: 1, 2, 3, 4, 5. Это позволяло отказаться от цифр 9, 8, 7 и 6, что существенно упрощало расчеты. Так, «обычное» число 1046207753300 он приводит в виде: 1057212753300. Причем, по мнению Селлинга, использование двух вариантов цифры 5 является целесообразным.

Ученый также предложил варианты написания таких цифр буквами (и, соответственно, их произношения):

1) с записью немецких слов eins (один), zwei (два), drei (три), vier (четыре) и fünf (пять) в виде snie, jes, jerd, reff и niff (некоторые слова записаны «задом наперед»); такой вариант он посчитал не очень подходящим;

2) с приставкой *miss*, означающей отрицание чего-либо: missein («неодин»), mizwei («недва»), midrei («нетри») и т.п. (в ряде случаев приставка сокращается); Селлинг приводит пример произношения числа 577 – «fünf hundert mizwanzig mizwei» («пятьсот недвадцать недва»);

3) с приставкой *ab*, означающей отсутствие чего-либо: abein, abzwei, abdrei и т.д. По мнению ученого, такой вариант лучше других подходит к немецкому языку и другим языкам, использующим латинские буквы.

Интересно, что в 1925 году американский математик Джон Баллантайн предложил использовать перевернутую обычную единицу (l) для записи так называемого

«дополнительного кода отрицательных чисел», применявшегося в вычислительных машинах. По его мнению, такая запись будет более привычной для человека, чем цифра 9 в начале кода. Конечно, это утверждение относилось к вычислительным машинам, работавшим с десятичными числами (а не с двоичными, как современные компьютеры). Заметим, что на популярном ресурсе «Википедия» в качестве недостатка представления отрицательного числа в виде дополнительного кода указывается то, что такой код «... визуально не читается по обычным правилам, для его восприятия нужен особый навык», что совпадает, по сути, с утверждением Баллантайна.

Задача об уравнивании весов

А для каких *практических* целей могут быть использованы отрицательные цифры?

В качестве примера можно привести такую задачу: «Известна масса груза K г. Какой минимальный набор гирь необходимо использовать для того, чтобы уравновесить чашечные весы, и как разместить гири для этого, если их можно класть на обе чашки весов?»

Решение этой задачи основано на следующей особенности: «Любое целое положительное число может быть получено в виде суммы или /и разности чисел, являющихся степенью тройки». Вот несколько примеров:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 3 - 1 \\ 4 &= 3 + 1 \\ 5 &= 9 - 3 - 1 \\ 6 &= 9 - 3 \\ 7 &= 9 - 3 + 1 \\ 21 &= 27 - 9 + 3 \\ 89 &= 81 + 9 - 1 \end{aligned}$$

Это значит, что минимальный набор гирь для взвешивания груза, например, от 1 до 100 г такой: 1, 3, 9, 27 и 81 г. Так как на чашечных весах гири можно размещать на обеих чашках – и на свободной, и вместе с грузом, то для уравнивания на них груза массой K г нужно на свободную

1. 3—1. 3. 3+1. 9—3—1. 9—3. 9+1—3. 9—1. 9. 9+1. 9+3—1. 9+3. 9+3+1. 27—9—3—1. 47—9—3. 27+1—9—3. 27—9—1. 27—9. 27+1—9. 27+3—9—1. 27+3—9. 27+3+1—9. 27—3—1. 27—3. 27+1—3. 27—1. 27. 27+1. 27+3—1. 27+3. 27+3+1. 27+9—3—1. 27+9—3. 27+9+1—3. 37+9—1. 27+9. 27+9+1. 27+9+3—1. 27+9+3. 27+9+3+1.

Представления чисел от 1 до 27 в виде суммы или разности степеней тройки из книги «*Arithmetica Integra*» немецкого монаха Михаэля Штифелиуса (1487–1567), выпущенной в 1545 году

чашку весов положить гири массой, значения которых для данного груза в правой части соответствующего равенства записаны со знаком «+», а на чашку вместе с грузом – гири массой со значениями со знаком «–» (если такие значения имеются):

Масса груза K , г	На чашке весов с грузом	На другой чашке
1		1
2	1	3
4		1 и 3
5	1 и 3	9
6	3	9
7	3	1 и 9
21	9	3 и 27
89	1	9 и 81

Но при чем тут отрицательные цифры? Давайте разбираться.

Троичная уравновешенная система счисления

Как известно, любое числовое значение можно записать не только в используемой нами десятичной системе счисления, но и в системе с другим основанием. Например, число K в троичной системе можно представить как

$$K = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_3,$$

или (в так называемой «развернутой» форме записи)

$$K = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 3 + a_0,$$

где цифры $a_0, a_1, \dots, a_n$ могут принимать значения 0, 1 или 2.

Можно доказать, что $2 \cdot 3^m = 3^{m+1} - 3^m$. Введем «отрицательную цифру» 1 и обо-

значим ее $\bar{1}$. Тогда последнее равенство можно записать в виде $2 \cdot 3^m = 3^{m+1} + \bar{1} \cdot 3^m$. А это означает, что любое целое число K можно изобразить в троичной системе счисления с помощью цифр 0, 1 и $\bar{1}$ (заменив в его развернутой записи все цифры 2 на соответствующую разность):

$$K = b_m \cdot 3^m + b_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 3 + b_0,$$

где каждый из коэффициентов $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ может быть равным 0, 1 или $\bar{1}$. Такой способ записи чисел называется «троичной уравновешенной системой счисления».² Так вот, если мы знаем, как записывается масса груза K в этой системе, то, чтобы уравновесить его на весах, нужно положить его на первую чашку весов, а гирю в 1 г поставить на вторую чашку, если $b_0 = 1$, и на первую чашку, если $b_0 = \bar{1}$ (если $b_0 = 0$, то гиря в 1 г вообще не используется); далее, гиря в 3 г ставится на вторую чашку, если $b_1 = 1$, и на первую, если $b_1 = \bar{1}$, и т.д. Легко понять, что, расставив гири по такому принципу, мы уравновесим груз.

Прежде чем приводить пример, покажем, как преобразовать обычную троичную запись в запись в уравновешенной троичной системе. Для этого нужно для каждой двойки выполнить следующие действия:

- 1) заменить ее на цифру $\bar{1}$;
- 2) в соседнем слева разряде добавить 1 (если в этом разряде в результате получается 2, то для него указанные действия повторяются).

Например, число 130, которое обычным образом записывается в троичной системе как 11211, во втором варианте будет иметь вид

$$1\bar{1}\bar{1}\bar{1}11 (3^5 - 3^4 - 3^3 - 3^2 + 3^1 + 3^0 = 130).$$

Таким образом, чтобы уравновесить груз в 130 граммов, положенный на одну из

² Впервые такую систему описал французский инженер Леон Лаланн в 1840 году. Он привел несколько первых натуральных чисел в этой системе:

1, $\bar{1}\bar{1}$, 10, 11, $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$, 110, $\bar{1}\bar{1}1$, $10\bar{1}$, 100, 101, $11\bar{1}$, ...

чашек весов, нужно на ту же чашку положить гири в 81, 27 и 9 граммов, а на противоположную – гири в 243, 3 и 1 грамм. В решении задачи нам помогла уравновешенная троичная система счисления.³

В заключение заметим, что «самый реальный» пример использования отрицательных цифр – это электронно-вычислительные машины «Сетунь»⁴ и «Сетунь 70», разработанные, соответственно, в 1960 и 1970 году в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова под руководством Николая Петровича Брусенцова (1925–2014). Их устройство и работа были основаны на уравновешенной троичной системе счисления с цифрами -1 , 0 и 1. [5]

Еще об уравновешенной троичной системе счисления

Дональд Кнут, автор всемирно известной серии книг, посвященной основным алгоритмам и методам вычислительной математики, в книге [6, стр. 230–231] приводит другой метод перевода.⁵ Он состоит в следующем.

1. К троичному числу прибавляется число из одних единиц. Например, для $130_{10} = 11211_3$:

$$\begin{array}{r} +11211 \\ +11111 \\ \hline 100022 \end{array}$$

2. Из полученной суммы вычитается (поразрядно) число из одних единиц, использовавшееся при сложении (каждая цифра уменьшаемого уменьшается на 1):

$$\begin{array}{r} -100022 \\ -11111 \\ \hline 1\bar{1}\bar{1}\bar{1}11 \end{array}$$

³ Впервые на связь задачи о наборе гирь и уравновешенной троичной системы указал Люка в книге «Математические развлечения» [4]. Правда, ученый не описал, как решить задачу для конкретного значения веса груза.

⁴ Сетунь – название речки, протекающей неподалеку от МГУ.

⁵ Ученый называет уравновешенную троичную систему «быть может, самой изящной из всех систем счисления».

Результат совпадает с полученным в нашей статье.

Упражнения

1. Запишите в уравновешенной системе троичные числа:
а) 210;
б) 1202.
2. Запишите в уравновешенной троичной системе десятичные числа:
а) 17;
б) 53.

Свойства уравновешенной троичной системы счисления

Уравновешенная троичная система счисления обладает многими весьма привлекательными свойствами.

Во-первых, она дает возможность единообразно выражать как положительные, так и отрицательные числа (как отмечалось выше, при использовании двоичной системы отрицательные числа в компьютере представляются в так называемом «дополнительном коде»). В ней знак числа определяется первым символом в записи числа в этой системе: если он равен 1, то число положительное, а если $-1(\bar{1})$, то отрицательное.

Очень просто перейти к противоположному числу, заменив 1 на $-1(\bar{1})$ и наоборот. В самом деле:

$$-8_{10} = \bar{1}01_3; \quad 8_{10} = 10\bar{1}_3.$$

Это значит, что сравнивать любые два числа можно как в десятичной системе, сравнивая цифры слева направо.

Для округления вещественного троичного числа до ближайшего целого достаточно отбросить его дробную часть. Это свойство также достаточно очевидно, поскольку самая большая возможная положительная дробная часть $0,111\dots$ представляет сумму $1/3 + 1/9 + 1/27 + \dots$, которая всегда меньше $1/2$.

Арифметические операции в троичной симметричной системе практически не сложнее двоичных, а если учесть, что в случае чисел со знаком двоичная арифметика использует искусственные коды, то окажется, что троичная даже проще. Операция сложения всякой цифры с нулем

дает в результате эту же цифру. Сложение $+1$ с -1 дает ноль. И только сумма двух $+1$ или двух -1 формируется путем переноса в следующий разряд цифры того же знака, что и слагаемые, и установки в текущем разряде цифры противоположного знака. Полностью таблица сложения, которой будем пользоваться для обычного сложения чисел «столбиком», имеет вид

+	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	0
0	$\bar{1}$	0	1
1	0	1	$\bar{1}\bar{1}$

Примечание. Запись $\bar{1}\bar{1}$ означает, что результат равен $\bar{1}$ и еще 1 переносится в следующий разряд, запись $\bar{1}1$ — что результат равен 1 и еще $\bar{1}$ переносится в следующий разряд.

Сложим в уравновешенной троичной системе числа 412 и 181 :

$$412_{10} = 120021_3 = 1\bar{1}\bar{1}01\bar{1}1_3$$

$$181_{10} = 20201_3 = 1\bar{1}\bar{1}101_3$$

$$\begin{array}{r} 1\bar{1}\bar{1}01\bar{1}1 \\ + 1\bar{1}\bar{1}101 \\ \hline 1\bar{1}\bar{1}100\bar{1} \end{array}$$

Легко проверить, что $1\bar{1}\bar{1}100\bar{1}_3 = 593_{10}$.

Упражнение 3. Найдите в уравновешенной троичной системе сумму чисел:

- а) $10\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ и $1\bar{1}0\bar{1}$;
- б) $1\bar{1}\bar{1}011$ и $1\bar{1}011$.

Результаты представьте в десятичной системе.

Столь же просто производится вычитание: для этого достаточно изменить знак вычитаемого на противоположный и сложить число с уменьшаемым. Конечно, можно проводить и «непосредственное» вычитание. Для этого удобно составить таблицу вычитания. Обсудим ее, поскольку при составлении такой таблицы получается ряд интересных результатов.

Для следующих случаев ничего необычного нет:

$$1) 0 - 0 = 0;$$

$$2) 1 - 0 = 1;$$

$$3) 1 - 1 = 0;$$

4) $0 - \bar{1} = 1$ (это следует из правил алгебры и из таблицы сложения, приведенной выше);

$$5) \bar{1} - \bar{1} = 0 \text{ (по тем же причинам).}$$

А теперь – то самое, интересное.

Сколько будет $1 - \bar{1}$? Конечно, $\bar{1}\bar{1}$ (по правилам алгебры $1 - (-1) = 2 = \bar{1}\bar{1}$). Но возникает вопрос: что происходит в соседнем слева разряде при вычитании многозначных чисел – единица заимствуется или добавляется? Для ответа рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r} 10_{10} - 2_{10} = 10_{13} - \bar{1}\bar{1}_3 \\ - \begin{array}{r} 101 \\ \bar{1}\bar{1} \\ \hline 10\bar{1} \end{array} \end{array}$$

(Результат равен 8_{10} .)

Анализ второго справа разряда показывает, что $\bar{1}$, «перешедшая» из крайнего правого разряда, *складывается* с цифрами 0 и 1!

Аналогично, для варианта $\bar{1} - 1 = \bar{1}\bar{1}$ цифра $\bar{1}$ переносится в следующий разряд, где также добавляется.

Упражнения

4. Составьте полную таблицу вычитания в уравновешенной троичной системе, в которой учитывается возможный перенос из разряда справа:

Вычитаемое	Перенос из разряда справа								
	0			1			$\bar{1}$		
	Уменьшаемое								
	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$									
0									
1									

5. Найдите разность в уравновешенной троичной системе (используя составленную таблицу или заменив вычитание сложением):

а) $10\bar{1}\bar{1} - \bar{1}\bar{1}\bar{1}$;

б) $11\bar{1}\bar{1}0 - 1111$.

Результаты представьте в десятичной системе.

Таблица умножения – совсем простая: умножение на ноль дает ноль, умножение на 1 повторяет множимое, умножение на -1 инвертирует множимое (заменяет 1 на -1 , а -1 на 1, т.е. изменяет знак числа):

×	$\bar{1}$	1
$\bar{1}$	1	$\bar{1}$
1	$\bar{1}$	1

Умножение многозначных чисел сводится к простым операциям изменения знака

(при необходимости) и сложения. Умножим, например, десятичные числа 5 и 12, записанные в уравновешенной троичной системе:

$$5_{10} = 1\bar{1}\bar{1}_3$$

$$12_{10} = 110_3$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 1\bar{1}\bar{1} \\ 110 \end{array} \\ \hline 1\bar{1}\bar{1} \\ 1\bar{1}\bar{1} \\ \hline 1\bar{1}\bar{1}10 \end{array}$$

или

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 110 \\ 1\bar{1}\bar{1} \end{array} \\ \hline 110 \\ 110 \\ \hline 1\bar{1}\bar{1}10 \end{array}$$

Переведа троичное число $1\bar{1}\bar{1}10$ в десятичную систему, получим 60 (т.е. результат правильный).

Упражнения

6. Определите произведение чисел 20 и -19 , записанных в уравновешенной троичной системе. Результат представьте в десятичной системе.

7. Опишите также правила перевода числа, представленного в уравновешенной троичной системе, в «обычную» троичную систему

- а) применительно к положительному числу;
- б) применительно к отрицательному числу.

Литература

1. J.Colson. A Short Account of Negative-Affirmative Arithmetick. <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1726.0032>

2. A.-L.Cauchy. Oeuvres. Serie I. Tome V. – Paris, 1885. <https://books.google.ru/books?id=jE4NAAAAAYAAJ>

3. E.Selling. Eine neue Rechenmaschine. – Berlin, 1887.

4. E.Lucas. Récréations mathématiques. <https://archive.org/stream/rcrationsmathma00lucagoog#page/n26/mode/1up>

5. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Сетунь_\(компьютер\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Сетунь_(компьютер))

6. Д.Кнут. Искусство программирования. Том 2. 3-е издание. – М.: Диалектика-Вильямс, 2001.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2646, M2647 предлагались на заключительном этапе XIII Олимпиады имени Л.Эйлера.

Задачи Ф2653–2656 предлагались на Московской физической олимпиаде 2021 года.

Задачи M2646–M2649, Ф2653–2656

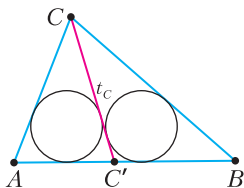
M2646. Кощей Бессмертный открыл счет в банке «Сбербанк». Изначально на счете было 0 рублей. В первый день Кощей кладет на счет k ($k > 0$) рублей, а каждый следующий день добавляет туда на один рубль больше, чем накануне (на второй день он добавляет $k+1$ рублей, на третий $k+2$ рубля и т.д.). Каждый раз сразу после того, как Кощей вносит деньги на счет, общая величина счета уменьшается банком в два раза. Найдите все такие k , при которых сумма на счете всегда будет выражаться целым числом рублей.

С.Берлов

M2647. При каких натуральных n можно так отметить несколько клеток доски $n \times n$, чтобы во всех строках и столбцах было четное число отмеченных клеток, а на всех диагоналях, длина которых больше одной клетки, – нечетное?

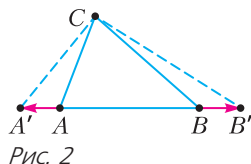
С.Берлов

M2648. Дан треугольник ABC . Пусть точка C' на стороне AB такова, что отрезок CC' делит треугольник на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей (рис.1). Обозначим через t_c длину отрезка CC' . Аналогично определим t_a и t_b . Выразите площадь треугольника ABC через t_a , t_b , t_c .



К.Мосевич Рис. 1

M2649. Изначально точечные частицы A , B , C находятся соответственно в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$ координатной плоскости. Каждую минуту какие-то две частицы отталкиваются друг от друга вдоль прямой, соединяющей их текущие положения, проходя одинаковое (положительное) расстояние (рис.2).



Может ли частица A оказаться в точке а) $(3;3)$; б) $(2;3)$?

в) Могут ли B и C оказаться одновременно соответственно в точках $(0;100)$ и $(100;0)$?

