

ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

2021 · № 2

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





*Даны глагольные формы старописьменного японского языка
с переводами на русский язык:*

- 1 **тасукэдзарубэкарики** – он не должен был помогать
- 2 **тасукэдзарураси** – он, наверно, не помогал
- 3 **тасукэрарэсикаба** – если бы ему помогали
- 4 **тасукэсасэрарэкэри** – его заставляли помогать (давно)
- 5 **тасукэсасэки** – он заставлял помогать
- 6 **тасукэрарэтарики** – ему помогли
- 7 **тасукэтакарикэри** – он хотел помогать (давно)

Задание 1

Переведите на русский язык:

тасукэсасэрарэдзарубэкарисикаба

Задание 2

Переведите на старописьменный японский язык:

**ему помогали (давно)
если бы он хотел помогать
его, наверно, не заставляли помогать
он помог**

Из книги «Задачи лингвистических олимпиад»



КВАНТ

ФЕВРАЛЬ

2021

№2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонovich,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Десятая проблема Гильберта. *Ю.Матиясевич*
9 Тепловое расширение. *Е.Соколов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 18 Задачи М2638–М2641, Ф2645–Ф2648
19 Решения задач М2626–М2628, М2633–М2636
24 О взвешивании весов. *А.Грибалко,*
А.Заславский, О.Манжина
28 Погода в пустыне Сахара. *С.Варламов*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 31 Задачи

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика × геометрия (планиметрия)

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 34 Задачи 21–24

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 35 Где достать поляризованный свет? *М.Старшов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 37 Снова теорема Штейнера–Лемуса.
З.Дегтярева, Д.Максимов

ОЛИМПИАДЫ

- 41 XLII Турнир городов. Задачи осеннего тура
43 Региональный этап LV Всероссийской
олимпиады школьников по физике. Первый тур

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 49 Кротовые норы на льду моря. *Е.Краснова,*
В.Птушенко

- 51 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (8, 34, 36)

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к «Калейдоскопу «Кванта»
II Лингвистические задачи
III Шахматная страничка
IV Прогулки с физикой

Десятая проблема Гильберта

(К 50-летию ее решения)

Ю. МАТИЯСЕВИЧ

В 1900 ГОДУ ПРЕДСТАВИТЕЛИ многих стран собрались в Париже для участия во Втором Международном конгрессе математиков. Выдающийся немецкий математик Давид Гильберт выступил там с докладом, который назывался «Математические проблемы» [1]. Во вступительной части доклада Гильберт сказал, что, по его мнению, математика – это наука, которую двигают вперед не решенные еще задачи. Затем он перечислил 23 проблемы, решение которых, по его мнению, важно для дальнейшего прогресса математики.

Проблема под номером 10 посвящена *диофантовым уравнениям*. Эти уравнения названы в честь древнегреческого математика Диофанта Александрийского, который жил в III веке нашей эры.

Математики издавна занимались решением алгебраических уравнений. Древние греки делали это, однако, геометрически. Например, для уравнения

$$x^2 = 2 \quad (1)$$

они давали такое решение: *построить (циркулем и линейкой) квадрат со стороной 1; его диагональ и будет искомым решением уравнения* (по теореме Пифагора; рис.1).

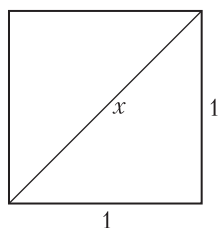


Рис. 1

(точнее, в положительных рациональных числах, ибо отрицательные числа не были ему известны). При таком ограничении

области допустимых значений неизвестных уравнение (1) решений не имеет.

В настоящее время при решении диофантовых уравнений обычно накладывают еще более сильное ограничение на область допустимых значений неизвестных, требуя решать эти уравнения в целых числах или в натуральных, т.е. положительных целых числах. Помимо внутриматематического интереса, это может быть мотивировано решаемой прикладной задачей, например, если неизвестные величины – это количества людей, необходимых для выполнения определенных работ.

Говоря о диофантовых уравнениях, наряду с ограничениями на неизвестные, также подразумевают и специальную форму самих уравнений. Мы под диофантовыми уравнениями будем понимать уравнения вида

$$A(x_1, \dots, x_m) = B(x_1, \dots, x_m), \quad (2)$$

где A и B – многочлены с целыми коэффициентами. Строчные латинские буквы у нас всегда будут использоваться для обозначения натуральных чисел.

За период, прошедший со времени Диофанта, математики нашли решения у огромного количества диофантовых уравнений, а про многие другие доказали, что решений (в целых или натуральных числах) у них нет. Для этого пришлось разработать большое количество разнообразных методов, каждый из которых применим к уравнениям очень специального вида. Ярким примером здесь может служить Великая теорема Ферма, ждавшая своего доказательства более трех столетий. Гильберт считал нужным покончить с разнородными методами решения диофантовых уравнений, найдя единый, универсальный метод,

который можно было бы применить к любому диофантову уравнению и узнать, есть ли у него решения.

В современных терминах можно сказать, что Гильберт просил найти *алгоритм* для решения диофантовых уравнений. В своей формулировке проблемы он, однако, не использовал именно это слово. Дело в том, что в то время в математике еще не было строгого определения алгоритма. Такое определение было выработано гораздо позднее, в 30-е годы XX столетия. В наши дни 10-ю проблему Гильберта можно понимать как следующую задачу: написать на каком-либо языке программирования программу, которая, получив на вход произвольное диофантово уравнение, через конечное время выдавала бы ответ, скажем, печатая число 0, если уравнение решений не имеет, и что угодно, отличное от 0, в противоположном случае.

Сегодня мы знаем, что написать такую программу нельзя. Десятая проблема Гильберта не имеет решения, которое требовал Гильберт, а доказательство этого факта считается *отрицательным решением* этой проблемы.

Неразрешимость 10-й проблемы Гильберта означает, что если мы зафиксируем некоторый язык программирования $\mathcal{Y}$, то для любой программы P на этом языке, которая гипотетически решает эту проблему, найдется конкретное диофантово уравнение

$$A_P(x_1, \dots, x_m) = B_P(x_1, \dots, x_m), \quad (3)$$

на котором программа ошибется. А именно,

- либо программа напечатает 0, а уравнение имеет решение,
- либо уравнение решений не имеет, а программа печатает нечто, отличное от нуля, или же не печатает ничего (просто остановившись или работая неограниченно долго).

Многочлены в уравнении (3) не зря имеют индекс P , они действительно должны зависеть от программы P . Невозможно указать одно «очень трудное» уравнение, для которого ни одна программа не дала бы правильный ответ. Действительно, есть две очень простые программы (одна, которая всегда печатает ноль, и другая, которая всегда

печатает единицу), и для каждого конкретного уравнения одна из этих двух программ неизбежно даст правильный ответ.

Неразрешимость 10-й проблемы Гильберта доказана в следующем сильном смысле: *можно написать программу H такую, что какова бы ни была программа P на выбранном нами языке $\mathcal{Y}$, если подать ее на вход программы H , то через конечное время программа H напечатает некоторое диофантово уравнение (3), на котором программа P ошибается* (рис.2).

Можно также написать вторую программу, которая, получив на вход программу P , напечатает формальное доказательство

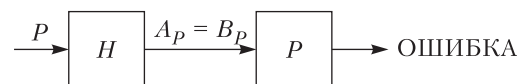


Рис. 2

того, что программа P действительно не дает правильного ответа для уравнения (3), найденного программой H .

Мы видим, что существует тесная связь между программами и диофантовыми уравнениями: программы можно преобразовывать в уравнения со специальными свойствами. Гипотезу о существовании подобной связи высказал в конце 40-х годов прошлого столетия молодой американский математик Мартин Дейвис (Martin Davis, род. в 1928 г.). Он рассматривал диофантовы уравнения с параметрами:

$$A(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = B(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m). \quad (4)$$

При одних значениях параметров $a_1, \dots, a_n$ уравнение (4) может иметь решение в неизвестных $x_1, \dots, x_m$ (принимающих целые неотрицательные значения), а при других значениях параметров решений может и не быть. Мы можем рассмотреть множество M , состоящее из тех и только тех значений параметров, для которых хотя бы одно решение существует. В символической записи это выглядит так:

$$\begin{aligned} \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in M &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_m \{ A(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = \\ &= B(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Множества, которые можно определить таким образом, Мартин Дейвис назвал *диофантовыми*, а формулы такого вида стали называться *диофантовыми представлениями* таких множеств.

Вот простые примеры диофантовых множеств:

- *множество квадратов всех натуральных чисел*, задаваемое уравнением

$$x^2 = a;$$

- *множество всех составных чисел*, задаваемое уравнением

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = a;$$

- *множество всех натуральных чисел, не являющихся степенями числа 2*, задаваемое уравнением

$$(2x_1 + 1)x_2 = a.$$

В качестве упражнения попробуйте доказать, что диофантовым является и дополнение к множеству из первого из этих трех примеров, т.е. множество всех натуральных чисел, отличных от полных квадратов. Аналогичные вопросы для второго и третьего примеров (про множество всех простых чисел и про множество всех степеней числа 2) оказались гораздо более трудными.

Для произвольного диофантова множества M , задаваемого представлением (5), можно написать несложную программу, которая будет перебирать в некотором порядке всевозможные значения параметров и неизвестных и проверять, не выполнено ли равенство (4); каждый раз, когда это произойдет, программа будет выводить на печать набор значений параметров. Работая неограниченно долго, эта программа напечатает все элементы множества M (быть может, с повторениями), и только их.

В теоретической информатике есть более общее понятие *эффективно перечислимого множества*. Для того чтобы некоторое множество было таковым, должна существовать программа, которая перечисляет все его элементы; при этом на структуру и сложность такой программы никаких ограничений не налагается. Примерами эффективно перечислимых множеств могут

служить множество всех простых чисел и множество всех степеней числа 2.

Из сказанного выше видно, что все диофантовы множества эффективно перечислимы. Это можно перефразировать так: если множество не является эффективно перечислимым, то оно не может быть диофантовым – неперечислимость множества является *препятствием* для его диофантовости. Мартин Дейвис высказал предположение, что это препятствие является единственным.

Гипотеза Дейвиса. *Каждое эффективно перечислимое множество является диофантовым.*

Иными словами, Мартин Дейвис предположил, что по каждой программе, перечисляющей элементы какого-то множества, можно найти параметрическое диофантово уравнение, задающее то же самое множество.

Гипотеза Дейвиса была очень смелой, поскольку имела много следствий, которые казались невероятными. Вот одно из них: программу, перечисляющую все простые числа, можно преобразовать в диофантово уравнение с одним параметром

$$A(a, x_1, \dots, x_m) = 0, \quad (6)$$

которое разрешимо тогда и только тогда, когда значением параметра a является простое число. Специалисты по теории чисел считали, что такого уравнения быть не может. Их скептицизм еще более возрос, когда американский математик (философ по основному образованию) Хилари Патнэм (Hilary Putnam, 1926–2016) заметил, что таким же свойством будет обладать и уравнение

$$x_0(1 - A^2(x_0, x_1, \dots, x_m)) = a \quad (7)$$

(докажите это!). Иными словами, если гипотеза Дейвиса верна, то множество всех простых чисел должно быть множеством всех положительных значений, принимаемых одним конкретным многочленом при произвольных натуральных значениях его переменных.