К.Кривошеев

Ф2653. Отношение количества кислорода к количеству азота в некотором объеме «неправильного воздуха» равно 1:5. На рисунке 3 изображены графики зависимости давления насыщенных паров азота (красная линия) и кислорода (синяя линия) от температуры. Температура неправильного воздуха в начальный момент равна $t_0 = -120^\circ\text{C}$. В процессе охлаждения в некоторый момент времени кислород и азот одновременно начинают конденсироваться. Используя график, определите как можно точнее, каким было начальное давление неправильного воздуха, если охлаждение производилось изобарически. А если изохорически?

А.Бычков, П.Крюков

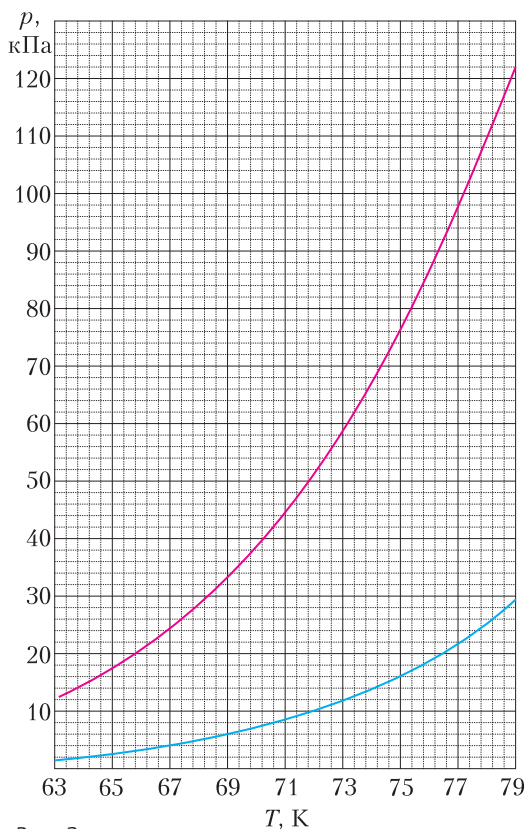


Рис. 3

Ф2654. Некоторые особенности процесса сгребания снега бульдозером можно описать на основе следующей простейшей модели. Вдали от бульдозера слой снега имеет линейную плотность ρ_0 и покоится (рис.4). Бульдозер и часть снега, прилегающая к его щиту, движутся с постоянной скоростью v . На движущуюся часть действует сила трения, удовлетворяющая закону Кулона–Амонтона $F_{\text{тр}} = \mu N$; коэффициент трения μ считается известным. Ускорение свободного падения равно g .

1) Пусть весь снег, вовлекаемый бульдозером в движение, распределяется в движущейся части со средней постоянной линейной плотностью ρ_1 . Бульдозер в состоянии

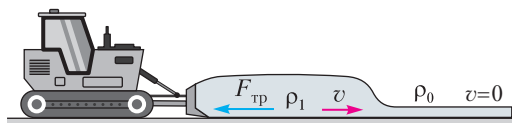


Рис. 4

развить мощность не более чем W_0 . Найдите время t , в течение которого возможно движение бульдозера с постоянной скоростью v .

2) Пусть после того, как масса снега в движущейся части достигает некоторого значения M_0 , она перестает увеличиваться. При вовлечении в движение порции снега такая же порция покидает движущуюся часть, скатываясь вбок относительно направления движения. Какую мощность W_1 должен развивать бульдозер при движении с постоянной скоростью v в этом случае?

Фольклор

Ф2655. Сетка в форме квадрата состоит из очень большого количества ячеек (рис.5). В узел с координатами $(0, 0)$, совпадающий с центром квадрата, втекает ток $I = 4$ А. Сопротивление любого проводника, соединяющего соседние узлы сетки, равно 1 Ом.

Рис. 5

1) Пусть узлы сетки на стороне большого квадрата подключены к специальному источнику напряжения так, что потенциалы узлов, лежащих на диагоналях (пунктирные линии), равны нулю везде, кроме центра квадрата, где потенциал равен 1 В. Определите потенциалы φ_{1k} в узлах с координатами $(k+1, k)$ и потенциалы φ_{2k} в узлах с координатами $(k+2, k)$ при $k \geq 0$.

2) Источник напряжения заменили на другой – еще более специальный. Теперь потенциалы узлов и на диагоналях, и в центре равны нулю. Чему равны потенциалы φ_{1k} и φ_{2k} в этом случае?

П.Крюков

Ф2656. На горизонтальной поверхности располагается диск радиусом R и толщиной h , сделанный из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ (рис.6,а). Нижняя матовая сторона диска отражает свет диффузно (иначе говоря, равномерно в любых направлениях). Верхняя и боковая поверхности диска тщательно отшлифованы.

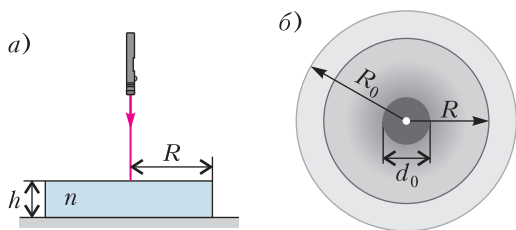


Рис. 6

Луч мощной лазерной указки, освещающей диск, направлен вдоль его оси. При рассматривании диска сверху (рис.6,б) наблюдаются: ярко выраженный темный круг диаметром d_0 с нечеткой границей и светлый ореол с резкой границей в виде концентрической с диском окружности радиусом R_0 . На рисунке 7 приведена

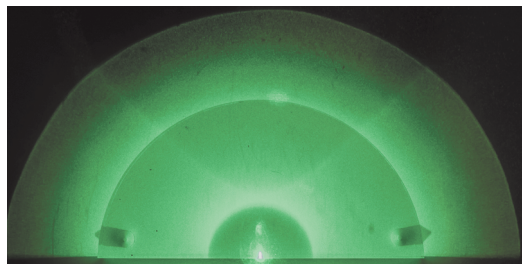


Рис. 7

фотография, полученная при проведении опыта, похожего на описанный выше. Мощной лазерной указкой освещалась нижняя точка середины половинки стеклянного диска. Можно различить темный полукруг с размытой границей и светлый ореол с резкой границей.

1) Известно, что толщина диска $h = 14$ мм,

а отношение радиусов $\frac{R_0}{R} \approx 1,65$ (это значение получается при измерениях по фотографиям опытов). Найдите радиус диска R .

2) Чем может быть обусловлено возникновение темного круга? Оцените его радиус r_0 , считая показатель преломления и толщину диска известными.

Примечание. Можно считать, что в условиях данной задачи для лучей, выходящих из стекла в воздух, от границы раздела отражается не более 10 % энергии падающего излучения, если величина угла падения меньше 37° .

П.Крюков, А.Бычков

Решения задач M2634–M2637, Ф2641–Ф2644

M2634. «Параболической длиной» отрезка назовем длину проекции этого отрезка на прямую, перпендикулярную оси симметрии параболы. В параболе провели две хорды AB и CD , пересекающиеся в точке N (рис.1). Докажите теорему «о произведении длин отрезков секущих»: произведение параболических длин отрезков AN и BN равно произведению параболических длин отрезков CN и DN .

Подберем систему координат так, чтобы парабола имела уравнение $y = x^2$ (рис.2).

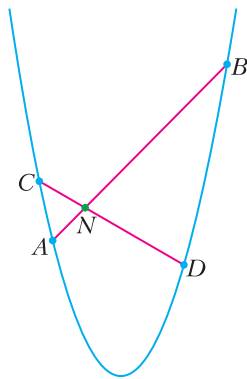


Рис. 1

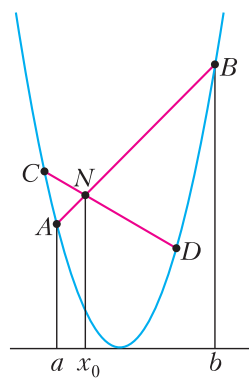


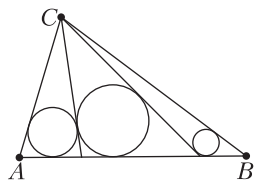
Рис. 2

Пусть точка N имеет координаты (x_0, y_0) . Так как прямая AB проходит через N , эта прямая будет иметь уравнение вида $y = k(x - x_0) + y_0$. Тогда абсциссы a и b точек A и B пересечения прямой и параболы находятся из уравнения $x^2 = k(x - x_0) + y_0$ или, эквивалентно, $x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0$.

Произведение параболических длин отрезков AN и BN тогда равно $\Pi = -(a - x_0)(b - x_0) = x_0(a + b) - ab - x_0^2$. Из теоремы Виета $a + b = k$ и $ab = kx_0 - y_0$. Подставляя, получаем $\Pi = x_0k - (kx_0 - y_0) - x_0^2 = y_0 - x_0^2$. Как видим, Π не зависит от k , значит, повторяя все предыдущие рассуждения для прямой CD , мы получим то же значение для произведения параболических длин отрезков CN и DN .

М.Панов

M2635. В треугольнике ABC известны длины сторон: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ (см. рисунок). Из



вершины C проводят несколько отрезков, которые разрезают треугольник ABC на несколько треуголь-

ников. Найдите наименьшее число M , для которого при каждом таком разрезании сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники, не превосходит M .

Ответ:

$$M = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} \cdot \ln \frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

Пусть $d_1, \dots, d_n$ — диаметры данных окружностей. Будем решать задачу по следующему плану. Найдём максимум M_n суммы $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ при фиксированном количестве окружностей n . При этом мы условимся допускать и $d_i = 0$, так что случай меньшего количества окружностей является частным случаем случая большего n . В таком случае последовательность M_n возрастает, и искомое M , очевидно, будет равняться $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$.

Лемма 1. Пусть d — диаметр окружности, вписанной в треугольник ABC , а h — длина высоты, проведенной к стороне c . Тогда

$$1 - \frac{d}{h} = \frac{p-c}{p} = \operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2}.$$

Доказательство. Используя формулы площади $2S = hc$ и $S = pr$, имеем

$$1 - \frac{2r}{h} = 1 - \frac{2S/p}{2S/c} = \frac{p-c}{p}.$$

Далее, поскольку отрезок касательной от A до точки касания с вписанной окружностью равен $p-a$, имеем $\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} = \frac{r}{p-a}$.

Аналогично, $\operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{r}{p-b}$. Отсюда, с использованием формулы Герона, получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{r^2}{(p-a)(p-b)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{r^2(p-c)p}{(p-a)(p-b)(p-c)p} = \\ &= \frac{r^2(p-c)p}{S^2} = \frac{(p-c)p}{p^2} = \frac{p-c}{p}. \end{aligned}$$

Тем самым, лемма доказана.

Лемма 2. Выполнено равенство

$$\left(1 - \frac{d_1}{h}\right) \left(1 - \frac{d_2}{h}\right) \dots \left(1 - \frac{d_n}{h}\right) = 1 - \frac{d}{h}.$$

Доказательство. Запишем равенства из леммы 1 для всех треугольников разбиения и перемножим их, так что в левой части будет произведение

$$\left(1 - \frac{d_1}{h}\right) \left(1 - \frac{d_2}{h}\right) \dots \left(1 - \frac{d_n}{h}\right).$$

Поскольку для двух смежных углов произведение тангенсов их половинных углов равно 1, произведение тангенсов в правой

части сократится до $\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2}$, что, согласно лемме 1, равно $1 - \frac{d}{h}$.

Лемма доказана.

Далее из леммы 2, пользуясь неравенством Коши о средних, получаем

$$\frac{1}{n} \left(\left(1 - \frac{d_1}{h}\right) + \left(1 - \frac{d_2}{h}\right) + \dots + \left(1 - \frac{d_n}{h}\right) \right) \geq \sqrt[n]{1 - \frac{d}{h}},$$

откуда $d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq nh(1 - \sqrt[n]{\lambda})$, где

$\lambda = 1 - \frac{d}{h} = \frac{p-c}{p}$. При этом равенство до-

стигается тогда и только тогда, когда $d_1 = d_2 = \dots = d_n = h(1 - \sqrt[n]{\lambda})$. (Несложно

понять, что этот случай действительно реализуется: последовательно строим первую, вторую и т.д. окружности радиуса $h(1 - \sqrt[n]{\lambda})$, и тогда, в согласии с леммой 2, мы действительно будем иметь n окружностей равного радиуса.)

Итак, $M_n = nh(1 - \sqrt[n]{\lambda})$. Остается найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n.$$

$$\text{Имеем } M_n = nh(1 - \sqrt[n]{\lambda}) = -h \cdot \frac{\lambda^{1/n} - \lambda^0}{1/n}.$$

Последняя дробь имеет вид $\frac{f(x) - f(0)}{x}$,

где $x = 1/n$ и $f(x) = \lambda^x$. Тогда предел при $x \rightarrow 0$ равен $f'(0)$. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = -h \cdot \ln \lambda = h \cdot \ln \frac{p}{p-c}$, и окончательно получаем ответ в задаче: $M = \frac{h}{2} \cdot \ln \frac{p}{p-c}$, что легко приводится к выражению через стороны.

О.Титов

M2636*. *Натуральное число p назовем абсолютно простым, если для любого натурального k такого, что $2 \leq k \leq \sqrt{p}$, выполнено неравенство $\left\{ \frac{p}{k} \right\} \geq 0,01$ (фигурные скобки обозначают дробную часть числа). Конечно ли множество абсолютно простых чисел?*

Ответ: да, конечно.

Сперва заметим, что любое абсолютно простое число p – простое, иначе p раскладывается как $p = kl$, $k \leq l$, и в этом случае $k \leq \sqrt{p}$ и $\left\{ \frac{p}{k} \right\} = 0$ в противоречие с условием задачи.

Рассмотрим какое-нибудь абсолютно простое число $p > 10$. Заключим p между соседними точными квадратами:

$$n^2 < p < (n+1)^2.$$

Ниже мы оценим n сверху некоторой константой, откуда и последует, что множество рассматриваемых p конечно.

Заметим, что $(n+1)^2 - p$ не является точным квадратом, иначе $(n+1)^2 - p = t^2$, где $t \leq n$ – натуральное. Тогда $p = (n+1-t) \times (n+1+t)$. Если $t < n$, то получаем, что p составное – противоречие. Если же $t = n$, то $n^2 = (n+1)^2 - p < (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, откуда $n^2 \leq 2n$, $n \leq 2$ и $p < (n+1)^2 = 9$ – противоречие.

Далее заключим $(n+1)^2 - p$ между соседними точными квадратами:

$$m^2 < (n+1)^2 - p < (m+1)^2.$$

Поскольку $(n+1)^2 - p < 2n+1$, имеем $m^2 \leq 2n$ (при $n \geq 3$ отсюда, в частности,

следует, что $n > m$). Ниже в качестве k будем брать $n-m$, т.е. рассматривать дробную часть $\left\{ \frac{p}{n-m} \right\}$. Имеем

$$0 < (m+1)^2 - ((n+1)^2 - p) < (m+1)^2 - m^2 = 2m+1.$$

Отсюда

$$p > (n+1)^2 - (m+1)^2 = (n-m)(n+m+2),$$

а поскольку $n-m < n+m+2$, имеем $n-m < \sqrt{p}$.

Также $0 < (m+1)^2 - ((n+1)^2 - p) \leq 2m$, $0 < p - (n-m)(n+m+2) \leq 2m$. Значит,

$$x = \left\{ \frac{p}{n-m} \right\} \leq \frac{2m}{n-m}.$$

Из того, что $m \leq \sqrt{2n}$, следует: $x \leq \frac{2m}{n-m} = \frac{2}{n/m-1} \leq \frac{2}{\sqrt{n/2}-1}$. Если $x \geq 0,01$, то

$\sqrt{n/2}-1 \leq 200$, $n \leq 2 \cdot 201^2$, и получена требуемая оценка на n сверху.

М.Дидин

M2637*. *Дана таблица с тремя строками и 100 столбцами. Изначально в левой клетке каждой строки стоит $400 \cdot 3^{100}$ фишек. За один ход Петя отмечает некоторые фишки в таблице (хотя бы одну), а затем Вася выбирает одну из трех строк. После этого все отмеченные фишки в выбранной строке сдвигаются на клетку вправо, а все отмеченные фишки в других строках удаляются из таблицы. Петя выигрывает, если одна из фишек выходит за правый край таблицы; Вася выигрывает, если все фишки удалены. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ: Петя.

Покажем, что Петя выиграет, даже если фишек в каждой клетке изначально втрое меньше.

Назовем блоком i -го типа набор из 3^{i-1} фишек, стоящих в i -й клетке справа в какой-то строке. Тогда изначально у нас есть $3 \cdot 400 = 1200$ блоков 100-го типа; во время игры Петя всегда будет считать, что

фишки разбиты на 1200 блоков. Тогда ему надо получить блок 0-го типа (на самом деле он получит три таких блока, которые и составляют требуемую фишку).

За ход Петя выбирает в каждой строке блок наименьшего типа. Один из этих трех блоков сдвинется вправо и превратится в три блока предыдущего типа, так что общее количество блоков останется тем же. Петя сможет так действовать, пока каждая строка не пуста; осталось показать, что этого не случится до выигрыша.

Действительно, заметим, что после каждого хода в любой клетке, кроме самых левых и той, в которую только что пришли фишки, стоит не более чем два блока. Значит, в каждой строке не более чем $400 + 99 \cdot 2 + 1 < 600$ блоков. Поскольку общее число блоков равно 1200, в каждой строке осталось хотя бы по одному блоку, что и требовалось.

*И. Богданов, П. Святокум,
А. Хузиева, Д. Шабанов*

Ф2641. *Прямой участок магистрального газопровода (МГ) высокого давления проходит с востока на запад мимо двух поселков: Анискино и Борискино. Поселки расположены севернее газопровода. Кратчайшие расстояния от этих поселков до газопровода составляют 14 км и 16 км соответственно. Расстояние между точками на МГ, которым соответствуют эти минимальные расстояния, равно 10,39 км. Для газификации поселков на магистральном газопроводе требуется построить одну распределительную станцию, которая будет подавать газ с уменьшенным давлением в поселки. Определите наименьшую суммарную длину газопровода низкого давления (ГНД), необходимую для поставки газа в поселки. Укажите также место на МГ, в котором следует построить эту распределительную станцию.*

Возможны разные варианты. Рассмотрим два из них.

1) Есть общий для двух поселков участок трубы, который сначала идет по кратчайшему пути к Анискино, а затем продолже-

ние идет по кратчайшему пути из Анискино в Борискино. В этом случае длина ГНД составит

$$14 \text{ км} + \sqrt{(16 - 14)^2 + (10,39)^2} \text{ км} = 24,58 \text{ км}.$$

2) Вспомним вариант, который «ищет сама природа» в том случае, когда мыльная пленка натягивается на проволочную конструкцию и самопроизвольно «выбирает» такое расположение, при котором площадь этой пленки будет минимальной. Вот этот вариант мы и обсудим в подробностях.