В 1960 году Дейвис и Патнэм почти доказали гипотезу Дейвиса. Это «почти» было вызвано двумя причинами.

Во-первых, Дейвис и Патнэм были вынуждены расширить класс рассматриваемых уравнений. А именно, они разрешили использовать при построении правых и левых частей в уравнениях (4) и (5) операции сложения, умножения и *возведения в степень*, применяемые к конкретным натуральным числам и переменным. Получающиеся при этом уравнения получили название *экспоненциально диофантовых*, а формулы вида (5) – *экспоненциально диофантовых представлений*. В экспоненциально диофантовых уравнениях использование отрицательных чисел не разрешается – объясните, почему.

Во-вторых, Дейвис и Патнэм использовали предположение, что для любого n существует арифметическая прогрессия, состоящая из n неравных простых чисел. Эта гипотеза считалась правдоподобной, но доказана была Б.Грином и Т.Тао только в 2004 году.

К счастью, Дейвису и Патнэму не пришлось ждать так долго, чтобы их доказательство избавилось от недоказанного предположения. Другой американский математик, Джулия Робинсон (Julia Robinson, 1919–1985), усилила их аргументы, и в 1961 появилась статья этих трех авторов с доказательством следующей ослабленной формы гипотезы Дейвиса.

ДПР-теорема. *Каждое эффективно перечислимое множество является экспоненциально диофантовым.*

После этого для доказательства первоначальной гипотезы Дейвиса было достаточно доказать один ее частный случай, а именно, найти трехпараметрическое диофантово уравнение, выражающее возведение в степень через сложение и умножение:

$$a = b^c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_m \{E(a, b, c, x_1, \dots, x_m) = 0\}. \quad (8)$$

Используя нужное количество копий этого уравнения с новыми неизвестными, мы можем преобразовать произвольное параметрическое экспоненциально диофантово уравнение в диофантово уравнение, разрешимое при тех же значениях параметров.

Вопрос о существовании диофантова представления возведения в степень Джулия Робинсон начала изучать еще в начале 50-х годов прошлого столетия. Первоначально она пыталась доказать, что это невозможно, но не смогла это сделать. Вместо этого она нашла достаточное условие для существования представления вида (8). Оказалось, что достаточно найти двухпараметрическое диофантово уравнение

$$J(u, v, x_1, \dots, x_m) = 0, \quad (9)$$

лишь очень отдаленно напоминающее возведение в степень. А именно, достаточно, чтобы

- для любого решения уравнения (9) было выполнено неравенство $v < u^v$,

- для любого k должно существовать решение уравнения (9), в котором $v > u^k$.

Выяснилось, что ни одно из сотен диофантовых уравнений, рассмотренных специалистами по теории чисел со времен Диофанта, не обладало обоими этими свойствами, и встала задача построить такое уравнение. Это удалось сделать автору этой статьи в 1970 году. Существенную роль при этом сыграли *числа Фибоначчи*. Они названы в честь итальянского математика Леонардо Пизанского (которого позднее стали называть Фибоначчи). В его книге, опубликованной в 1202 году, эти числа дают решение задачи о размножающихся кроликах (еще гораздо раньше, до нашей эры, числа Фибоначчи возникали при решении других задач индийскими математиками).

Числа Фибоначчи, обладающие многими замечательными свойствами, задаются рекуррентным соотношением

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k. \quad (10)$$

Но какое отношение они имеют к диофантовым уравнениям? Вы легко докажете (это сделал Ж.-Д.Кассини еще в 1680 году), что $x = F_{k+1}$, $y = F_k$ для любого k дают решение уравнения

$$(x^2 - xy - y^2)^2 = 1. \quad (11)$$

Гораздо позднее, в 1902 году, Дж.Вастилс доказал и обратное (попробуйте и вы это

сделать) – любое решение уравнения (11) состоит из двух последовательных чисел Фибоначчи.¹

Числа Фибоначчи растут примерно как экспонента – можно доказать, что

$$F_n = \frac{\varphi^n + \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad (12)$$

где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\dots$ – *золотое сечение*. Тем не менее, уравнение (11) – это не совсем то, что требовалось для выполнения условия Джулии Робинсон. Дело в том, что уравнение (11) задает множество чисел Фибоначчи, а не *последовательность* этих чисел, ибо в него не входят индексы чисел Фибоначчи, составляющих решение уравнения.

Автору этой статьи удалось построить требуемое диофантово уравнение со многими неизвестными, которое связывает число Фибоначчи с его порядковым номером. Это стало возможным благодаря найденному им следующему свойству чисел Фибоначчи:

F_n делится на F_m^2 тогда и только тогда, когда n делится на mF_m . (13)

Доказать это свойство не слишком трудно (сделайте это!) *после того, как оно сформулировано*. Удивительно то, что это красивое свойство чисел Фибоначчи было обнаружено только более чем через семь столетий после их появления в книге Фибоначчи.

Первоначальное доказательство автора было основано на одной теореме, которую ленинградский математик Николай Николаевич Воробьев (1925–1995) доказал во время войны, в 1942 году. Опубликовал же он эту теорему гораздо позднее, только в 1969 году, причем не в научном журнале, а в 3-м издании своей книги [2] из серии «Популярные лекции по математике». Таким неожиданным образом публикация, рассчитанная на школьников, внесла свой вклад в решение важной математической проблемы.

¹ Это обращение теоремы Кассини было ключом к решению одной задачи, предложенной на Международной математической олимпиаде в 1981 году [9].

Основной технический результат работы [3] таков.

Теорема. Для того чтобы v было $(2u)$ -м числом Фибоначчи, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа g, h, l, t, x, e, z , такие, что:

$$u \leq v < l, \quad (14)$$

$$l^2 - lz - z^2 = 1, \quad (15)$$

$$g^2 - gh - h^2 = 1, \quad (16)$$

$$g \text{ делится на } l^2, \quad (17)$$

$$m - 2 \text{ делится на } l, \quad (18)$$

$$m - 3 \text{ делится на } 2h + g, \quad (19)$$

$$x^2 - txu + y^2 = 1, \quad (20)$$

$$x - u \text{ делится на } l, \quad (21)$$

$$x - v \text{ делится на } 2h + g. \quad (22)$$

Не все из условий (14)–(22) являются диофантовыми уравнениями, но все они легко могут быть приведены к такому виду за счет введения дополнительных неизвестных.² Все получающиеся уравнения можно объединить в одно диофантово уравнение (как это сделать?), которое согласно (12) будет удовлетворять условию Джулии Робинсон. Построение этого уравнения и стало последним шагом в доказательстве гипотезы Дейвиса, которая теперь известна как

ДПРМ-теорема. Каждое эффективно перечислимое множество является диофантовым.

Эта теорема говорит, что два понятия, возникшие в разных разделах математики (диофантово множество из теории чисел и перечислимое множество из теоретической информатики) удивительным образом совпадают друг с другом.

Немедленным следствием ДПРМ-теоремы является неразрешимость 10-й пробле-

² Вы теперь понимаете, что условия (15) и (16) говорят, что l и g должны быть числами Фибоначчи, $l = F_i$ и $g = F_j$, причем согласно (17) j делится на iF_i . Попробуйте установить, какому рекуррентному соотношению удовлетворяют последовательные решения уравнения (20), считая m параметром, а x и y – неизвестными.

мы Гильберта. Дело в том, что давно было установлено существование перечислимого множества N натуральных чисел, дополнение которого (до множества всех натуральных чисел) перечислимым не является.³ Рассмотрим диофантово представление этого множества:

$$a \in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_m \{Q(a, x_1, \dots, x_m) = 0\}. \quad (23)$$

Если бы у нас был алгоритм, требуемый в 10-й проблеме Гильберта, то мы могли бы перечислить все элементы дополнения множества N , беря по очереди все возможные значения a и узнавая, есть ли решение у уравнения

$$Q(a, x_1, \dots, x_m) = 0. \quad (24)$$

Таким образом, имеет место неразрешимость 10-й проблемы Гильберта в следующем более сильном смысле: *уже для одного конкретного однопараметрического семейства уравнений (24) не существует алгоритма, который позволял бы по произвольному значению параметра узнать, имеет ли соответствующее диофантово уравнение решения или нет.*

Интересно отметить, что Гильберт в принципе допускал подобные «отрицательные» решения математических проблем. В своем докладе [1] он привел в качестве примера неразрешимой задачи решение алгебраических уравнений произвольной степени в радикалах, а также задачи о трисекции произвольного угла и квадратуре круга, которые нельзя решить при помощи циркуля и линейки.

Гильберт там же указал на «уверенность, которую разделяет, несомненно, каждый математик, но которую до сих пор никто не подтвердил доказательством, — уверенность в том, что каждая определенная математическая проблема непременно должна быть доступна строгому решению или в том смысле, что удастся получить

ответ на поставленный вопрос, или же в том смысле, что будет установлена невозможность ее решения и вместе с тем доказана неизбежность неудачи всех попыток ее решить». Однако дальнейшее развитие математики не оправдало этой надежды Гильберта — никто не доказал, что каждая математическая проблема допускает решение, положительное или отрицательное, а Курт Гёдель своими знаменитыми *теоремами о неполноте* (см., например, [8]) показал, что для этого не хватит средств никакой одной фиксированной логической системы.

Помимо отрицательного решения 10-й проблемы Гильберта, ДПРМ-теорема имеет много других интересных следствий, в том числе «положительных». В частности, можно явно выписать многочлен, задающий простые числа. Вот один них:

$$\begin{aligned} & (k+2) \left\{ 1 - [wz + h + j - q]^2 - \right. \\ & \quad - [(gk + 2g + k + 1)(h + j) + h - z]^2 - \\ & \quad - [2n + p + q + z - e]^2 - \\ & \quad - [16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2 + 1 - f^2]^2 - \\ & \quad - [e^3(e+2)(a+1)^2 + 1 - o^2]^2 - [(a^2 - 1)y^2 + 1 - x^2]^2 - \\ & \quad - [16r^2y^4(a^2 - 1) + 1 - u^2]^2 - [n + l + v - y]^2 - \\ & \quad - \left[\left((a + u^2(u^2 - a))^2 - 1 \right) (n + 4dy)^2 + 1 - (x + cu)^2 \right]^2 - \\ & \quad - [(a^2 - 1)l^2 + 1 - m^2]^2 - \\ & \quad - [q + y(a - p - 1) + s(2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x]^2 - \\ & \quad - [z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1) - pm]^2 - \\ & \quad - [ai + k + 1 - l - i]^2 - \\ & \quad \left. - [p + l(a - n - 1) + b(2an + 2a - n^2 - 2n - 2) - m]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Дж.Джонс, Д.Сато, Х.Вада и Д.Вьенс доказали, что множество всех простых чисел — это в точности множество всех положительных значений, принимаемых этим многочленом при целых неотрица-

³ Такое множество можно построить с помощью диагональной конструкции, аналогичной той, с которой Кантор установил несчетность множества вещественных чисел (см., например, [8]).