Представим себе три длинные параллельные друг другу проволочные конструкции, две из которых неподвижны, а третья может поступательно и без трения перемещаться в направлении, перпендикулярном себе самой (при этом каждая точка этой подвижной проволоки движется строго по прямой линии). Эта третья проволока, можно сказать, скользит без трения вдоль направляющих (вдоль магистрального газопровода). Естественно, конструкция остановится в таком положении, что три участка мыльной пленки будут образовывать друг с другом двугранные углы величиной 120° . При этом пленка, натянутая на подвижную проволоку, будет перпендикулярной к направляющим, вдоль которых может скользить эта подвижная проволочка (соответствующий общий участок ГНД будет перпендикулярен трубе магистрального газопровода).

Ну вот, теперь можно заняться вычислениями. Участки ГНД, идущие от места раздвоения каждый к своему поселку, составляют с МГ углы 30° . Если провести такие линии через Анискино и Борискино (считая их точками), то пересечение этих линий произойдет на расстоянии 12 км от газопровода высокого давления. Таким образом, общий для двух поселков участок ГНД имеет длину 12 км. При этом точка на МГ, в которой нужно установить распределительную станцию, делит отрезок между точками с минимальными расстояниями от Анискино (А) и Борискино (Б) в отношении 1:2 и расположена ближе к точке А. В таком случае участки ГНД от

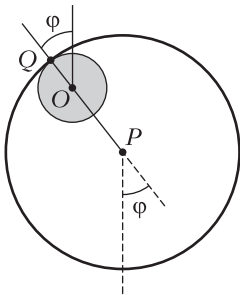
места раздвоения до точек А и Б будут иметь длины 4 км и 8 км соответственно, так что общая длина ГНД составит

$$12 \text{ км} + 4 \text{ км} + 8 \text{ км} = 24 \text{ км}.$$

Г.Азпром

Ф2642. Однородный тонкий круглый обруч радиусом R и массой m набросили на вбитый горизонтально гвоздь. Найдите период малых колебаний обруча около положения равновесия, если предполагается, что сечение гвоздя – круг радиусом r и обруч обкатывает гвоздь без проскальзывания. Ускорение силы тяжести равно g .

Пусть O – центр сечения гвоздя, P – центр обруча, Φ – угол, который образует луч OP с вертикалью, Φ' – угловая скорость луча OP , а $|OP| = L = R - r$ (см. рисунок). Прежде всего найдем кинетическую энергию обруча. Для этого заметим, что скорость точки P равна $v_P = L\Phi'$, а точка Q , в которой обруч соприкасается с гвоздем, – мгновенный центр вращения. При этом угловая скорость обруча Ω такова, что $v_P = \Omega R$, т.е. $\Omega = \frac{L}{R}\Phi'$. Момент



инерции обруча относительно его оси равен $I = mR^2$. Тогда кинетическая энергия обруча, состоящая из кинетической энергии движения его центра масс и кинетической энергии его вращения вокруг центра масс, будет

$$E_k = \frac{mv_P^2}{2} + \frac{I\Omega^2}{2} = \frac{1}{2} \left(mL^2 (\Phi')^2 + mR^2 \left(\frac{L}{R} \Phi' \right)^2 \right) = mL^2 (\Phi')^2.$$

Потенциальную энергию запишем так:

$$E_n = mgL(1 - \cos \Phi) \approx mgL \frac{\Phi^2}{2},$$

где приближенное выражение относится к малым отклонениям обруча от вертикали.

Для малых колебаний закон сохранения энергии представим в виде

$$E_k + E_n = mL^2 (\Phi')^2 + mgL \frac{\Phi^2}{2} = mL^2 \left((\Phi')^2 + \omega^2 \Phi^2 \right),$$

где $\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{L}$ – квадрат угловой скорости колебаний. Тогда период малых колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

Замечание. Удивительно, что период зависит лишь от разности радиусов обруча и сечения гвоздя.

А.Буров

Ф2643. Квадратная пластинка, сделанная из анизотропного материала, при нагревании до некоторой температуры расширяется в вертикальном направлении на 15,4%, а в горизонтальном направлении на 2,2%. На рисунке 1, а направление

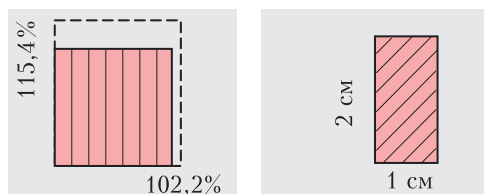


Рис. 1 а)

б)

наилучшего расширения материала показано вертикальными линиями. Из этой пластинки вырезают прямоугольную пластину таким образом, что направление наилучшего расширения составляет угол 45° с основанием пластины (рис.1,б), и нагревают ее до той же температуры. На сколько процентов увеличатся при нагреве длины боковых сторон прямоугольной пластины? На сколько процентов увеличится площадь пластины?

Указание. Анизотропными называют материалы, у которых физические свойства в разных направлениях разные.

Разрежем прямоугольник на четыре части (рис.2) и сложим из них квадрат, о котором говорится в условии задачи. Как де-

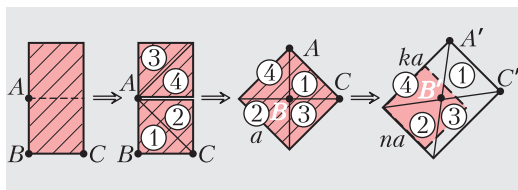


Рис. 2

формируется этот квадрат, нам известно: одна сторона увеличивается в $k = 1,154$ раза, другая – в $n = 1,022$ раза. Остается просто прочесть ответы с рисунка:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \sqrt{\frac{k^2 + n^2}{2}} = 1,09,$$

$$\frac{S'}{S} = k \cdot n = 1,179.$$

Таким образом, длины боковых сторон увеличатся на 9%, площадь фигуры увеличится на 17,9%

Отметим интересный факт: относительное увеличении площади пластины не равно произведению коэффициентов линейного расширения сторон. Это объясняется тем, что при тепловом расширении анизотропных тел фигуры не сохраняют свою форму. В частности, наш прямоугольник при нагревании превращается в параллелограмм. У этой задачи есть еще одно решение, в котором рассматриваемый прямоугольник разыскивается в исходном квадрате. Попробуйте найти это решение.

Е. Соколов

Ф2644. Пакет для доставки клиентам заказанных горячих продуктов питания сделан из бумаги с нанесенным на нее тонким слоем алюминия. От этого пакета отрезали ленточку шириной $h \approx 2,7$ мм и длиной $L \approx 2,7$ дм. С помощью мультиметра провели два измере-



ния. Слева на фотографии (см. рисунок) выводы щупов мультиметра закорочены. На фото в середине и справа между выводами щупов мультиметра закреплена ленточка. По показаниям приборов определите примерное число атомов алюминия на этой полоске. Удельное сопротивление алюминия $\lambda \approx 2,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, плотность $\rho = 2,7$ г/см³, молярная масса $M = 2,7 \cdot 10^{-2}$ кг/моль.

Судя по показаниям прибора, сопротивление полоски равно $R = 0,4 - 0,5$ Ом. Однако, точность этого измерения весьма невысока. Далее, $R = \lambda L / (hd)$. Пользуясь полученным диапазоном значений R и зная удельное сопротивление металла, можно найти примерную толщину d слоя алюминия: $d = (5,4 - 6,7) \cdot 10^{-6}$ м. В таком случае число атомов найдем с помощью формулы

$$N = N_A \frac{\rho h L d}{M},$$

где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро. Подставив числовые данные, получим

$$N = (2,36 - 2,93) \cdot 10^{20}.$$

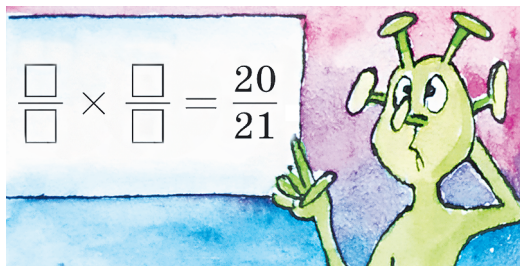
Итак, среднее значение числа атомов алюминия на полоске равно

$$\frac{2,36 + 2,93}{2} \cdot 10^{20} \approx 2,7 \cdot 10^{20}.$$

К. Урьер

Задачи

1. а) Впишите в клеточки на рисунке четыре различные цифры, чтобы произведение дробей равнялось $\frac{20}{21}$.

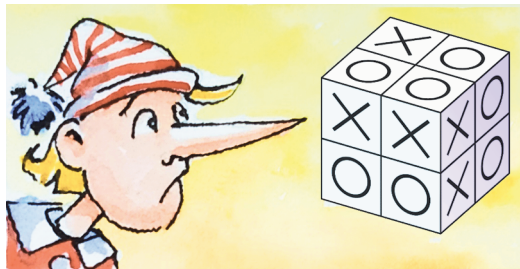


Решите эту задачу для трех других арифметических действий:

б) деления; в) вычитания; г) сложения.

А.Шаповалов

2. а) Мальвина разбила каждую грань куба $2 \times 2 \times 2$ на единичные квадраты и велела Буратино в некоторых квадратах написать крестики, а в остальных нолики так, чтобы каждый квадрат граничил по сторонам с двумя крестиками и двумя ноликами. На рисунке



показано, как Буратино выполнил задание (видно только три грани). Докажите, что Буратино ошибся.

б) Помогите Буратино выполнить задание правильно. Достаточно описать хотя бы одну верную расстановку.

М.Евдокимов

3. Братья Петя и Вася решили снять смешной ролик и выложить его в интернет. Сначала они сняли, как каж-

Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

дый из них идет из дома в школу — Вася шел 8 минут, а Петя шел 5 минут. Потом пришли домой и сели за компьютер монтировать видео: они запустили одновременно Васино видео с начала и Петино видео с конца (в обратном направлении); в момент, когда на обоих роликах братья оказались в одной и той же точке пути, они склеили Петино видео с Васиным.



Получился ролик, на котором Вася идет из дома в школу, а потом в какой-то момент вдруг превращается в Петю и идет домой задом наперед. А какой длительности получился этот ролик?

И.Яценко

4. Внутри клетчатого прямоугольника периметра 50 клеток по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметра 32 клетки (дырка не содержит граничных клеток). Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать фигуру по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик 1×1 — это тоже полоска!)

А.Шаповалов





Виктор Иванович Голубев
(13.01.1942 – 18.03.2021)

Ушел из жизни член редколлегии журнала «Квант» Виктор Иванович Голубев – харизматичный педагог и удивительно отзывчивый человек, который всегда был готов прийти на помощь. Виктор Иванович был настоящим энтузиастом просвещения, он внес большой вклад в школьное образование. Высокая квалификация математика сочеталась в нем с глубоким пониманием разных сфер жизни, прекрасным чувством юмора и умением сопереживать, поддерживать. Светлая память.

Ищем «экстремальный» экстремум

В. ГОЛУБЕВ

В 1992 ГОДУ НА ВСТУПИТЕЛЬНОМ экзамене на биологический факультет Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова была предложена такая задача.

Опубликовано в журнале «Квант» №6 за 2005 год.

Задача 1. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{c} \left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-t^2}} \right), \quad (1)$$

где a, b, c, t, u – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} at + bu \leq c, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a^2 + 2bcu \geq b^2 + c^2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} b^2 \frac{t^2 - u^2}{t^2 - 1} + c^2 \leq 2bcu. \end{cases} \quad (4)$$

Эта задача не имеет аналогов в практике вступительных экзаменов ни в прошлом, ни в настоящем. Впервые абитуриенту было

необходимо найти минимальное значение функции пяти (!) переменных в некоторой области допустимых значений этих переменных. Конечно, присутствие переменных a, b, c и выражений $\sqrt{1-u^2}, \sqrt{1-t^2}$ указывает на возможность геометрической интерпретации задачи. И официальное решение задачи полностью основано на такой интерпретации. (Найдите это решение самостоятельно.)

Ниже мы предлагаем познакомиться и с чисто алгебраическим решением.

Предварительный анализ

Во-первых, все выражения в (1)–(4) являются однородными относительно переменных a, b и c :

$$\frac{1}{c} \left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-t^2}} \right) - \text{степени ноль};$$

$at + bu, c$ – степени один;

$a^2 + 2bcu, b^2 + c^2$ – степени два;

$b^2 \frac{t^2 - u^2}{t^2 - 1} + c^2, 2bcu$ – степени два.

И поскольку все переменные по условию суть положительные величины, то, разделив обе части неравенства (2) на c , а обе части неравенств (3) и (4) на c^2 , мы можем исходную задачу 1 сформулировать в следующем равносильном виде.

Задача 2. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{n}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (5)$$

где $m \left(m = \frac{a}{c} \right), n \left(n = \frac{b}{c} \right), t, u$ – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} mt + nu - 1 \leq 0, & (6) \\ m^2 + 2nu - n^2 - 1 \geq 0, & (7) \\ n^2 \frac{t^2 - u^2}{t^2 - 1} - 2nu + 1 \leq 0. & (8) \end{cases}$$

Во-вторых, слагаемые в (1) (соответственно в (5)) не содержат *общих* переменных. Этот факт провоцирует искать наименьшее значение каждого слагаемого отдельно, тем

более что неравенство (8) не содержит переменную m .

В-третьих, неравенства (6)–(8) являются либо линейными, либо квадратными ((8) – после освобождения от знаменателя) относительно *любой* переменной. Это позволяет надеяться на относительно легкий поиск минимума величины (5).

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи 2, равносильной задаче 1.

Краткое решение

$$1) (7) \Leftrightarrow m^2 \geq n^2 - 2nu + 1 = (n-u)^2 + 1 - u^2.$$

Отсюда следует, что

$$m^2 \geq 1 - u^2.$$

Поэтому

$$\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}} \geq 3. \quad (9)$$

$$2) (8) \Leftrightarrow n^2 \frac{(t^2 - 1) + (1 - u^2)}{t^2 - 1} - 2nu + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 \left(1 - \frac{1 - u^2}{1 - t^2} \right) - 2nu + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - u^2) \left(\frac{n}{\sqrt{1 - t^2}} \right)^2 \geq n^2 - 2nu + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{\sqrt{1 - t^2}} \right)^2 \geq \frac{n^2 - 2nu + 1}{1 - u^2}.$$

Так как

$$\frac{n^2 - 2nu + 1}{1 - u^2} = \frac{(n-u)^2 + 1 - u^2}{1 - u^2} \geq \frac{1 - u^2}{1 - u^2} = 1,$$

то

$$\frac{n}{\sqrt{1 - t^2}} \geq 1. \quad (10)$$

3) Равенства в (9) и (10) возможны при условиях

$$\begin{cases} n - u = 0, \\ m = \sqrt{1 - u^2}, \\ n = \sqrt{1 - t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = u, \\ m = \sqrt{1 - u^2}, \\ t = \sqrt{1 - u^2}. \end{cases} \quad (11)$$

4) В силу 1) и 2), (11) $\Rightarrow$ (7) и (8). Осталось проверить (6) при заменах (11):

$$\sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - u^2} + u^2 - 1 \leq 0 - \text{истинно.}$$

5) Таким образом, при условиях (11) достигается наименьшее значение величины (5), равное четырем.

Ответ: 4.

Подробное решение

1. Определение наименьшего значения

$$\text{слагаемого } \frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}$$

Переменная m содержится только в условиях (6) и (7). И поскольку неравенство (7) не содержит переменную t и приводимо к сравнению m^2 с квадратным трехчленом относительно n с параметром u , то оно позволяет сразу получить оценку снизу нашего слагаемого. Имеем

$$(7) \Leftrightarrow m^2 \geq n^2 - 2nu + 1.$$

Квадратный трехчлен $n^2 - 2nu + 1$ принимает наименьшее значение при $n = u$, что легко обнаружить, если выделить полный квадрат разности n и u :

$$\begin{aligned} n^2 - 2nu + 1 &= (n^2 - 2nu + u^2) + 1 - u^2 = \\ &= (n - u)^2 + 1 - u^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(7) \Leftrightarrow m^2 \geq (n - u)^2 + 1 - u^2 \geq 1 - u^2,$$

т.е.

$$m^2 \geq 1 - u^2. \quad (12)$$

В силу условия задачи, $m > 0$ и $1 - u^2 > 0$, что позволяет извлечь квадратный корень из обеих частей неравенства (12):

$$m \geq \sqrt{1 - u^2}.$$

Откуда следует, что

$$\frac{m}{\sqrt{1 - u^2}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3m}{\sqrt{1 - u^2}} \geq 3. \quad (13)$$

Полученное неравенство (13) означает, что

- наименьшее значение первого слагаемого в (5) не меньше трех,
- равенство в (13) достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} n - u = 0, \\ m = \sqrt{1 - u^2}. \end{cases} \quad (14)$$

Позже мы покажем, что условия (14) можно обеспечить, и, следовательно, наименьшее значение первого слагаемого в (5) равно трем.

2. Определение наименьшего значения

$$\text{слагаемого } \frac{n}{\sqrt{1-t^2}}$$

Естественно для наших целей воспользоваться неравенством (8), так как оно единственное из неравенств (6)–(8) содержит в явном виде величину t^2 .