тельных значениях его 26 переменных. Ровно столько букв имеется в латинском алфавите, и авторы решили обойтись без нижних индексов, используя все эти буквы, включая *o* – не примите эту букву за ноль, здесь это переменная!

Указанный выше многочлен, представляющий простые числа, обладает парадоксальным свойством: он сам является произведением двух многочленов (объясните, почему такое возможно).

С основной идеей построения многочленов для простых чисел можно познакомиться по статье [4]. Доказательство неразрешимости 10-й проблемы Гильберта также доступно школьникам, серьезно интересующимся математикой. Например, они могут попробовать свои силы, решая цепочку задач, предложенных (с подсказками и решениями) в [7]. Тот, кто хочет пойти более легким путем, может прослушать лекции [6]. Старшеклассникам также доступны первые пять глав книги [5], дающие подробное доказательство ДПРМ-теоремы.

Литература

1. Проблемы Гильберта. Под ред. П.С.Александрова. – М.: Наука, 1969. <https://math.ru/lib/377>

2. Н.Н.Воробьев. Числа Фибоначчи. Популярные лекции по математике, выпуск 6. – М.: Наука, 3-е издание, 1969. https://www.mathedu.ru/text/vorobjev_chisla_fibonachchi_1984/p9/

3. Ю.В.Матиясевич. Диофантовость перечислимых множеств. – Доклады АН СССР, том 191, вып. 2, с. 279–282, 1970. <http://www.mathnet.ru/links/de8fdd3514a2645f67701f9257553c20/dan35274.pdf>

4. Ю.В.Матиясевич. Формулы для простых чисел. – «Квант», 1975, № 5. http://kvant.mccme.ru/1975/05/formuly_dlya_prostykh_chisel.htm

5. Ю.В.Матиясевич. Десятая проблема Гильберта. – М.: Наука, 1993.

6. Ю.В.Матиясевич. Десятая проблема Гильберта: что можно и что нельзя делать с диофантовыми уравнениями. – Летняя школа «Современная математика», Дубна, 2011. http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=3578

7. Ю.В.Матиясевич, Я.Абрамов, А.Я.Белов-Канель, И.А.Иванов-Погодаев, А.С.Малистов. Задача 2. Десятая проблема Гильберта. – 19-я летняя конференция международного математического Турнира городов. <https://olympiads.mccme.ru/lktg/2007/2/>

8. В.А.Успенский. Теорема Гёделя о неполноте. – Популярные лекции по математике, вып. 57: – М.: Наука, 1982. <https://math.ru/lib/plm/57>

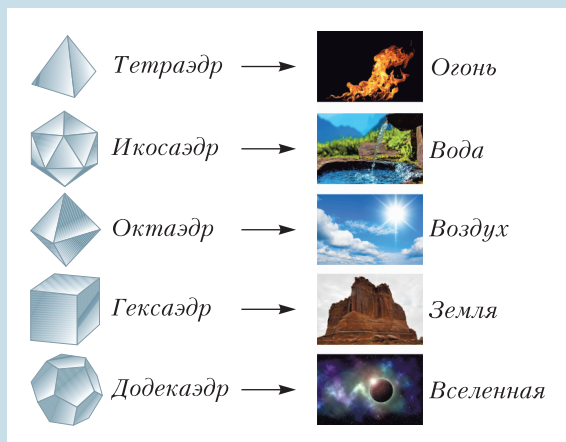
9. Задача 3 Международной математической олимпиады 1981 года. https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1981_IMO_Problems/Problem_3

НАША ОБЛОЖКА

На первой странице обложки приведена иллюстрация Леонардо да Винчи к трактату Луки Пачоли «О божественной пропорции». Представлены пять платоновых тел, входивших в число девяти правильных многогранников – объемных тел, все грани

которых одинаковые правильные многоугольники. Додекаэдр имеет 12 пятиугольных граней, икосаэдр – 20 треугольных граней, октаэдр – 8 треугольных граней, тетраэдр – 4 треугольные грани, куб (или гексаэдр) – 6 квадратных граней.

Тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени; икосаэдр, как самый обтекаемый, – воду; куб, как самая устойчивая из фигур, – землю; октаэдр – воздух. Додекаэдр символизировал весь мир и почитался главным.



Тепловое расширение

Е. СОКОЛОВ

ПРИ НАГРЕВАНИИ ТЕЛА РАСШИ-
ряются, с этим согласны все. (Из
этого правила есть важное исключение.
Вода в диапазоне от 0 °С до 4 °С при
нагревании сжимается. Благодаря этому
наши водоемы не промерзают зимой до
дна.) Многие даже могут привести форму-
лу для изменения длины стержня при
нагревании: $l = l_0 (1 + \alpha \Delta t)$. Но вот в вопро-
се о том, как изменяется при нагревании
форма тела, единодушия уже нет (рис. 1).

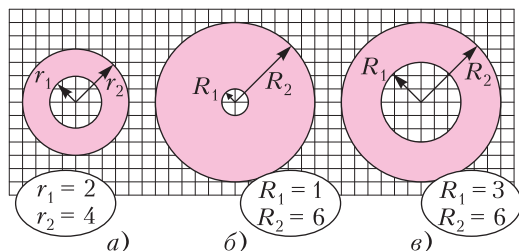


Рис. 1. Тепловое расширение кольца: а) начальная форма кольца; б и в) «разбухание» и «растяжение»

Некоторые представляют тепловое расширение как «разбухание» нагреваемого предмета во все стороны (см.рис. 1,б), а другие – как его «растяжение» во все стороны (см.рис. 1,в). Наверное, первые, когда делают рисунок, представляют себе расплывающееся чернильное пятно, а вторые – растягивающуюся во все стороны резиновую пленку. Возникает вопрос: а какая из этих картинок правильно передает изменение формы тела при тепловом расширении?

Общеизвестная формула не дает нам ответа на этот вопрос: она говорит нам только о длинах стержней и ничего не говорит о радиусах и толщинах колец. Чтобы научиться отвечать на подобные вопросы, нам надо постараться сформулировать закон теплового расширения в об-

щем виде. А именно, надо сформулировать его для такой геометрической фигуры и таким образом, чтобы результаты для колец, окружностей, треугольников и т. д. получались бы из него автоматически, как частные случаи.

Сделать это несложно. Обратимся к свойству нагретых тел, которое знакомо каждому, кто выпиливал лобзиком. Если мы в пластине, нагретой до 20 °С, вырежем тонкой-тонкой пилочкой круг, то круг легко выпадет из пластины. Это означает, что, став свободным, круг не увеличил свои размеры. И если, наоборот, мы захотим вставить его назад, то он легко вставится и полностью займет свое старое место. Иными словами, став свободным, круг и не уменьшил свои размеры. Получается, что состояние тела при заданной температуре одинаково независимо от того, было ли оно нагрето как отдельная фигура или в составе пластины. И это будет не только при температуре 20 °С, но и при 37 °С, и при 156 °С и при любых других температурах. Следовательно, *все фигуры одинаково расширяются независимо от того, нагреваются они сами по себе или в составе пластины*. Это наблюдение позволяет нам в качестве общего случая нагреваемого тела взять *бесконечную плоскость*: рисуя на ней различные фигуры, мы, зная, как передвигаются точки плоскости, всегда найдем, как передвигаются точки нарисованных фигур и как при этом изменяются их формы.

Осталась сделать последний шаг – из общеизвестного закона об увеличении длин стержней получить закон движения точек бесконечной плоскости. Это также делается несложно: любые две точки плоскости мы можем считать концами нарисованного бесконечно тонкого стержня, поэтому состояние между ними определяется формулой $l = l_0 (1 + \alpha \Delta t)$.

Это дает нам общий принцип: *при тепловом расширении расстояние между двумя любыми точками тела увеличивается в одно и то же количество раз, равное $k = 1 + \alpha \Delta t$.*

Общий принцип полностью описывает свойства теплового расширения свободных однородных пластин произвольной формы. Но прежде чем обратиться к изучению этих свойств, вернемся к нашему вопросу о характере расширения.

Посмотрите внимательно на «разбухшее» кольцо (рис. 2,а) и представьте его вставленным в бесконечную плоскость.

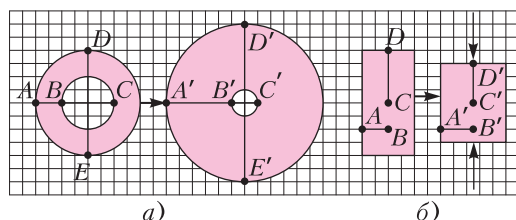


Рис. 2

Одинаково ли увеличились при «разбухании» отрезки AB , BC и DE этой плоскости? Нет, неодинаково: отрезок AB увеличился в 2,5 раза, отрезок DE увеличился только в 1,5 раза, а отрезок BC вообще сжался в 2 раза. Таким образом, мы доказали, что представление о тепловом расширении как о «разбухании» ошибочно! Конечно, правильнее представлять себе тепловое расширение как «растяжение» пленки. Это мы докажем чуть позже, а пока проверьте сами, что в «растянутом» кольце отрезки AB , BC и DE растянуты одинаково.

Упражнение 1. Найдите коэффициент линейного расширения $k = l/l_0$ этих отрезков.

А всегда ли так бывает, что при деформациях все отрезки в теле изменяются одинаково? Логического закона, запрещающего отрезкам по-разному изменяться при деформациях, конечно, нет. Например, при сжатии тела под действием вертикальных сил (рис. 2,б) вертикальные отрезки сжимаются, а перпендикулярные им горизонтальные отрезки немного расширяются. Но в этом случае для разного поведения отрезков есть веская причина, которая выделяет различные направле-

ния, это – внешняя сила. А вот для теплового расширения, как мы только что показали, все направления одинаковы.

Все точки равны!

Приступаем к выводу свойств теплового расширения, которые вытекают из общего принципа.

Свойство 1. *При тепловом расширении каждый отрезок остается отрезком.*

Если три точки A , B и C (рис. 3,а) лежат на одной прямой, то тогда и только

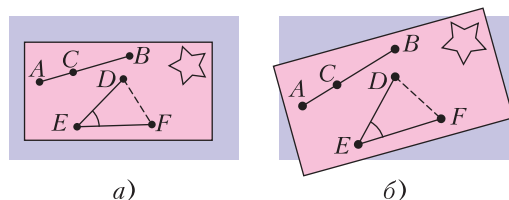


Рис. 3

тогда для трех расстояний между ними выполняется равенство $l(AB) - l(AC) - l(CB) = 0$ (треугольник ABC является вырожденным). Обозначим эти же точки в нагретом теле через A' , B' и C' . Учитывая, что все расстояния увеличиваются в одно и то же число раз (в k раз), для этой же тройки точек в нагретом теле получим аналогичное равенство: $l(A'B') - l(A'C') - l(C'B') = k(l(AB) - l(AC) - l(CB)) = 0$. Это и доказывает, что три точки, лежащие на одной прямой в холодном теле, будут лежать на одной прямой и в нагретом теле, т. е. при тепловом расширении отрезок переходит в отрезок.