На первой стадии выделим в дробно-рациональном относительно t выражении $\frac{t^2 - u^2}{t^2 - 1}$ целую часть:

$$\frac{t^2 - u^2}{t^2 - 1} = \frac{(t^2 - 1) + 1 - u^2}{t^2 - 1} = 1 + \frac{1 - u^2}{t^2 - 1}.$$

После этого в неравенстве (8) легко выделяется величина $\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}$:

$$\begin{aligned} (8) \Leftrightarrow n^2 \left(1 + \frac{1 - u^2}{t^2 - 1} \right) - 2nu + 1 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 - u^2) \frac{n^2}{1 - t^2} &\geq n^2 - 2nu + 1. \end{aligned}$$

Так как $1 - u^2 > 0$, то разделим обе части полученного неравенства на $1 - u^2$:

$$\frac{n^2}{1 - t^2} \geq \frac{n^2 - 2nu + 1}{1 - u^2}.$$

В числителе правой части – уже знакомый нам квадратный трехчлен. Поэтому легко получаем следующую оценку левой части (квадрата второго слагаемого в (5)):

$$\frac{n^2}{1 - t^2} \geq \frac{(n - u)^2 + 1 - u^2}{1 - u^2} \geq \frac{1 - u^2}{1 - u^2} = 1,$$

т.е.

$$\frac{n^2}{1 - t^2} \geq 1.$$

Учитывая положительность величин n и $1 - t^2$, извлекаем квадратный корень из обеих частей:

$$\frac{n}{\sqrt{1 - t^2}} \geq 1. \quad (15)$$

Как и ранее, получаем, что

- наименьшее значение второго слагаемого в (5) *не меньше* единицы,
- равенство в (15) достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} n - u = 0, \\ n = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases} \quad (16)$$

3. Определение искомого наименьшего значения суммы (5)

Покажем, что можно *одновременно* обеспечить условия (14) и (16), при которых оба слагаемых в (5) принимают наименьшие значения (3 и 1 соответственно). Действительно,

$$\begin{cases} (14), \\ (16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - u = 0, \\ m = \sqrt{1 - u^2}, \\ n = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases} \quad (17)$$

Система (17) с четырьмя неизвестными позволяет три из них выразить через четвертую:

$$\begin{cases} n = u, \\ m = \sqrt{1 - u^2}, \\ t = \sqrt{1 - u^2}, \end{cases} \quad (18)$$

так как при $n > 0$ и $t > 0$

$$n = \sqrt{1 - t^2} \Leftrightarrow t = \sqrt{1 - n^2} \text{ и } n = u.$$

Из первых двух пунктов подробного решения следует, что в условиях (18) нестрогие неравенства (7) и (8) переходят в равенства и, тем самым, выполняются. Поэтому осталось убедиться в истинности неравенства (6) в тех же условиях (18):

$$\sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - u^2} + u^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0,$$

что, очевидно, истинно.

Отсюда следует, что искомое наименьшее значение суммы, в силу (13) и (15), равно четырем.

Теперь предлагаем читателям самостоятельно решить аналогичные задачи из других вариантов.

Упражнения

1. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{r} \left(\frac{4p}{u} + \frac{q}{\sqrt{1 - v^2}} \right),$$

где p, q, r, u, v — положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} pv + q\sqrt{1 - u^2} \leq r, \\ p^2 + 2qr\sqrt{1 - u^2} \geq q^2 + r^2, \\ 2qr\sqrt{1 - u^2} + q^2 \frac{1 - v^2 - u^2}{v^2 - 1} \geq r^2. \end{cases}$$

2. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{b} \left(\frac{2c}{\sqrt{1 - u^2}} + \frac{3a}{\sqrt{1 - t^2}} \right),$$

где a, b, c, t, u — положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} ct \leq b - au, \\ a^2 + b^2 - c^2 \leq 2abu, \\ b^2 - 2abu \leq a^2 \frac{u^2 - t^2}{t^2 - 1}. \end{cases}$$

3. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{p} \left(\frac{2q}{u} + \frac{r}{\sqrt{1 - v^2}} \right),$$

где p, q, r, u, v — положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} r\sqrt{1 - u^2} \leq p - qv, \\ r^2 + p^2 - q^2 \leq 2rp\sqrt{1 - u^2}, \\ p^2 + r^2 \frac{v^2 + u^2 - 1}{v^2 - 1} \leq 2pr\sqrt{1 - u^2}. \end{cases}$$

Как возникает хаос. Законы равновесного хаоса идеального газа

А.ВЛАСОВ

В СЕНТЯБРЕ 1859 ГОДА НА ЗАСЕДАНИИ Британской научной ассоциации Дж.Максвелл доложил о своих исследованиях в области молекулярной кинетической теории газов. В этом докладе впервые был приведен статистический закон распределения скоростей молекул. С этой работы в кинетической теории газов появляется *вероятность*, начинается становление статистической физики. Здесь уместно привести цитату из книги Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица «Статическая физика»:

«Предмет статистической физики... составляет изучение особого типа закономерностей, которым подчиняются поведение и свойства макроскопических тел, т.е. тел, состоящих из колоссального количества отдельных частиц – атомов и молекул ...На первый взгляд отсюда можно было бы заключить, что с увеличением числа частиц должны невообразимо возрастать сложность и запутанность свойств механической системы и что в поведении макроскопического тела мы не сможем найти и следов какой-либо закономерности. Однако это не так, и мы увидим в дальнейшем, что при весьма большом числе частиц появляются новые своеобразные закономерности. Эти – так называемые *статистические закономерности*... – ни в какой степени не могут быть сведены к чисто механическим закономерностям».

Сразу отметим, что мы ограничимся исследованием простейших классических идеальных систем. Попытаемся проследить, как с ростом числа частиц, составляющих систему, в ней возникает предельный статистический порядок. Естественно, здесь не будет красивой (но для школьника непонятной)

математики, однако и без формул, в которых воплощен порядок хаоса, нам не обойтись. Отвечать на поставленные вопросы будет компьютер (естественно, мы предоставим ему соответствующую программу). Начнем с уточнения модели идеального газа.

Модель идеального газа

Из школьного учебника известно, что идеальный газ – это система невзаимодействующих материальных точек. Но в такой модели нет главного – отсутствует возможность возникновения хаоса и, соответственно, нет возможности возникновения вероятностного порядка. Очевидно, что хаос в замкнутой (изолированной) системе невзаимодействующих частиц может возникать только в результате их столкновений. Столкновения возможны только между частицами, имеющими размер. Если считать молекулы газа упругими шариками, то возникает проблема «исключенного» объема. Газ твердых шариков – это уже не идеальный газ, и его равновесное состояние уже не подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева. Но можно исправить положение, предложив особый – виртуальный – механизм столкновений. В момент виртуального столкновения определяются (вычисляются) изменения скоростей, но эти изменения временно «откладываются». Шарик продолжает движение, и только в момент кратчайшего расстояния между их центрами «включается» отложенное изменение скоростей.

Распределение Максвелла и закон равномерного распределения

Здесь нам не обойтись без понятия *вероятности*. Сделаем небольшое отступление в область элементарной теории вероятности.

Физические процессы бывают детерминированными и случайными. Соответственно, параметры (физические величины), характеризующие эти процессы, являются детерминированными или случайными. Характер процессов и их параметров определяется в ходе повторных измерений. Для детерминированных величин повторные измерения дают неизменные результаты (в пределах погрешности измерения). Для случайных величин повторные измерения приводят к множеству (спектру) значений.

Вероятность – характеристика случайного процесса. Ее «математика» строится на идее

многократных измерений. Для дискретной случайной величины многократные измерения приводят к дискретному спектру возможных значений. При большом числе измерений результаты (значения физической величины) начинают повторяться. Накапливаются числа повторений n_i . Но при этом стабилизируются величины отношений чисел повторений к общему числу измерений N . Пределы этих отношений и определяют *дискретную функцию вероятности* физической величины случайного процесса:

$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N}$. Для непрерывной случайной величины математика вероятности оказывается сложнее. В этом случае многократные измерения приводят к непрерывному интервалу значений. При этом повторений измеренных значений уже не будет. Но, очевидно, что такой вариант можно свести к дискретному варианту. Для этого весь интервал значений можно разбить на M ячеек (рис.1). Теперь каждая ячейка содержит некоторое

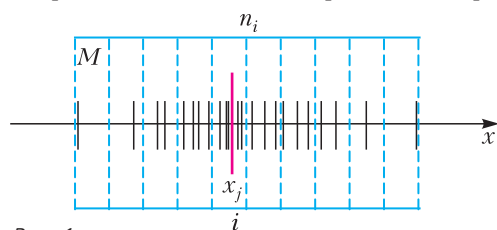


Рис. 1

число Δn_i измерений, и при увеличении общего числа измерений N должны стабилизироваться величины их отношений:

$\Delta P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta n_i}{N}$. Эта формула определяет вероятность (при однократном измерении)

получить значение величины в интервале Δx_i . Она зависит как от величины интервала (от числа ячеек M), так и от положения интервала на оси x . Очевидно, что независимой величиной теперь должен быть предел

$\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_i}{\Delta x_i}$, который, определяет *функцию плотности вероятности* данной случайной непрерывной физической величины. Если эта функция определена, то вероятность в непрерывном случае можно определять в виде интеграла

$$\Delta P(x_1, x_2) = P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \cdot dx.$$

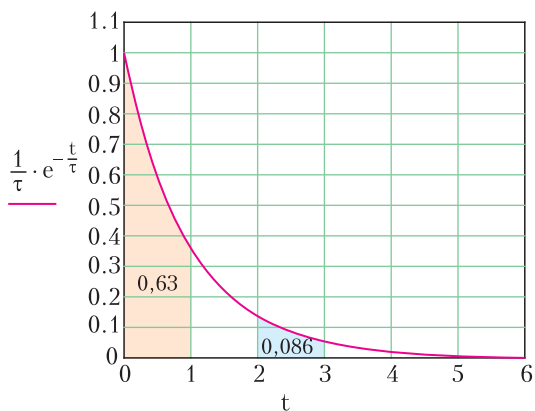


Рис. 2

В качестве примера на рисунке 2 представлен график функции плотности вероятности

распада атомного ядра $\rho(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$. Здесь

случайной величиной является время распада t . Параметр τ равен среднему времени жизни ядра. В нашем примере τ равно 1 (условно 1 секунде). Интеграл от этой функции определяет вероятность распада в некоторый интервал времени:

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt.$$

Расчеты показывают, что вероятность распада за первую секунду равна 0,632 (площадь под графиком от 0 до 1). Вероятность распада за третью секунду уже существенно меньше и равна 0,086. Очевидно, что полная площадь под графиком равна 1 (что соответствует вероятности распада за неограниченный промежуток времени).

Итак, будем считать, что вы усвоили понятие функции плотности вероятности — функции, которая определяет математический порядок в «хаосе» непрерывной случайной величины. Теперь можно вернуться в хаотический мир скоростей молекул идеального газа. В статистической физике доказывается (и это впервые показал Максвелл), что в идеальном газе, состоящем из большого числа частиц, бесконечный и непрерывный спектр скоростей молекул подчиняется функции плотности вероятности, которая для систем разной размерности записывается так:

$$\rho_1(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

$$\rho_2(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right) \cdot 2\pi v \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

$$\rho_3(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Здесь m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T – температура газа по шкале Кельвина. Структура этих формул – произведение трех множителей. Первый – нормировочная константа. Второй – функция плотности числа состояний. Третий множитель (экспонента) – основной, он является произведением функций плотности вероятности проекций скорости. Для трехмерного случая

$$e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \cdot e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \cdot e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

Для одномерного случая функция плотности числа состояний – это просто двойка. Она учитывает равенство (симметрию) вероятностей для положительной и отрицательной проекций скорости. Для двумерного газа плотность числа состояний с одним и тем же модулем скорости определяется длиной окружности на двумерной плоскости скоростей, а для трехмерного газа – площадью поверхности сферы в трехмерном пространстве скоростей.

Графики функций Максвелла для моделей газа различной размерности показаны на рисунке 3. Для приближения к реальности (величины скоростей молекул даны в м/с) графики построены для газа с молярной массой $M = 29$ г/моль, соответствующей средней молярной массе воздуха, при температуре 300 К. Интересно, что для одномерной модели наиболее вероятна область малых скоростей. Для двумерного газа эта вероятность резко снижается, но все же остается

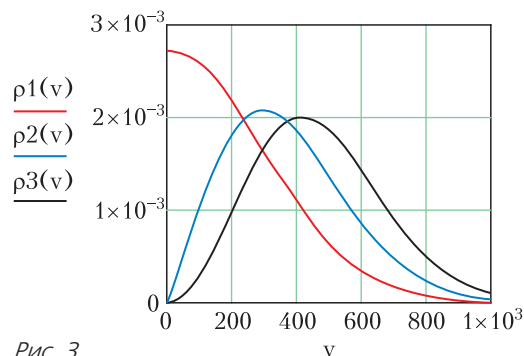


Рис. 3

значимой. Для трехмерной модели область нулевых (близких к нулю) скоростей является запрещенной.

Теперь – немного о законе равномерного распределения энергии по степеням свободы. В статистической физике очень красиво доказывается, что если энергия термодинамической системы представима «квадратичной формой»: $E = \alpha_{i,j} \cdot \dot{x}_i \dot{x}_j + \beta_{j,j} \cdot x_i x_j$, то каждая энергетическая степень свободы будет иметь среднюю энергию, равную $kT/2$. Для идеального газа это можно доказать на языке школьной математики, но можно и просто поверить в эту замечательную симметрию распределения. Если мы принимаем этот результат, то легко понять, что для смеси идеальных газов средние энергии молекул разной массы должны быть равны.

Как возникает хаос? Одномерная модель газа

Теперь рассмотрим механизм возникновения хаоса и «Максвелловского порядка» на примере простейшей одномерной модели идеального газа. В этой модели молекулы заключены в одномерный ящик, они движутся только вдоль одной прямой, сталкиваются между собой и со стенками отрезка. Очевидно, что если газ будет однородным, то в такой системе хаос и Максвелловское распределение возникнуть не могут. Первоначально «приготовленное» распределение скоростей молекул не будет меняться во времени. Абсолютно упругие столкновения одинаковых по массе молекул (шариков) не приводят к изменению спектра скоростей, при столкновении молекулы просто обмениваются скоростями. «Спаси» положение может следующая идея – рассмотреть идеальный газ, состоящий из молекул различной массы. Тогда симметрия системы снижается и спектр скоростей должен расширяться. При этом следует отметить принципиальную дискретность спектра скоростей данной одномерной системы, которая должна сохраняться при любом количестве частиц.

Рассмотрим, как изменяется спектр скоростей с увеличением числа частиц. Начнем с одной пары частиц, для которой отношение масс равно 2. Поставленную задачу будет решать компьютер методом молекулярной динамики. Этот метод моделирует движение частиц дискретно. На каждом микрошаге

координаты частиц рассчитываются по формулам $x_i = x_i + v_i \cdot dt$, где dt – очень малый промежуток времени. При перекрытии сфер шариков возникает фаза удара. Рассчитываются новые скорости встретившихся молекул, и движение продолжается. На протяжении всего компьютерного эксперимента собирается необходимая информация о физическом состоянии системы. В нашем случае это статистика скорости и энергии молекул.

На рисунке 4 показан вероятностный спектр скоростей молекул газа. Компьютер эту кар-

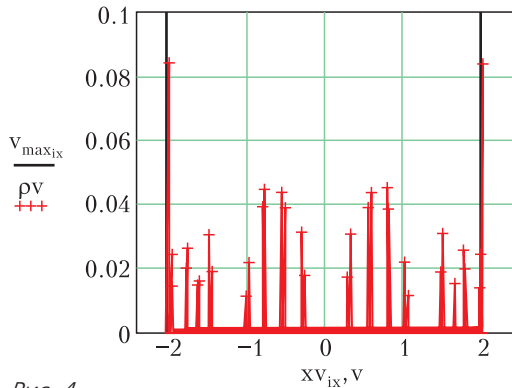


Рис. 4

тинку получает следующим образом. Весь возможный интервал скоростей молекул делится на малые ячейки. После каждого шага движения в соответствующие ячейки (в те ячейки, в которые попадает скорость молекулы) добавляется по 1. По завершении достаточно продолжительного эксперимента содержимое ячеек делится на число шагов (число испытаний). Понятно, что таким делением мы определяем вероятность скорости молекул в данном интервале. Полученный график доказывает дискретность спектра скоростей молекул. Всего состояний 36. Можно отметить наличие достаточно четкой симметрии в спектре. И, что самое важное, этот спектр зависит от начальных условий. Тому подтверждение повторный график системы с другими начальными условиями (рис. 5). Интересно, что число состояний остается прежним, но картинка спектра существенно меняется. И наблюдается совсем неожиданное (для такой малой системы, всего 2 частицы) равенство средних энергий легкой и тяжелой частиц. В двух реализациях отношение средних энергий достаточно близко к единице (0,988 и 1,139).

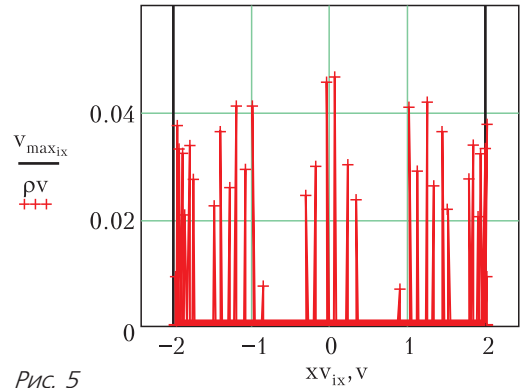


Рис. 5

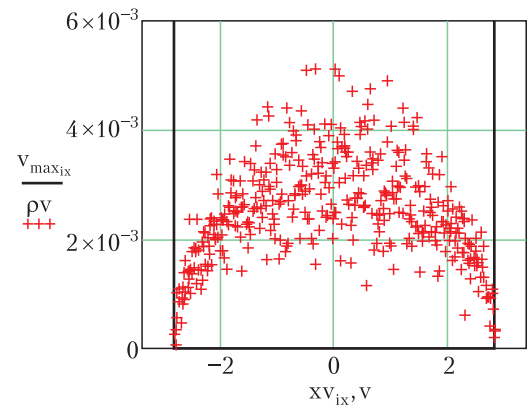


Рис. 6

При увеличении числа частиц до 4 (две пары частиц легкая – тяжелая) функция вероятности резко меняется (рис. 6). Она становится практически непрерывной. Число состояний превышает 400 (число ячеек скорости). На графике видно, что уже все ячейки скорости заполнены, а точность вычислений уже не позволяет выявить дискретность. Смена начальных состояний практически уже не меняет спектр и поэтому при дальнейшем увеличении числа частиц можно перейти к функциям плотности вероятности. Для этого интервальную вероятность следует поделить на величину интервала. На графике на рисунке 7 представлена функция плотности вероятности проекции скорости для 3 пар частиц. Точки (крестики) – компьютерный эксперимент, синяя непрерывная линия соответствует теоретической функции Максвелла для случая одномерного идеального газа

$$\rho(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

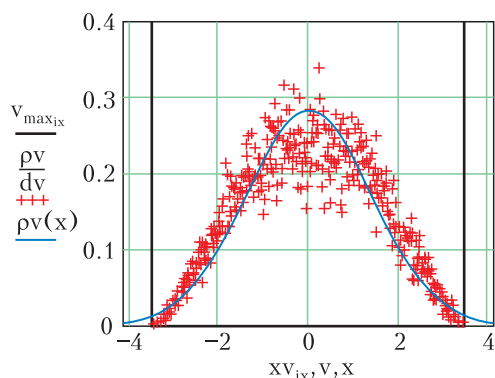


Рис. 7

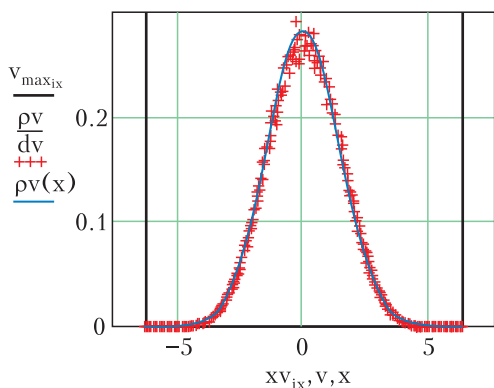


Рис. 8

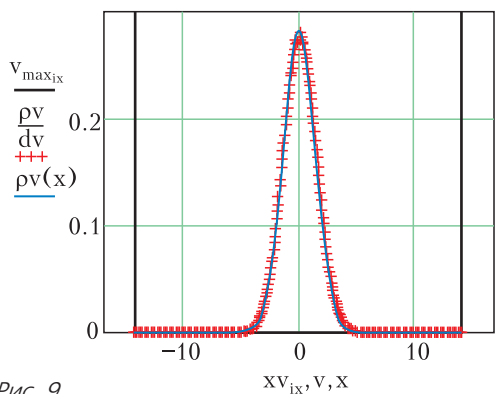


Рис. 9

На графике видно, что уже для 3 пар (6 частиц) проявляется достаточно четкая корреляция с функцией Максвелла. Следующий график (рис 8) соответствует системе из 10 пар (20 частиц). Здесь теоретическая кривая практически совпадает с экспериментальной, различия видны (небольшие флуктуации) только в области нулевых скоростей. И наконец, график на рисунке 9 для 50 пар (100 частиц) иллюстрирует, что эксперимент и теория идеально совпадают.

Двумерная модель идеального газа

Здесь все значительно интереснее. Модели газа второй и третьей размерности должны иметь непрерывный спектр скоростей (при малом числе частиц дискретного спектра уже не будет). Это определяется непрерывностью углового параметра, определяющего изменение скоростей при столкновениях. Теперь посмотрим, как меняется спектр скоростей при увеличении числа частиц. На рисунке 10 представлен график для 2 частиц. Очень неожиданный и красивый результат — линейная функция плотности вероятности (для системы двух частиц наиболее вероятным является наличие максимальной скорости). Это очень далеко от функции Максвелла. Но стоит добавить одну частицу, и система начинает «исправляться» (рис. 11). С дальнейшим ростом числа частиц система очень быстро по спектру скоростей «сходится» к функции Максвелла (рис. 12 для 16 частиц).

Здесь уместно привести (для любителей программирования) дополнительную инфор-

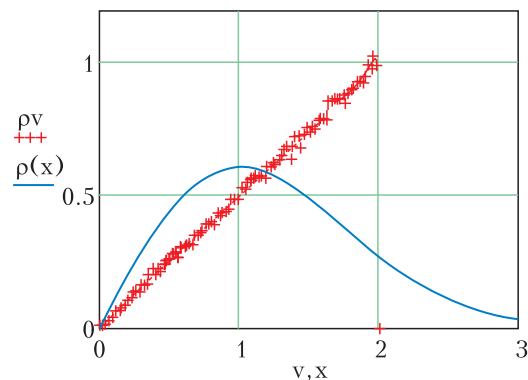


Рис. 10

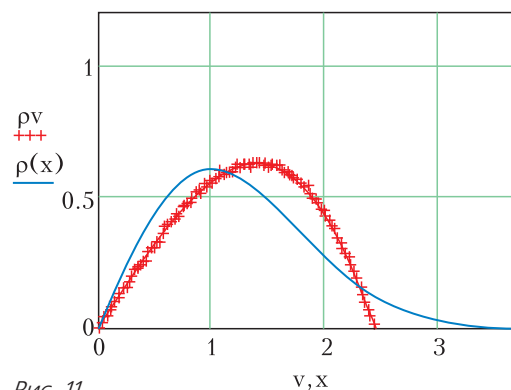


Рис. 11

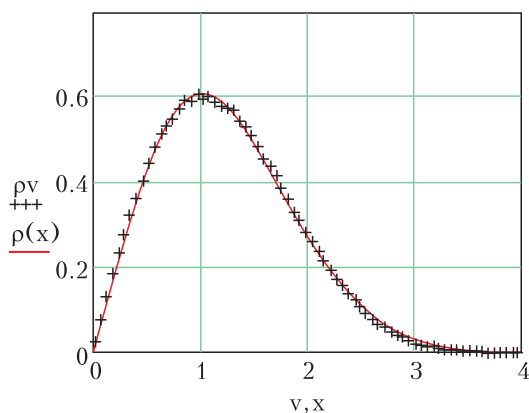


Рис. 12

мацию по компьютерной модели двумерного газа. При изменении числа частиц двумерная плотность частиц оставалась постоянной. Диаметр частицы принимался равным $d = L/4$, где L – линейный размер квадратной ячейки, приходящийся на одну частицу. Временной шаг равен $dt = L/v_0/1000$, где

$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ – начальная скорость частиц, $m = 1$, $kT = 1$. Усреднение проводилось по результату 10^8 шагов.

Система: шарик + пружинный маятник

При моделировании одномерного двухкомпонентного идеального газа не было сомнений, что закон равномерного распределения энергии по степеням свободы не будет нарушен. Результаты эксперимента показали равенство средних энергий молекул с различной массой. Но интересно было проверить эту симметрию на какой-либо простейшей механической модели, далекой от газовой. Для проверки была придумана одномерная система, состоящая из двух элементов с различным числом энергетических степеней свободы (рис. 13). Система состоит из свободной частицы – шарика и пружинного маятника. Шарик обладает одной энергетической степенью свободы – кинетической энергией, пружинный маятник наряду с кинетической обладает еще и энергией дефор-

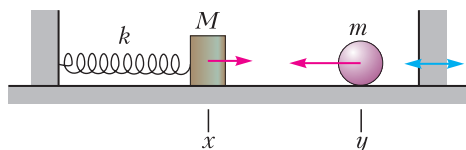


Рис. 13

мации пружины. Энергия системы записывается в квадратичном виде

$$E = m \frac{\dot{y}^2}{2} + M \frac{\dot{x}^2}{2} + k \frac{x^2}{2},$$

где x – смещение груза маятника от положения равновесия, y – координата свободного шарика. При столкновении шарик и маятник обмениваются энергией. Если эти столкновения случайны, то отношение средних энергий маятника и шарика должно стремиться к 2. Метод молекулярной динамики показывает результат, достаточно близкий к этому значению. Результат становится уже очень хорошим, если дополнительно в систему ввести случайность в явном виде. Мы это сделали следующим образом: в момент столкновения правая стенка случайным образом смещается в небольшом интервале. Параметры машинного эксперимента (расчеты проводились в системе Mathcad 15) были такими: временной шаг выбран по периоду колебаний маятника T ($T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$), $dt = \frac{T}{N}$,

$N = 1000$, время реализации $t = 20000 \cdot T$; в начальный момент маятник покоится, шарик движется. Результаты эксперимента: при $\frac{M}{m} = 1,1$ отношение энергий $\alpha = 2,051$; при $\frac{M}{m} = 2 \rightarrow \alpha = 1,963$; при $\frac{M}{m} = 3 \rightarrow \alpha = 2,051$; при $\frac{M}{m} = 0,5 \rightarrow \alpha = 1,986$. Прекрасная иллюстрация справедливости закона равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Подводим итоги

Итак, немного молекулярной динамики (незаменимой помощи компьютера), и мы теперь понимаем, что статистические свойства присущи даже малым системам. Но в предельно малых системах эти статистические свойства существенно зависят от параметров системы и начальных условий. С ростом числа степеней свободы системы (с ростом числа частиц газа) статистика хаоса неизбежно релаксирует к предельным функциям распределения Максвелла. Неожиданным является то, что предельные функции появляются уже при достаточно малом числе частиц – несколько десятков.

Олимпиада «Ломоносов»

Физика

В 2020/21 УЧЕБНОМ ГОДУ ОЛИМПИАДА «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

Отборочный этап

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. Задания отборочного этапа составлялись раздельно для учащихся младших (7–9) и старших (10–11) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте <https://olymp.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников с 29 октября по 5 ноября 2020 года. Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

Поскольку числовые данные в условиях задач для каждого участника были индивидуальными, приводимые в журнале решения задач и ответы к ним даны в общем виде.

7–9 классы

1. Брусек массой $m = 1$ кг, лежащий на плоской горизонтальной поверхности стола, начинают тянуть за привязанную к нему невесомую нить с силой F , направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис.1). На какое расстояние L переместился брусек за время $t = 1$ с? Коэффициент трения бруска о стол равен $\mu = 0,1$. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

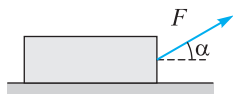


Рис. 1

2. Снежная горка, профиль которой изображен на рисунке 2, состоит из трех плоских поверхностей, плавно переходящих одна в другую. Высота горки $h = 15$ м, длина основания $l = 30$ м. Санки с грузом общей массой $m = 50$ кг медленно затаскивают на горку, прикладывая к ним силу, на каждом участке траектории санок направленную по касательной к их

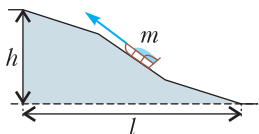


Рис. 2

траектории. Работа этой силы, совершенная при затаскивании санок вверх, оказалась равной A . Определите коэффициент трения μ между санками и поверхностями горки. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

3. Стоявшую на столе в комнате длительное время открытую банку объемом $V = 1$ л герметично закрыли и поместили в морозильную камеру. Температура воздуха в комнате $t_k = 20^\circ\text{C}$, а его относительная влажность $\varphi(\%)$. Определите массу льда, который образуется в банке через достаточно большой промежуток времени после помещения банки в морозильную камеру, в которой поддерживается температура $t_x = -10^\circ\text{C}$. Плотность насыщенных паров воды при температуре t_k равна $\rho_k = 17,32$ г/м³, а при температуре t_x равна $\rho_x = 2,14$ г/м³.

4. На рисунке 3 изображен участок цепи постоянного тока, содержащий три резистора, сопротивления которых неизвестны.

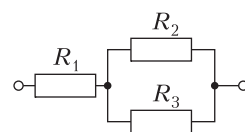


Рис. 3

При этом через резистор R_1 протекает ток $I_1 = 1,6$ А, а напряжение на резисторе R_2 составляет U_2 . Найдите величину сопротивления R_3 , если известно, что она в $n = 3$ раза превышает величину сопротивления R_2 .

5. По свисающей с потолка комнаты нити вертикально вниз спускается паук со скоростью, модуль которой равен V . Между нитью и стеной комнаты помещают тонкую линзу с фокусным расстоянием $F = 20$ см так, что ее главная оптическая ось оказывается перпендикулярной этой стене и пересекает нить. При этом на стене появляется четкое изображение нити и паука. Определите модуль скорости v , с которой паук движется относительно своего изображения. Расстояние от нити до плоскости линзы $a = 30$ см.

10–11 классы

1. Три груза массой m каждый шарнирно соединены невесомыми стержнями длиной $l = 0,2$ м (рис.4) с закрепленным на вертикальном стержне грузом 4. Груз 3 может скользить по центральному гладкому стержню без трения. Система была приведена во вращение вокруг вертикали, совпадающей с осью центрального стержня. Какую работу

А при этом совершили, если при вращении стержни отклонились на угол $\alpha = 45^\circ$? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$, размерами грузов можно пренебречь.

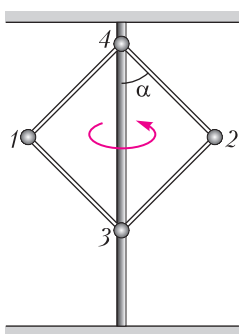


Рис. 4

2. Колебательная система состоит из груза массой m , лежащего на гладкой горизонтальной плоскости, невесомого гладкого блока, двух невесомых, нерастяжимых нитей и трех невесомых пружин жесткостью $k_1 = 2/3 \text{ Н/см}$, $k_2 = 1/2 \text{ Н/см}$ и $k_3 = 1 \text{ Н/см}$ соответственно, соединенных так, как показано на рисунке 5. Центр масс груза лежит на одной горизонтали с прикрепленной к нему нитью и осью пружины жесткостью k_1 . В положении равновесия все пружины растянуты. Считая, что нити все время остаются натянутыми,

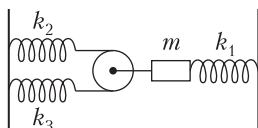


Рис. 5

определите круговую частоту ω малых гармонических колебаний груза.

3. В полностью заполненном баллоне объемом $V_0 = 5 \text{ л}$ помещается $m_0 = 2,5 \text{ кг}$ сжиженного пропана (C_3H_8). Если часть пропана из баллона выпустить наружу, то в нем будут находиться в равновесии жидкий пропан и его насыщенный пар. Найдите массу m_1 пропана, находящегося в баллоне в газообразном состоянии, когда из этого баллона выпущено $\alpha(\%)$ первоначально находившегося пропана, если температуру пропана поддерживают постоянной и равной $t = 17^\circ\text{C}$. Давление насыщенных паров пропана при этой температуре $p = 0,8 \text{ МПа}$. Молярная масса пропана $M = 44 \text{ г/моль}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

4. Две разноименно заряженные частицы находятся на оси x декартовой системы координат на расстоянии $l = 3 \text{ см}$ друг от друга (рис.6). Удерживая одну частицу неподвижной, вторую частицу переместили в направлении оси y на расстояние $l_1 = 4 \text{ см}$. При этом была совершена работа A_1 .

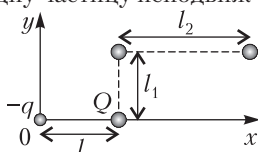


Рис. 6

Какую работу A_2 понадобится совершить, чтобы после этого передвинуть вторую частицу на расстояние $l_2 = 2 \text{ см}$ в направлении оси x ?

5. На горизонтальном дне аквариума лежит плоское зеркало. Человек, наклонившийся над водой и смотрящий вертикально вниз, видит изображение своего глаза в зеркале на расстоянии $l = 50 \text{ см}$. Определите толщину слоя H воды в аквариуме, если глаз расположен на расстоянии $h = 10 \text{ см}$ от ее поверхности. Показатель преломления воды считайте равным $n = 4/3$. Учтите, что для малых значений аргумента φ , заданного в радианах, можно считать $\text{tg } \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$.

Заключительный этап

Заключительный этап олимпиады проводился 25–27 февраля 2021 года в дистанционном формате на портале <https://exam.distant.msu.ru/>. Для участия в этом этапе к рабочему месту испытуемого предъявлялись определенные технические требования (с ними можно ознакомиться на сайте олимпиады). Задание для учащихся 7–9 классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2021 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех различных разделов, включающих задачи и уточняющие вопросы по теории. На выполнение заданий для всех классов отводилось 4 астрономических часа (240 минут).

7–9 классы

1. При выполнении лабораторной работы по физике ученик получил в свое распоряжение три пружины, жесткости двух из которых оказались равными $k_1 = 10 \text{ Н/м}$ и $k_2 = 20 \text{ Н/м}$ соответственно, а жесткость третьей была неизвестна. По указанию учителя ученик соединил все три пружины последовательно и растянул получившуюся составную пружину, подействовав на каждый из ее свободных концов силой $F = 1 \text{ Н}$ (рис.7). Измерив полное удлинение Δl со-

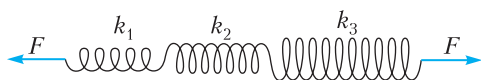


Рис. 7

ставной пружины, школьник смог рассчитать жесткость k_3 третьей пружины. Какое значение для k_3 он получил, если $\Delta l = 17$ см?

2. В ванне нужно приготовить $m = 350$ кг воды, температура которой $t = 36$ °С. Сколько для этого нужно взять воды из горячего и холодного кранов, если температура воды в горячем кране $t_1 = 76$ °С, а в холодном $t_2 = 6$ °С? Теплообменом воды с окружающими телами можно пренебречь.

3. Электродвигатель, обмотки которого имеют сопротивление $R = 20$ Ом, включен в сеть постоянного тока с напряжением $U = 100$ В. На горизонтальном валу двигателя закреплена легкая нить, на другом конце которой подвешен груз массой $m = 5$ кг. С какой максимальной скоростью $v_{\max}$ двигатель может поднимать этот груз? Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с². Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

4. Изображение диапозитива на экране, полученное с помощью проекционного аппарата, оказалось не очень резким. В частности, изображение точки на экране имело вид круга. Не изменяя положения объектива, вплотную к нему прижали собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см. При этом размер изображения точки не изменился. Найдите оптическую силу D_x линзы, которую надо было прижать к объективу, чтобы изображение стало резким. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой.

10–11 классы

1. Задача. Клин массой $M = 1$ кг с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании покоится на гладкой горизонтальной поверхности. На клин положили брусок массой $m = 0,1$ кг и ударом сообщили ему некоторую скорость, направленную вверх по клину (рис.8). Найдите, какое количество теплоты Q выделилось в результате трения бруска о клин, если извест-

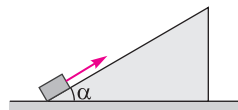


Рис. 8

но, что максимальная высота, на которую поднялся брусок от своего начального положения, $h = 20$ см.

Коэффициент трения бруска о наклонную поверхность клина $\mu = 0,6$. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Вопросы. Чему равны сила трения покоя и сила трения скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

2. Задача. Катушку массой $M = 720$ г и радиусом внутреннего цилиндра R , имеющую внешний радиус $2R$, положили на горизонтальный пол и прислонили к вертикальной стене, как показано на рисунке 9. На внутренний цилиндр катушки намотали легкую нить. Определите, при каком минимальном значении модуля F силы, приложенной к нити и направленной горизонтально влево, катушка начнет вращаться.