Свойство 2. *При тепловом расширении сохраняются углы между отрезками.*

Пусть два отрезка DE и FE , нарисованные на поверхности холодного тела (рис. 3,а), образуют некоторый угол. Превратим эту фигуру в треугольник DEF , проведя третий отрезок DF . При тепловом расширении все стороны построенного треугольника увеличатся в одно и то же число раз, поэтому треугольник $D'E'F'$ будет подобен исходному треугольнику. А для подобных треугольников соответственные углы равны. В частности, будут равны углы, образованные исходными отрезками DE и FE и «нагретыми» отрезками $D'E'$ и $F'E'$.

Свойство 3. При тепловом расширении фигуры, нарисованные на плоскости, превращаются в подобные им фигуры.

Это свойство вытекает из двух первых свойств. Оно говорит нам, что при изменении температуры отдельные области плоскости могут перемещаться и поворачиваться (относительно внешних тел, например поверхности стола), увеличивать и уменьшать свои размеры, но их форма не изменяется. Их этого свойства также следует, что рисунок 1,в правильно иллюстрирует изменение формы кольца при тепловом расширении.

Их двух первых свойств вытекает также еще одно, самое демократичное свойство теплового расширения.

Свойство 4. Все «внутренние» наблюдатели (наблюдатели, сидящие на нагреваемой плоскости) воспринимают тепловое расширение совершенно одинаково – как изотропное расширение Вселенной. А именно, каждая видимая ими точка плоскости удаляется от них со скоростью, прямо пропорциональной расстоянию до нее.

Действительно, если наблюдатель не видит окружающего внешнего мира, например поверхности стола, на котором лежит пластина, то он не замечает ни своего сдвига относительно стола, ни своего поворота. Он видит только удаляющиеся от него точки нагреваемой пластины, углы между которыми остаются постоянными. А это и есть картина изотропного расширения Вселенной.

Обсудим теперь «внешнюю» геометрию теплового расширения, т. е. выясним, как видит тепловое расширение плоскости наблюдатель, находящийся вне пластины.

Свойство 5 (технологическое). Внешний наблюдатель может восстановить новое положение любой точки нагретого тела, если ему задано новое положение хотя бы одного отрезка. Более обобщенно – по одному отрезку и его образу можно восстановить всю картину теплового расширения.

Действительно, пусть на поверхности стола нам задан отрезок AB и его образ $A'B'$ (рис. 4,а). Построим образ произвольной точки C . Для этого соединим ее с

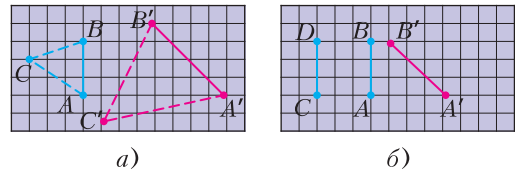


Рис. 4

концами исходного отрезка, чтобы получилась единая фигура – треугольник. Коэффициент линейного расширения нам известен (это отношение длины образа отрезка к длине самого отрезка), поэтому мы можем построить «нагретый» треугольник. А так как нам известно положение одной из его сторон (это образ исходного отрезка), то мы можем правильно разместить «нагретый» треугольник на поверхности стола. При этом полностью определяется и новое положение точки C .

Упражнение 2. На рисунке 4,б показано, как относительно поверхности стола расположен отрезок AB и его образ $A'B'$. Постройте образ отрезка CD .

Свойство 6 (параметры свершившегося теплового расширения). Свершившееся тепловое расширение имеет два универсальных параметра (они одинаковы для всех геометрических фигур): коэффициент линейного расширения k и угол поворота φ . Эти параметры однозначно определяются, если для некоторого отрезка задан его образ.

Действительно, если картина теплового расширения полностью восстанавливается по известному образу единственного отрезка, то параметры, задающие образ отрезка, являются и параметрами, полностью задающими свершившееся движение. Образ отрезка задается тремя параметрами: вектором смещения одного из концов начального отрезка, растяжением отрезка в k раз и его поворотом на некоторый угол φ . Первый параметр, вектор смещения одного из концов, не является универсальным – для каждой точки он свой (см.рис. 4), а вот два последних параметра являются одинаковыми для всех отрезков, поэтому мы можем взять их в качестве параметров свершившегося движения.

Упражнение 3. То, что коэффициент линейного расширения одинаков для всех отрезков, по-

нятно – это свойство теплового расширения закреплено в основном принципе. А вот, что угол поворота для всех отрезков одинаковый, надо доказать. Сделайте это.

Упражнение 4. Определите параметры k и φ для теплового расширения, показанного на рисунке 4,б.

Кстати, когда на некоторый угол поворачивается геометрическая фигура, на такой же угол поворачивается и каждый отрезок в ней – это очевидно. Прочитаем это свойство наоборот: если каждый отрезок бесконечной плоскости поворачивается на угол φ , то можно просто сказать, что вся плоскость поворачивается на угол φ .

Подводим итог: результирующее тепловое расширение можно представить себе как смещение одной из точек и последующие гомотетия (изотропное растяжение) и поворот относительно нее.

Все точки равны, но... одна из них самая равная!

Итак, для наблюдателей, сидящих на пластине, все точки пластины равноправны. Однако среди них есть самая-самая равная точка. Это – точка пластины, которая неподвижна относительно поверхности, на которой лежит пластина. Мы будем называть ее *неподвижной* точкой.

Упражнение 5. Докажите, что неподвижная точка всегда одна. А сколько неподвижных точек существует у «разбухшего» кольца?

Доказать, что неподвижная точка существует, можно разными способами. Например, так. Рассмотрим произвольную точку P нагреваемой плоскости. Пусть она смещается на вектор $\vec{\Delta}$. Так как все остальные точки смещаются относительно нее во все стороны, а величины их смещений изменяются от нуля до бесконечности, то всегда найдется точка, которая смещается относительно нее на вектор $(-\vec{\Delta})$. Относительно стола смещение этой точки равно нулю. Эта точка и будет неподвижной точкой. А так как неподвижная точка только одна, мы будем получать один и тот же результат, какую бы начальную точку P мы ни выбрали.