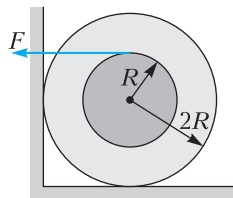


Рис. 9

Коэффициенты трения скольжения катушки о пол и стену одинаковы и равны $\mu = 0,2$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Вопросы. Чему равны сила трения покоя и сила трения скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

3. Задача. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с площадью сечения $S = 20$ см² под поршнем массой $M = 4$ кг содержится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 1$ м. Газу сообщили количество теплоты $\Delta Q = 126$ Дж. Во сколько раз α изменится среднеквадратичная скорость молекул газа? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Трение поршня о стенки сосуда считайте пренебрежимо малым.

Вопросы. Что такое внутренняя энергия термодинамической системы? Какими способами можно изменить внутреннюю энергию?

4. Задача. При расширении некоторого количества аргона его давление уменьшается так, как показано на рисунке 10. Определите максимальное значение $U_{\max}$ внутренней энергии газа в процессе 1–2, если $V_0 = 0,1$ м³ и $p_0 = 5 \cdot 10^4$ Па.

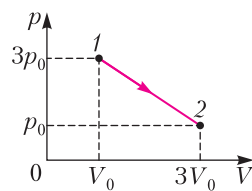


Рис. 10

Вопросы. Сформулируйте первый закон термодинамики. Поясните смысл входящих в него величин.

5. Задача. Над закрепленным проволочным кольцом радиуса R , расположенным горизонтально, на пружине подвешена маленькая заряженная бусинка (рис.11). Заряд бусинки $q = 1$ мкКл равен по модулю и противоположен по знаку заряду кольца. Бусинка располагается точно над центром кольца на высоте $h = R = 20$ см.

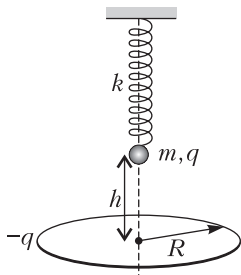


Рис. 11

Определите максимальную скорость $v_{\max}$ бусинки в процессе ее малых свободных колебаний, которые возникают после мгновенной нейтрализации заряда кольца. Масса бусинки $m = 9$ г, жесткость пружины $k = 10$ Н/м. Электрическую постоянную примите равной $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Указание. Используйте равенство $h = R$.

Вопросы. Какие колебания называют гармоническими? Что такое амплитуда и фаза гармонических колебаний?

6. Задача. В цепи, показанной на рисунке 12, конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-5}$ Ф вначале заряжен до некоторого напряжения U_1 , а конденсатор емкостью $C_2 = 10^{-6}$ Ф разряжен. Известно, что в процессе колебаний, возникающих в цепи после замыкания

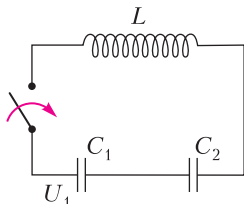


Рис. 12

ключа, амплитуда напряжения на конденсаторе C_2 оказалась равной $U_{2\max} = 364$ В. До какого напряжения U_1 был заряжен конденсатор C_1 первоначально? Потери в соединительных проводах и в катушке индуктивности пренебречь.

Вопросы. В чем состоит явление самоиндукции? Дайте определение индуктивности контура.

7. Задача. На равнобедренную стеклянную призму падает широкий параллельный пучок света, перпендикулярный грани AB , ширина которой $d = 5$ см (рис.13). На каком расстоянии L от грани AB преломленный призмой свет разделится на два не перекрывающихся пучка? Показатель пре-

ломления стекла $n = 1,5$, угол при основании призмы $\alpha = 0,1$ рад. При расчетах учтите, что для малых углов $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

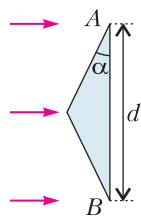


Рис. 13

Вопросы. Сформулируйте закон отражения света. Приведите пример построения изображения предмета в плоском зеркале.

8. Задача. С помощью тонкой собирающей линзы получили увеличенное в $k = 5$ раз действительное изображение предмета, расположенного вблизи главной оптической оси линзы. Если расстояние между линзой и предметом увеличить на $L = 1$ см, то изображение предмета станет меньше в $n = 2$ раза. Определите фокусное расстояние линзы F .

Вопросы. Запишите формулу тонкой линзы. Чему равно увеличение, даваемое линзой?

Публикацию подготовил С.Чесноков

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин www.bgshop.ru	■ Книги
■ Кафе	■ Аудиокниги
■ Клубные (дисконтные) карты и акции	■ Антиквариат и предметы коллекционирования
■ Подарочные карты	■ Фильмы, музыка, игры, софт
■ Предварительные заказы на книги	■ Канцелярские и офисные товары
■ Встречи с авторами	■ Цветы
■ Читательские клубы по интересам	■ Сувениры
■ Индивидуальное обслуживание	
■ Подарочная упаковка	
■ Доставка книг из-за рубежа	
■ Выставки-продажи	

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1

8 (495) 781-19-00

www.biblio-globus.ru

пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(с.м. «Квант» №3)

1. 20 рублей.

Полная зайцев сумка стоит $30 + 30 \cdot 45 = 1380$ рублей. Гриша может купить максимум 3 полных сумки и у него останется $5000 - 3 \cdot 1380 = 860$ рублей. На эти деньги Гриша может купить четвертую (пустую) сумку и 18 зайцев в нее. В итоге у Гриши останется $860 - 30 - 18 \cdot 45 = 20$ рублей.

2. С точки зрения Ежика слева стоит Сивая Кобыла, в центре Сивый Мерин, справа Медвежонок.

Если Медвежонок слева, то животное в центре – тоже Медвежонок, что невозможно. Если Медвежонок в центре, то справа – Мерин, а левому животному остается быть Кобылой, но тогда Мерин сказал правду, что также невозможно. И только если Медвежонок стоит справа, противоречий не возникает: тогда слева стоит Кобыла, а в центре Мерин, причем оба врут.

3. 7, 47, 3, 3, 23 и 2 соответственно.

Посмотрим на карточку с надписью «23». Пусть число на лицевой стороне этой карточки написано красным цветом. Тогда среди чисел красного цвета есть число, которое делится на 23. Если чисел красного цвета хотя бы три, на оборотах должны быть хотя бы два числа, которые делятся на 23, но это не так. Значит, чисел красного цвета ровно два и одно из них – на лицевой стороне карточки с числом 23. Черным цветом тогда записаны четыре числа. Аналогичные рассуждения можно провести с числом 47: цвет числа на лицевой стороне карточки с числом 47 встречается два раза, т. е. оно красное. Но тогда на лицевой стороне карточки с числом 23 написано число 47, а с числом 47 – число 23. Разберемся теперь с карточками, на которых Аня написала числа черным цветом. На их оборотах написаны числа 18, 42, 42 и 63. В их произведение $18 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 63 = 126^3$ каждое из черных чисел входит по три раза. Отсюда произведение черных чисел равно 126. Тогда на лицевой стороне карточки с числом 18 написано число $126/18 = 7$, с числом 42 – число $126/42 = 3$, с числом 63 – число $126/63 = 2$.

4. $2^{-4} = 4^{-2}$, $(-4)^2 = (-2)^4$.

Комментарий. Можно доказать, что этот пример единственный с точностью до перестановок чисел.

Конкурс имени А.П.Савина

(с.м. «Квант» №2)

21. Добавим к каждой из суммарных площадей левый и правый фиолетовые треугольники. Получим, с одной стороны, суммарную площадь треугольников CAF и DAE , а с другой – треу-

гольников CBF и DBE . Но каждая из этих площадей составляет половину площади всего прямоугольника, поэтому они равны.

22. Да, прав.

Если в наборе четное число коротких (по 1 см) палочек, то длинных тоже будет четное количество, и прямоугольник выложить можно: пустим две одинаковые палочки на две противоположные стороны прямоугольника, а остальные палочки разделим на два одинаковых набора для оставшейся пары сторон. Если в наборе нечетное число коротких палочек и их хотя бы 3, мы можем сложить из трех коротких палочек одну длинную. Тогда количество обоих видов палочек станет четным и можно будет выложить прямоугольник, как в первом случае. Значит, в наборе Вовочки было 99 длинных палочек (по 3 см) и 1 короткая (1 см). Если из всех этих палочек выложить многоугольник, то длины его сторон, составленных только из длинных палочек, будут делиться на три, а длина стороны, содержащей короткую палочку, – нет. Значит, в таком многоугольнике обязательно найдутся неравные стороны и он не может быть правильным.

23. $M - N = 1$.

Существуют пять различных фигур тетрамино. Эти фигуры изображены на рисунке 1. По внешнему виду они напоминают латинские буквы I , O , L , S , T , поэтому их называют I -тетрамино, O -тетрамино, L -тетрамино, S -тетрамино, T -тетрамино.

Рассмотрим самую левую клетку фигур A и B (она выделена на рисунке 2 желтым цветом). Эту клетку можно покрыть тремя видами тетрамино: S -тетрамино, T -тетрамино и I -тетрамино. (Гипотетически ее можно покрыть также L -тетрамино, но тогда оставшаяся часть фигуры состоит из двух несвязных частей и не допускает разбиение на четырехклеточные фигуры тетрамино.)

Если в фигуре A желтую клетку покрыть S -тетрамино, а в фигуре B желтую клетку покрыть T -тетрамино, то оставшиеся части фигур

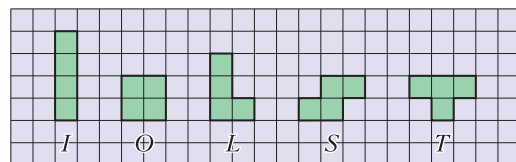


Рис. 1

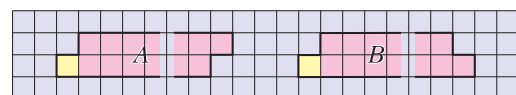


Рис. 2

A и B будут представлять собой равные фигуры. Таким образом, мы получаем равные количества разбиений фигур A и B на четырехклеточные фигуры.

Если в фигуре A желтую клетку покрыть T -тетрамино, а в фигуре B желтую клетку покрыть S -тетрамино, то оставшиеся части фигур A и B будут представлять собой равные фигуры. Снова мы получаем равные количества разбиений фигур A и B .

Наконец, если в обеих фигурах A и B желтую клетку покрыть I -тетрамино (рис. 3), то тогда в обеих этих фигурах фиолетовую клетку тоже надо покрыть I -тетрамино. Оставшиеся части фигур A и B отличаются от самих фигур A и B уменьшением длины на 4 клетки (2020→2016, 2021→2017).

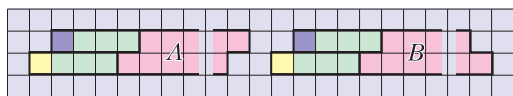


Рис. 3

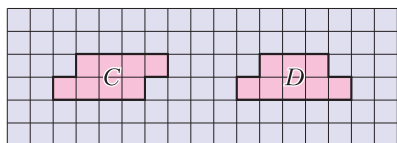


Рис. 4

Повторив описанную процедуру 504 раза, в результате мы приходим к фигурам, изображенным на рисунке 4. Фигура C допускает 3 различных разбиения на фигуры тетрамино, а фигура D допускает 2 различных разбиения на фигуры тетрамино. Следовательно, $M - N = 3 - 2 = 1$.

24. 4 способа.

Все возможные примеры устроены, как на рисунке 5 при $a + b = 3$. Подобрать пары a и b так, что $a + b = 3$, можно 4 способами. В дальнейшем, ссылаясь на этот пример, будем называть его *хорошим*. Осталось показать, что других заполнений с такой же суммой чисел не существует.

9	a	9	a	9	a	9
b	0	b	0	b	0	b
9	a	9	a	9	a	9
b	0	b	0	b	0	b
9	a	9	a	9	a	9
b	0	b	0	b	0	b
9	a	9	a	9	a	9

Рис. 5

Первое решение. Идея этого решения состоит в том, чтобы разбивать исходный квадрат на фигуры, суммы чисел в которых оцениваются просто. Такие фигуры показаны на рисунке 6.

Непосредственно из условия следует, что в одной клетке стоит число не больше 9 и сумма чисел в квадрате 2×2 не превышает 12. Также заметим, что в трехклеточном уголке сумма чисел тоже не превышает 12 (ведь этот уголок целиком содер-

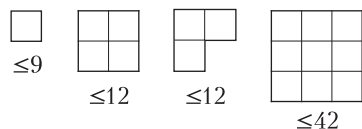


Рис. 6

жится в квадрате 2×2) и неравенство обращается в равенство, когда в клетке, дополняющей этот уголок до квадрата 2×2 , стоит 0.

В квадрате 3×3 сумма чисел не превышает $12 + 12 + 9 + 9 = 42$, потому что его можно разбить на квадрат 2×2 , уголок и две отдельные клетки (рис. 7). При этом если неравенство обращается в равенство, т.е. если сумма чисел в квадрате 3×3 равна 42, то в каждой из частей неравенство должно обращаться в равенство. Тогда в двух углах стоят девятки, а в центре ноль.

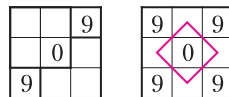


Рис. 7

Повернув это разбиение на 90° и повторив рассуждения, получим, что во всех четырех углах стоят девятки. Так как в квадратах 2×2 должна достигаться наибольшая сумма, то в клетках, соединенных красными отрезками, должны стоять числа, в сумме дающие 3.

Разобьем квадрат 7×7 двумя способами на такие части, как на рисунке 8. Для каждой из частей выполняется соответствующее неравенство. Заметим, что в хорошем примере все эти неравенства обращаются в равенства. Во всех примерах с наибольшей суммой чисел каждое из этих неравенств должно обращаться в равенство, иначе сумма чисел в нем будет меньше, чем в хорошем примере. Поэтому в примере с наибольшей суммой чисел девятки и нули стоят обязательно так же, как на рисунке 8, а клетки, соединенные красными отрезками, заполнены числами, в сумме дающими 3. Если учесть, что эти разбиения можно поворачивать и отражать симметрично, то можно сделать вывод, что девятки и нули обязательно должны быть расположены так же, как в хорошем примере. А красные отрезки образуют связную сеть, значит, оставшиеся клетки заполнены числами a и b , $a + b = 3$, как в хорошем примере. Соответ-

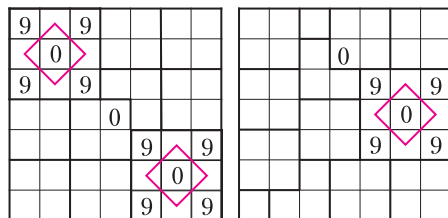


Рис. 8

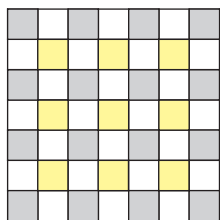


Рис. 9

рисунке 9.

Крестом будем называть объединение вертикали и горизонтали, на пересечении которых стоит серая клетка. Всего в таблице 16 крестов. Если из таблицы удалить любой крест, то оставшаяся часть разбивается на 9 квадратов 2×2 . Значит, сумма всех расставленных цифр $S \leq 9 \cdot 12 + s_k = 108 + s_k$, где s_k — сумма цифр в k -м кресте ($k = 1, 2, \dots, 16$). Просуммируем эти 16 неравенств и получим

$$16S \leq 108 \cdot 16 + s, \quad (*)$$

где $s = s_1 + s_2 + \dots + s_{16}$.

Пусть суммы чисел в серых, белых и желтых клетках равны C , B и J соответственно; $S = C + B + J$. Каждая серая клетка содержится в 7 крестах, а каждая белая — в 4 крестах. Поэтому в сумму s каждое число в серой клетке входит 7 раз, а каждое число в белой клетке 4 раза, т.е. $s = 7C + 4B$. Преобразуем неравенство (*):

$$16S \leq 108 \cdot 16 + 7C + 4B = 108 \cdot 16 + 7C + 4(S - C - J) = 108 \cdot 16 + 3C + 4S - 4J,$$

$$12S \leq 108 \cdot 16 + 3C - 4J,$$

$$S \leq \frac{108 \cdot 16 + 3C - 4J}{12} = 144 + \frac{3C - 4J}{12}.$$

Очевидно, $C \leq 16 \cdot 9$, $J \geq 0$. Значит,

$$S \leq 144 + \frac{3 \cdot 16 \cdot 9}{12} = 180.$$

Чтобы это неравенство обратилось в равенство, необходимо, чтобы использованные в цепочке неравенства обратились в равенства:

- $C = 16 \cdot 9$ (во всех серых клетках 9),
- $J = 0$ (во всех желтых клетках 0),
- в каждом квадрате 2×2 сумма цифр 12.

Отсюда понятно, что заполнение с максимальной суммой может быть только таким, как в хорошем примере.

Линейная независимость радикалов

(задачи 1 – 11 см. в «Кванте» №3)

1. Все три суммы радикалов иррациональны, так как в каждой из них все радикалы и их отношения иррациональны по лемме 1. Для ра-

ственно, других подходящих примеров, кроме хороших, не существует.

Второе решение (его прислала команда кружка Гатчинского и Лужского районов Ленинградской области). Раскрасим клетки таблицы в серый, желтый и белый цвета, как на

дикала $\sqrt[17]{2021!}$ в последней сумме для этого достаточно заметить, что простое $p = 2011$ входит в разложение $2021!$ в первой степени.

2. а) Один набор получается из другого умножением на некоторый радикал: например, $(\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}) = \sqrt{5}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$. б) Чтобы нарисовать гиперкуб, сначала изобразим трехмерный куб, поместив один квадрат внутри другого и соединив соответственные вершины (рис.10,а). (Этот вид сверху на куб, сделанный из желе и немного расплывшийся после падения на стол.) Теперь аналогично рисуем один куб внутри другого и, соединяя соответственные вер-

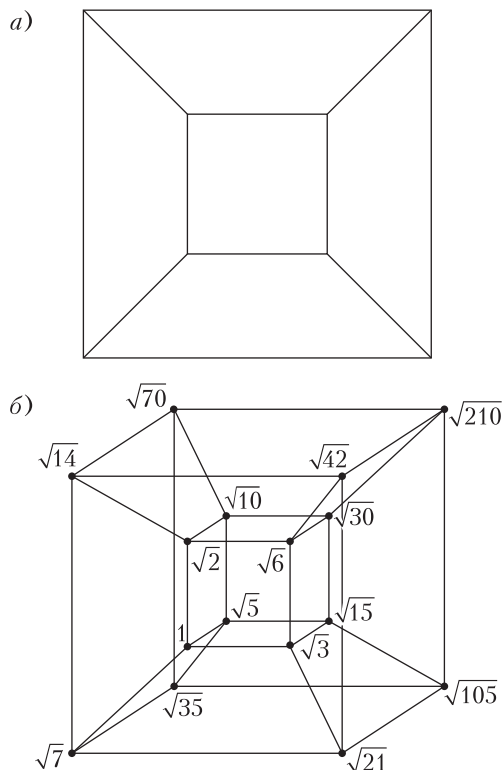


Рис. 10

шины, получаем гиперкуб. Радикалы на внутреннем кубе уже расставлены на рисунке 10,б в статье. Домножая их на $\sqrt{7}$, получаем радикалы на соответственных вершинах внешнего куба (рис.10,б).

4. Пусть для $n-1$ простых чисел утверждение доказано и $\sqrt{p_n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$. Каждое число в этом поле по предположению индукции однозначно представляется в виде суммы 2^{n-1} слагаемых вида $a\sqrt{p_1}^{l_1} \dots \sqrt{p_{n-1}}^{l_{n-1}}$, $a \in \mathbb{Q}$, $l_i = 0, 1$. Число $\sqrt{p_n}$ равно сумме чисел такого вида, но не

равно ни одному из них по лемме 1. Значит, в сумме хотя бы два слагаемых, поэтому какой-то из радикалов $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}}$ в какое-то слагаемое входит, а в какое-то — нет. Пусть это радикал $\sqrt{p_{n-1}}$. Тогда $\sqrt{p_n} = A + B\sqrt{p_{n-1}}$, где $A, B \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-2}}) = K$, причем $AB \neq 0$. Возведем в квадрат: $p_n = A^2 + B^2 p_{n-1} + 2AB\sqrt{p_{n-1}}$, откуда $AB = 0$. Противоречие.

5. Проблема — в определении сопряженного числа. Внутри *каждого конкретного* поля $K(\sqrt{d})$ сопряжение определено формулой $f_d(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$ ($a, b \in K$). Это корректно: a, b определены однозначно, так как $\sqrt{d} \notin K$. Но не обосновано приравнивание сопряженных в разных смыслах: если $\alpha = a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d'}$, то почему $f_d(\alpha) = a - b\sqrt{d}$ должно равняться $f_{d'}(\alpha) = a' - b'\sqrt{d'}$? Можно данное определение понимать в таком смысле: если α представимо в виде $a + b\sqrt{d}$, где $a, b, d \in K$, $\sqrt{d} \notin K$, то положим сопряженное к α равным $a - b\sqrt{d}$. Но тогда вывод

$$a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d'} \Rightarrow a - b\sqrt{d} = a' - b'\sqrt{d'}$$

есть не что иное как проверка корректности этого определения!

Выход из положения в том, чтобы определить сопряженное инвариантным способом, не привязанным к конкретному выражению в виде квадратичной иррациональности. А именно, пусть $\alpha \notin K$ является корнем многочлена степени 2 над K . Тогда определим сопряженное к α как второй корень этого многочлена.

Корректность такого определения сводится к очевидной проверке того, что такой многочлен определен однозначно с точностью до числового множителя. Действительно, если $x^2 + px + q$ и $x^2 + p'x + q'$ — два многочлена с корнем α над K , то их разность $(p - p')x + q - q' \in K$ тоже имеет корень α , откуда $p = p'$ (иначе $\alpha = \frac{q' - q}{p - p'} \in K$), а тогда и $q = q'$. Фактически так и вводятся сопряженные в общей ситуации.

6. Идея — перейти к сопряженным числам и получить противоречие: $(a - b\sqrt{2})^2 + (c - d\sqrt{2})^2 = 7 - 5\sqrt{2} < 0$. Концептуальное обоснование такого перехода — проверка того, что сопряжение $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) является вложением (см. определение на с.6).

7. Сложим данное число с сопряженным к нему: $(6 + \sqrt{35})^{1000} + (6 - \sqrt{35})^{1000}$. Эта сумма целая (из формулы бинома Ньютона). С другой стороны,

сопряженное число очень мало:

$$(6 - \sqrt{35})^{1000} = \frac{1}{(6 + \sqrt{35})^{1000}} < \frac{1}{10^{1000}}.$$

Значит, у исходного числа первые 1000 цифр после запятой — девятки.

8. Рассмотрим 2^{99} многочленов $1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_{100} x_{100}$, где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Их произведение — четный многочлен по каждой из переменных, поэтому он имеет вид $f(x_2^2, \dots, x_{100}^2)$, где f — многочлен с целыми коэффициентами. В частности, при $x_2 = \sqrt{2}, \dots, x_{100} = \sqrt{100}$ получается целое число. Обозначим его d . Повторив рассуждение с противоположными по знаку многочленами $-1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_{100} x_{100}$, получим то же число d (поскольку количество многочленов четно). Значит, произведение из условия равно d^2 .

$$\begin{aligned} 9. \text{ а) } \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}} &= \frac{1}{1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3(\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}}{8\sqrt{2} - 6} = \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt{3})(4\sqrt{2} + 3)}{46}. \end{aligned}$$

$$6) \frac{1}{26} (3\sqrt[4]{27} + 7\sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{3} - 11).$$

10. $m = k^5$, $n = (2021 - k)^5$, $k = 1, \dots, 2020$. Решение аналогично примеру 7.

11. Многочлен

$$F(x, y) = (x - f(y))(x - f(y\varepsilon))(x - f(y\varepsilon^2))$$

не меняется при подстановке $y\varepsilon$ вместо y , а значит, y в него входит только в степенях, кратных 3. Следовательно, $F(x, \sqrt[3]{2}) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)[x]$. А поскольку $\varepsilon^2 = \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\overline{F(x, \sqrt[3]{2})} = F(x, \sqrt[3]{2}) \in \mathbb{Q}[x]$. Если $\sqrt[3]{3} = f(\sqrt[3]{2})$, то $F(x, \sqrt[3]{2})$ делится на $\mu_{\sqrt[3]{3}}(x) = x^3 - 3$, а тогда $F(x, \sqrt[3]{2}) = x^3 - 3$. Но сумма корней многочлена $F(x, \sqrt[3]{2})$ равна $3a$ (так как $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$). Значит, $a = 0$ и $\sqrt[3]{3} = b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$. Поделим на $\sqrt[3]{2}$: $\sqrt[3]{3/2} = b + c\sqrt[3]{2}$. Аналогично или как в примере 7 получим $b = 0$. Значит, $\sqrt[3]{3} = c\sqrt[3]{4}$, что невозможно по лемме 1.

12. Докажем такую лемму. Пусть K — подполе в $\mathbb{C}$, $r \in \mathbb{C} \setminus K$, $r^2 \in K$. Тогда все вложения $K(r) \rightarrow \mathbb{C}$ над K (т.е. тождественные на K) суть $a + br \mapsto a \pm br$.

Ясно, что $K(r) = \{a + br \mid a, b \in K\}$ и что всякое

вложение $\varphi: K(r) \rightarrow \mathbb{C}$ над K определяется значением на r . При этом $\varphi(r)^2 = \varphi(r^2) = r^2$, откуда $\varphi(r) = \pm r$. Для знака плюс получаем тождественное вложение, для знака минус – аналог комплексного сопряжения ($K = \mathbb{R}, r = i$): $\varphi(a + br) = a - br$. Это вложение над K : свойства $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(k) = k$ при $k \in K$ очевидны. Далее,

$$\begin{aligned}\varphi((a + br)(c + dr)) &= \varphi(ac + bdr^2 + (ad + bc)r) = \\ &= ac + bdr^2 - (ad + bc)r = (a - br)(c - dr) = \\ &= \varphi(a + br)\varphi(c - dr)\end{aligned}$$

для всех $a, b, c, d \in K$.

а) Применяем лемму для $K = \mathbb{Q}$ и $r = i$; $\text{tr}(1 + i) = (1 + i) + (1 - i) = 2$.

б) Обозначим $\varepsilon = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Так как $\varepsilon^2 = i$, то $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \mathbb{Q}(\varepsilon, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. При любом вложении поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ имеем $\sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}$ и $i \mapsto \pm i$. Существуют 4 вложения, дающие все комбинации знаков: тождественное φ_{++} ; вложения, которые дает лемма:

$$\varphi_{+-}: a + bi \mapsto a - bi, \quad a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$\varphi_{-+}: a' + b'\sqrt{2} \mapsto a' - b'\sqrt{2}, \quad a', b' \in \mathbb{Q}(i);$$

а также их композиция $\varphi_{--} = \varphi_{+-} \circ \varphi_{-+}$. Отсюда $\text{tr}(1 + i) = (\varphi_{++} + \varphi_{+-} + \varphi_{-+} + \varphi_{--})(1 + i) = 4$.

Заметим, что образы числа ε при всех вложениях образуют набор сопряженных $\left\{ \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \right\} = \{\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^5, \varepsilon^7\}$ – корней многочлена $\mu_\varepsilon(x) = x^4 + 1$. Это все первообразные корни 8-й степени из 1 (рис.11).

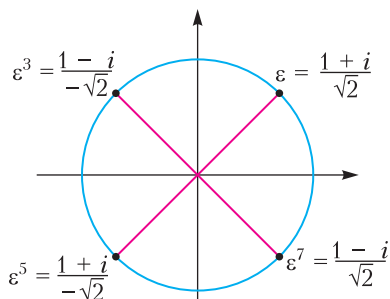


Рис. 11

13. Аналогично решению задачи 12,6 получаем 4 вложения поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, при которых $\sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}$ и $\sqrt{3} \mapsto \pm\sqrt{3}$. Каждое из них продолжается до вложения поля $K(\sqrt{5})$ двумя способа-

ми: $\sqrt{5} \mapsto \pm\sqrt{5}$ (аналогично берем три вложения, меняющие знак у одного из трех радикалов, и составляем их всевозможные 2^3 композиций).

Опишем вложения поля $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2})$. Обозначим $r = \sqrt[12]{2}$. Тогда $\sqrt[4]{2} = r^3$, $\sqrt[8]{2} = r^2$ и $L = \mathbb{Q}(r^3, r^2) = \mathbb{Q}(r)$. Согласно примеру 5, $\mu_r(x) = x^6 - 2$, поэтому по теореме 10 все вложения $\varphi_0, \dots, \varphi_5$ поля $\mathbb{Q}(r)$ определяются условиями $\varphi_j: r \mapsto r\varepsilon^j$, где $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ – один из корней 6-й степени из 1.

Ищем «экстремальный» экстремум

1. 5. 2. 5. 3. 3.

Региональный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике

Второй тур

(см. «Квант» №3)

9 класс

1. Пусть разгон происходит с ускорением a . Тогда время движения на участке AC равно $\tau_1 = \sqrt{2L/a}$, а достигнутая при этом скорость равна $u_1 = \sqrt{2La}$. Минимально возможный радиус закругления определяется максимально возможным ускорением: $R_{\min} = u_1^2/a_{\max} = 2La/a_{\max}$. Время движения автомобиля на закруглении $\tau_2 = \pi R_{\min}/u_1 = \pi\sqrt{2La}/a_{\max}$. Общее время

$$t = \tau_1 + \tau_2 = \sqrt{\frac{2\pi L}{a_{\max}}} \left(\sqrt{\frac{a_{\max}}{\pi a}} + \sqrt{\frac{\pi a}{a_{\max}}} \right).$$

Выражение в скобках принимает минимальное значение, равное 2, при $\sqrt{a_{\max}/(\pi a)} = 1$. Таким образом, минимально возможное время равно

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2\pi L}{a_{\max}}} = 2\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{L}{a_{\max}}}$$

и достигается при $a_1 = a_{\max}/\pi$, что не противоречит условию $a_1 < a_{\max}$. При разгоне с максимально возможным ускорением $a = a_{\max}$ время равно

$$t_1 = \tau_1 + \tau_2 = \sqrt{\frac{2\pi L}{a_{\max}}} \left(\sqrt{\frac{1}{\pi}} + \sqrt{\pi} \right) = \sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}} (1 + \pi).$$

Окончательно,

$$n = \frac{t_1}{t_2} = \frac{1 + \pi}{2\sqrt{\pi}} \approx 1,17.$$

2. В момент начала подтекания результирующая сил давления воды на горизонтальную грань и сила тяжести сосуда не лежат на одной прямой. Поэтому сосуд начинает поворачиваться вокруг

правого нижнего ребра, относительно которого и будем рассматривать моменты сил. Приподнимать сосуд будет сила давления воды на левую верхнюю грань. Подтекание начинается, когда заполнено $5/6$ объема. В этот момент давление на верхнюю грань равно $\rho g a/2$, а сила давления равна $(\rho g a/2)a^2$. Плечо этой силы равно $3a/2$. С силой тяжести главная сложность заключается в определении положения центра масс конструкции. Разобьем сосуд на одинаковые части, например на листы размером $a \cdot a$, для которых положение центра масс однозначно определяется, и запишем моменты сил этих частей. Обозначим массу одной такой части через m . Тогда полная масса сосуда будет $M = 12m$. По правилу моментов,

$$2mg \cdot 0 + 5mg \cdot (a/2) + mg \cdot a + 3mg \cdot (3a/2) + mg \cdot 2a = (\rho g a/2)a^2 (3a/2),$$

откуда $m = \rho a^3 (3/40)$ и $M = 0,9\rho a^3 = 0,9$ кг.

3. Резисторы R_1 и R_4 соединены параллельно, а резистор R_2 подключен последовательно с ними. Эквивалентное сопротивление этого участка $R_3 = R_{1,4} + R_2 = 1,5R$. Такое же эквивалентное сопротивление получается из резисторов R_8 , R_6 и R_9 . На рисунке 12 приведена упрощенная схема исходной цепи – это несбалансированный

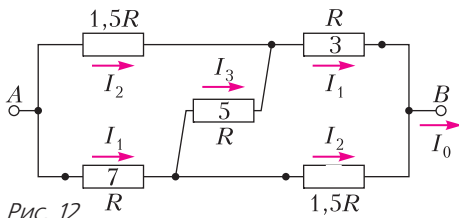


Рис. 12

электрический мост. Введем обозначения токов, протекающих через него. Заметим, что через резисторы R_3 и R_7 силы протекающих токов одинаковы. Запишем систему уравнений:

$$I_1 + I_2 = I_0, \quad I_2 + I_3 = I_1, \quad 1,5RI_2 = RI_1 + RI_3,$$

откуда получим $I_1 = 5$ мА, $I_2 = 4$ мА.

Вернемся к исходной схеме. На рисунке 13 показано распределение токов, протекающих через резисторы R_3 , R_6 и R_9 . Видно, что сила тока, протекающего через амперметр A_2 , равна $I_{A2} = I_2/2 = 2$ мА, а через амперметр A_1 равна $I_{A1} = I_1 + I_2/2 = 7$ мА.

4. До погружения цилиндра в стакан испарение азота происходит за счет

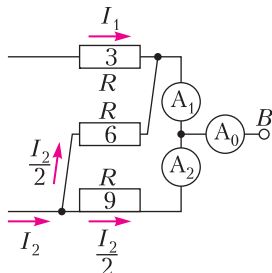


Рис. 13

тепла, поступающего из окружающей среды. Мощность теплообмена такова, что за 1 мин испаряется 6 г азота. После погружения в азот цилиндра интенсивность испарения возрастает из-за теплообмена с цилиндром до тех пор, пока его температура не уменьшится от комнатной до температуры кипения жидкого азота. Из-за теплообмена с цилиндром дополнительно испаряется масса азота

$\Delta m = \frac{Q}{\lambda}$, где Q – количество теплоты, которое отдает цилиндр при охлаждении. Ввиду линейности зависимости удельной теплоемкости от температуры для расчета Q можно использовать среднее значение теплоемкости $c_{\text{ср}}$, соответствующее температуре -86°C . При заданных значениях теплоемкости в интервале температур от -200°C до $+50^\circ\text{C}$ значение $c_{\text{ср}} = 710$ Дж/(кг·°C). При этом

$$Q = c_{\text{ср}} M (t_0 - t_{\text{к}}) = 710 \cdot 0,070 \cdot 220 \text{ Дж} = 10,9 \text{ кДж}.$$

По таблице в условии построим график зависи-

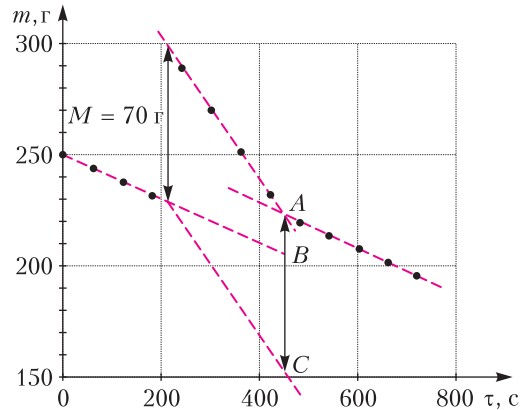


Рис. 14

мости $m(\tau)$ (рис.14). Из графика видно, что до 210 с идет испарение азота, обусловленное теплообменом с окружающей средой. В районе 210 с в стакан опустили цилиндр (наблюдается скачок в показаниях весов, равный 70 г), а после 450 с скорость испарения азота сравнялась с первоначальной. Следовательно, цилиндр остыл до температуры кипения азота и тепло по-прежнему поступает только в результате теплообмена с окружающей средой. Если бы цилиндр в азот не погружали, то к 450 секунде показания весов оказались бы равными 205 г. С учетом массы цилиндра весы показывали бы 275 г. Таким образом, дополнительно испарившаяся масса азота равна $\Delta m_a \approx 52$ г (длина отрезка BC). Отсюда находим

$$\lambda = \frac{Q}{\Delta m_a} \approx \frac{10,9 \text{ кДж}}{0,052 \text{ кг}} = 210 \text{ кДж/кг}.$$

10 класс

1. Найдем геометрическое место точек, в которых шарик может оказаться в момент времени t . Пусть α – угол, который составляет желоб с горизонтом. Из второго закона Ньютона ускорение шарика $a = g \sin \alpha$. Пройденное шариком расстояние $s = \frac{at^2}{2} = \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2}$. Отсюда следует,

что $\frac{s}{\sin \alpha} = \frac{gt^2}{2}$, т.е. для всех точек, в которых

может оказаться шарик спустя время t , величина $s/\sin \alpha$ будет одинаковой. Покажем, что все эти точки лежат на окружности, центр которой находится строго под точкой A , а сама окружность проходит через точку A . Построим такую окружность для одного из возможных положений желоба (рис.15).

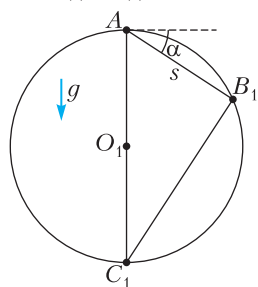


Рис. 15

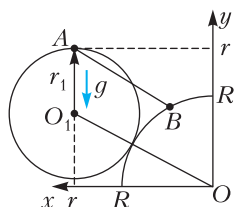


Рис. 16

$$(OO_1)^2 = (R + r_1)^2 = r^2 + (r - r_1)^2,$$

откуда

$$r_1 = \frac{2r^2 - R^2}{2(r + R)}, \text{ и } t = \sqrt{\frac{4r_1}{g}} = \sqrt{\frac{2(2r^2 - R^2)}{g(r + R)}}.$$

2. $I_7 = 6 \text{ A}$, $I_8 = 8 \text{ A}$, $U_{AB} = 208 \text{ В}$.

3. Сначала ответим на вопросы 1 и 2. Разместим зеркало на стене EF . Построим изображение склада в зеркале (рис.17). Изображение, создаваемое плоским зеркалом, симметрично исходному предмету относительно плоскости зеркала. Построим изображение A_1B_1 стены склада. Нам нужно, чтобы лучи от всех точек изображения стены склада доходили до поста охраны. Проведем крайние лучи A_1O и B_1O . Именно эти лучи и задают границы зеркала Z_1Z_2 . Все остальные нужные нам лучи будут лежать между этими крайними лучами. Размеры зеркала можно най-

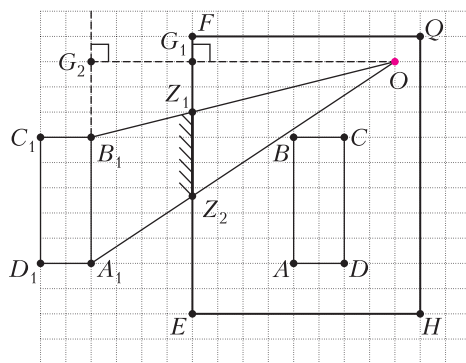


Рис. 17

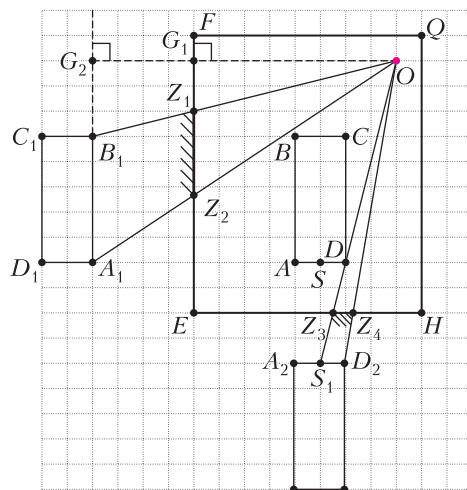


Рис. 18

ти из подобия треугольников OB_1A_1 и OZ_1Z_2 . Их стороны относятся так же, как высоты, поэтому

$$Z_1Z_2 = B_1A_1 \frac{OG_1}{OG_2} = \frac{100}{3} \text{ м} \approx 33,3 \text{ м}.$$

Теперь рассмотрим вопросы 3 и 4. Для начала построим изображение стены AD склада в зеркале, размещенном на заборе EH (рис.18). Как видно, угол D склада не позволяет увидеть в зеркале всю стену AD , можно увидеть лишь ее половину SD . Значит, одного зеркала недостаточно. Добавим еще одно зеркало на стену AD , чтобы луч, вышедший из точки A , после отражения от зеркала на заборе попадал бы в зеркало

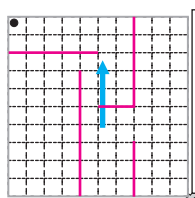


Рис. 19

на стене склада, затем опять в зеркало на заборе и доходил до поста охраны. Сделав соответствующие построения, убедитесь в том, что двух зеркал достаточно.

4. Окончательный вариант расположения перегородок, не противоречащий исход-

ным данным, приведен на рисунке 19 (перегородки показаны красным цветом).

11 класс

1. См. задачу Ф2651 «Задачника «Кванта».

2. Для малого промежутка времени dt количество теплоты dQ , выделяющееся на резисторе сопротивлением R , равно

$$dQ = U_R I_R dt = U_R dq,$$

где U_R и I_R – напряжение на резисторе и сила тока, протекающего через него, dq – заряд, прошедший через резистор. Установим связь U_R и q в нашем случае. Будем использовать известное соотношение для параллельно соединенных резистора и катушки индуктивности:

$$RI_R = L \frac{dI_L}{dt}, \quad RI_R dt = R dq = L dI_L, \quad \frac{R}{L} q = I_L.$$

Сразу после замыкания ключа нелинейный элемент ведет себя как резистор сопротивлением R – режим «постоянного сопротивления». Затем он переходит в режим «постоянного тока».

В режиме «постоянного сопротивления» сила тока через нелинейный элемент $I = I_L + I_R$. По второму правилу Кирхгофа, $\mathcal{E} = IR + I_R R = 2I_R R + I_L R$. Отсюда получим

$$\mathcal{E} = 2U_R + \frac{R^2}{L} q, \quad U_R = \frac{1}{2} \left(\mathcal{E} - \frac{R^2}{L} q \right).$$

Нелинейный элемент остается в этом режиме до тех пор, пока выполняется условие $U_R \geq \mathcal{E} - I_0 R$, или пока прошедший через резистор заряд

$$q < q_1 = \frac{L}{R} \left(2I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R} \right).$$

Выделившееся при этом количество теплоты пропорционально площади под графиком $U_R(q)$ на участке $0 < q < q_1$:

$$Q_1 = \frac{\mathcal{E}/2 + \mathcal{E} - I_0 R}{2} q_1 = \left(\frac{3\mathcal{E}}{2R} - I_0 \right) \frac{L}{2} \left(2I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R} \right) = 0,06 \text{ Дж.}$$

В режиме «постоянного тока»

$$I_R = I_0 - I_L = I_0 - \frac{R}{L} q, \quad U_R = RI_R = RI_0 - \frac{R^2}{L} q.$$

Этот режим реализуется до момента, пока U_R не станет равным нулю, т.е. пока q не станет равным $q_2 = \frac{LI_0}{R}$. Заряд, прошедший через резистор

в этом режиме, равен

$$q_2 - q_1 = \frac{I_0 L}{R} - \frac{L}{R} \left(2I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R} \right) = \frac{L}{R} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_0 \right),$$

а выделившееся количество теплоты равно

$$Q_2 = \frac{(q_2 - q_1)(\mathcal{E} - I_0 R)}{2} = \frac{L \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_0 \right)^2}{2} = 0,01 \text{ Дж.}$$

Общее количество теплоты, выделившееся на резисторе, составит

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0,07 \text{ Дж.}$$

3. Направим оси координат перпендикулярно граням куба. Пусть $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ – вектор скорости некоторого луча света. При отражении от каждой грани перпендикулярная проекция скорости отраженного луча меняет знак, а две остальные проекции остаются неизменными. Полное отражение происходит, когда угол между падающим на грань лучом и нормалью к грани превосходит угол φ_0 , где $\sin \varphi_0 = 1/n = 1/2$. Тогда свет через грань не проходит совсем. Если этот угол меньше $\varphi = 30^\circ$, то происходит частичное отражение света, а ненулевая часть выходит из куба наружу.

Рассмотрим луч, падающий на перпендикулярную оси x грань, при котором нет полного отражения, а часть света выходит наружу. Условие этому $|c_x|/c > \sqrt{3}/2$, а модули проекций на две остальные оси обязательно меньше $c/2$. Если скорость луча удовлетворяет условию $|c_x|/c > \sqrt{3}/2$, но он попадает сначала на грани, перпендикулярные осям y и z , то для соответствующих проекций имеем $|c_y|/c < 1/2$ и $|c_z|/c < 1/2$, т.е. на этих гранях происходят полные отражения, в результате которых свет попадет на грани, перпендикулярные оси x . Таким образом, при выполнении условия $|c_x|/c > \sqrt{3}/2$, какими бы отражения не были, свет будет выходить только через перпендикулярные оси x грани и в конечном счете (поскольку поглощение отсутствует) весь такой свет покинет куб независимо от того, где находится источник. Аналогично и для других двух граней.

Итак, куб покинет свет, выходящий из точечного источника в шесть конусов, оси которых перпендикулярны граням куба, а угол раствора конуса составляет 60° . Остальной свет будет испытывать только полное отражение и никогда куб не покинет. Искомая доля вышедшего света равна отношению суммарного телесного угла этих шести конусов к полному телесному углу 4π . Телесный угол при вершине одного конуса равен

$$\Omega = \frac{2\pi R h}{R^2} = \frac{2\pi R \cdot R(1 - \cos \varphi_0)}{R^2} = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Таких конусов шесть, поэтому доля энергии света, покидающего куб при *любых* положениях источника внутри куба, одинакова и равна

$$\eta = \frac{6\Omega}{\Omega_{\text{полн}}} = \frac{12\pi}{4\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 0,4 = 40\%.$$

4. Рассмотрим один из возможных способов решения. График зависимости массы контейнера с жидким азотом от времени представлен на ри-

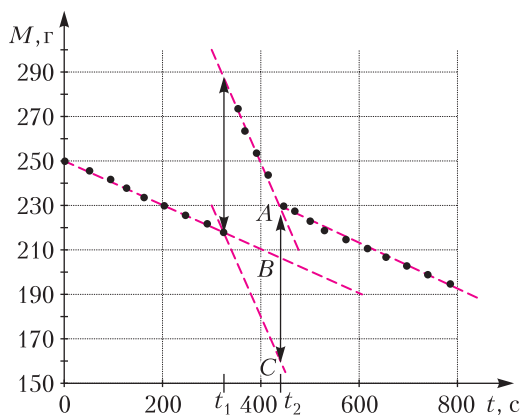


Рис. 20

сунке 20. При определении массы испарившегося азота учитывалось изменение показаний весов при погружении в него цилиндра. Видно, что на начальном участке, до момента времени $t_1 \approx 320$ с, скорость испарения определялась теплообменом с окружающей средой. С момента t_1 до момента времени $t_2 \approx 440$ с испарение определялось теплообменом с цилиндром и окружающей средой (бурное кипение). Начиная с момента времени t_2 вновь пошел только теплообмен с окружающей средой (цилиндр охладился до температуры кипения азота). Далее возможны несколько вариантов определения массы азота, испарившегося в результате охлаждения цилиндра. Один из них следует из графических построений. Скачок массы на 69 г в момент $t_1 = 320$ с обусловлен погружением цилиндра в жидкий азот; отрезок AC соответствует массе цилиндра; отрезок BC соответствует массе азота ($m_N \approx 48$ г), испарившегося из-за теплообмена с цилиндром. Количество теплоты Q , которое отдал алюминиевый цилиндр при охлаждении с учетом зависимости его теплоемкости от температуры, пропорционально площади под графиком $c_{Al}(T)$ в интервале температур от -196°C до $+23^\circ\text{C}$. Численное значение можно подсчитать по клеткам на графике. Получается

$$Q = m_{Al} \Sigma c \Delta T_i \approx 69 \text{ г} \cdot 155 \text{ кДж/г} = 10,7 \text{ кДж}.$$

Значение удельной теплоты парообразования азота найдем из уравнения теплового баланса:

$$\lambda = \frac{Q}{m_N} = \frac{10,7 \text{ кДж}}{48 \cdot 10^{-3} \text{ кг}} = 223 \text{ кДж/кг}.$$

Лингвистические задачи

(см. 2-ю с. обл.)

Последняя строка позволяет предположить, что négy – это 4; тогда negyed в других выражениях может означать «четверть». В венгерских примерах многократно повторяется элемент három; анализ значений этих выражений позволяет предпо-

ложить, что такой повторяющейся информацией может быть число 3. Действительно:

2 часа 42 минуты = 3 четверти 3-го минус 3 минуты,

2 часа 48 минут = 3 четверти 3-го плюс 3 минуты.

Тогда múlva означает «до», múlt – «после», а perc и perccel – «минуты» (по-видимому, perccel – падежная форма существительного perc, употребляемая перед послелогом múlt).

Получаем следующий пословный перевод венгерских выражений:

2 часа 42 минуты – 3 минуты до 3-х четвертей 3-го,

2 часа 48 минут – 3 минуты после 3-х четвертей 3-го,

2 часа 11 минут – 4 минуты до четверти 3-го,

4 часа 4 минуты – 4 минуты после 4-х.

Ответ:

3 часа 3 минуты – három perccel múlt három,

3 часа 19 минут – négy perccel múlt negyed négy.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 211243

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

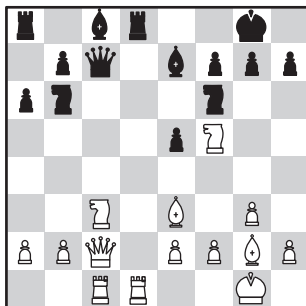
**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40**

Новый ПРЕТЕНДЕНТ

В Екатеринбурге завершился турнир претендентов, растянувшийся из-за пандемии на два года. Победителем стал российский гроссмейстер Ян Непомнящий, который в конце года сразится за титул с действующим чемпионом мира Магнусом Карлсеном. Россиянин и норвежец – ровесники (оба родились в 1990 г.), на детских турнирах Непомнящий регулярно опережал Карлсена, а в настоящее время остается одним из немногих шахматистов, имеющих положительный баланс во встречах с Магнусом. Поэтому противостояние обещает быть жарким!

Я.Непомнящий – К.Алексеев
Екатеринбург, 2021

1. c4 f6 2. g3 e6 3. g2 d5 4. f3 dc 5. a4+ b6d7 6. c4 a6 7. c2 c5 8. c3 e7. В таком варианте каталонского начала черные практически обязаны fianкеттировать ферзевого слона, поэтому сильнее 8...c7 с последующим b6 и e7. 9. 0-0 0-0 10. d4 cd? Черные упускают последний шанс развить слона – 10...b5! 11. dc e7 12. b4 a5 13. b5 e4 с примерным равенством. 11. d4 c7 12. d1 d8 13. e3 b6 14. eac1 e5 15. e5f5.



15...e5f5?! Равносильно стратегическому поражению, поскольку черные полностью уступают большую диагональ a8–h4.

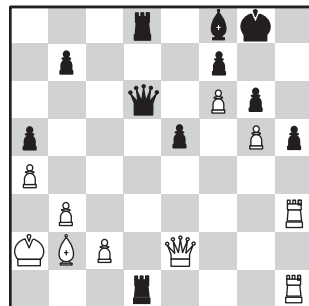
Упорнее 15...f8, на что белые могли ответить такой комбинацией: 16. e5g7! e7g7 17. b3! c4 18. d8 e3 19. f8 f8 20. fe с лишней пешкой. 16. f5 c4 17. e5g5 d1+ 18. d1 d8 19. f6 f6 20. e4 a5 21. e3 f8 22. d5 b5 (22...d5 23. d5 d5 24. c8+ с двойным ударом) 23. h7 d5 24. d5 d2 25. c4 bc 26. e4 b2 27. h8+ e7 28. c8 b6 29. c4 b5 30. c7+ d7 31. c5+, и, ввиду потери второй пешки, черные сдались.

Основным конкурентом Яна Непомнящего считался французский гроссмейстер Максим Вашье-Лаграв, с которым у российского шахматиста было равенство очков после первого круга. Однако Максим Вашье-Лаграв потерпел два поражения в партиях против Александра Грищука и Фабиано Каруаны, и двух побед на финише ему хватило лишь для итогового второго места.

А.Гришук – М.Вашье-Лаграв
Екатеринбург, 2021

1. e4 c5 2. c3 d6 3. d4 cd 4. d4 c6 5. d2 g6 6. b3 h6 7. f4 f6 8. b2 e5 9. ege2. Новинка, ранее на высоком уровне встречалось только 9. g3. В ответ на напрашивающееся 9...g4 белые наметили жертву пешки 10. 0-0-0 e2 11. e2 f4+ 12. b1 с инициативой. 9...0-0 10. 0-0-0 e6 11. b1 a5 12. a4 b6 13. h4 eac8 14. h5 h5 15. g3 b4 16. h3 h3 17. h3 e7 (перспективнее 17...f2 с разменом ферзей после 18. g4 f4 19. e1) 18. g4 f6 19. g5 h5? Необходимо было решиться на жертву 19...e4 20. e4 c2 21. e1 или 19...g4 со сложной игрой в обоих вариантах; теперь же белые получают явное преимущество, включая из игры слона черных. 20. f5 fd8 21. f6 f8 22. e3 d5

23. ed e3 24. e3 h5 25. e2 c5 26. h3 d5 27. d5 c5d5 28. d1h1 d6 29. a2 d1. Ключевая позиция. Напрашивается жертва ладьи на h5, но как играть дальше?



30. h5 gh 31. h5. Белые, вероятно, полагают, что позиция выиграна в любом случае, и не находят точного 31. h3!, после чего единственный способ избежать мата для черных – перейти в технически проигранное окончание после 31...a1+ 32. a1 d1 33. d1 d1 34. e5. 31...d4!! Блестящий ресурс, который не учли белые. 32. h1 (к вечному шаху ведет и 32. d4 a3 33. b1 d4 34. h1 a4! 35. ba b4, и 32. h2 a4! 33. ba e6 34. b1 d1+) a4+! 33. b1 d5?! Неточность, позволяющая белым перейти в эндшпиль с ферзем против двух ладей. После 33...h4! 34. h4 d1+ 35. d1 d1+ 36. a2 d2 на доске ничейная позиция. 34. h5 h1+ 35. h1 g4 36. e5 g5? Серьезная ошибка. Лучше 36...b6 или b5, теперь черные теряют пешку. 37. b7 d2 (нельзя 37...e5 из-за 38. g2+ h7 39. h2+ с двойным ударом) 38. c3 e2 39. c8 g1+ 40. b2 gg2 41. a5 c2+ 42. c2 c2+ 43. c2 h7 44. d8 g6 45. c3 f5 46. c4 e6 47. b4 d6 48. b5, и черные сдались.

А.Русанов

Уроки с физикой



Горячий душ и занавеска

Заходим в ванную комнату,
встаем под горячий душ,
и занавеска начинает
двигаться на нас,
будто атакуя. Почему?

ISSN 0130-2221 21004



9 770130 222214

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 10 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)