Неподвижная точка – это самая главная точка при решении задач на тепловое рас-

ширение, она позволяет от общего принципа, сформулированного для пар точек, перейти к правилу движения одной точки: *каждая точка плоскости удаляется от неподвижной точки на расстояние $\vec{\Delta r} = (k-1)\vec{r}$, после чего плоскость еще может дополнительно повернуться*. Поэтому, по сути, решение любой задачи на тепловое расширение сводится к нахождению неподвижной точки.

Упражнение 6 (для знающих геометрическую прогрессию). Найдите, на каком расстоянии от точки A (см. рис. 4,б) находится неподвижная точка. Размер клетки примите за единицу.

Первое знакомство с неподвижными точками

Задача 1. При нагревании размер внутренней полости квадрата с вырезом увеличился на $\Delta l = 4$ мм (рис. 5,а). На сколько уменьшится при нагревании до той же

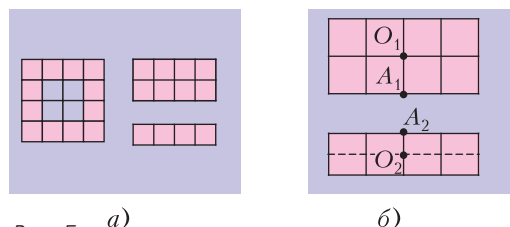


Рис. 5 а)

б)

температуры расстояние между двумя прямоугольниками, сделанными из того же самого материала?

Эту и все следующие задачи будем решать в предположении, что поверхность стола не нагревается и не испытывает теплового расширения.

Решение. Если размер полости квадрата увеличился на Δl , то сторона одного квадрата увеличилась на $\Delta a = \Delta l/2 = 2$ мм. При нагревании прямоугольников неподвижными являются их геометрические центры – точки O_1 и O_2 (рис. 5,б)). При этом отрезок O_1A_1 увеличится на Δa , а отрезок O_2A_2 – на $\Delta a/2$. Итого, расстояние между прямоугольниками *уменьшится* на величину $\Delta L = \Delta a_1 + \Delta a_2 = 3\Delta l/4 = 3$ мм.

А вот задачи посложнее. Решите их самостоятельно.

Задача 2. Известно, что тепловое расширение тел может приводить к их мед-

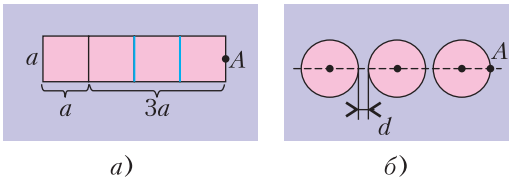


Рис. 6

ленному перемещению. Если, например, положить на ровный стол вплотную друг к другу квадратную и прямоугольную пластины (рис. 6, а) и нагреть их, то после охлаждения пластин до прежней температуры они оказываются смещенными относительно исходного положения. Определите величину результирующего смещения точки А и величину зазора, образовавшегося между пластинами, в описанном опыте. Для расчетов примите, что сторона квадрата увеличивается при нагреве на $\Delta a = 1$ мм.

Задача 3. Три диска расположены в одну линию так, что расстояния между соседними дисками равны $d = 0,5$ мм (рис. 6, б). При нагревании радиус каждого диска увеличивается на $\Delta a = 1$ мм. На сколько смещается при нагревании крайняя точка А самого правого диска?

Вы поняли, в чем состоит «хитрость» этих задач? При тепловых движениях сами тела, а с ними и их неподвижные точки могут изменяться по ходу действия. Так, в задаче 2 квадрат и прямоугольник при нагреве ведут себя как один большой прямоугольник, а неподвижной точкой при нагреве является центр этого большого прямоугольника — точка О (рис. 7, а). При охлаждении квадрат и прямоугольник сжимаются уже как отдельные фигуры, и неподвижными точками являются их индивидуальные центры (рис. 7, б). А в задаче 3, наоборот, диски сначала нагревались «индивидуально», а затем — как одно большое тело.

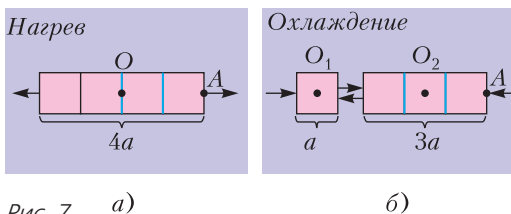


Рис. 7

Но мы возвращаемся к нашему главному вопросу. В рассмотренных трех задачах соображения симметрии сразу указывали нам на неподвижные точки. Это были геометрические центры тел правильной формы. А какое условие определяет неподвижную точку в общем случае?

Общее условие, определяющее неподвижную точку

Кажется, все очень просто — в общем случае слова «геометрический центр системы тел» следует заменить словами «центр масс системы тел». Ведь тепловое расширение тел — это результат взаимодействия его атомов. А из механики известно, что внутренние взаимодействия между частями тела не могут привести к перемещению его центра масс.

Таким образом, мы сформулировали условие нахождения неподвижной точки для абсолютно свободных тел, которые при нагревании не взаимодействуют с окружающими телами. Расширение таких тел мы могли бы наблюдать на борту межпланетной космической станции. Но хотелось бы получить аналогичное условие и для более реальных случаев, например для случаев, когда нагреваемое тело лежит на некоторой поверхности, как это было в рассмотренных задачах.

Такое тело уже нельзя назвать абсолютно свободным телом — при сдвиге его частей на эти части действуют силы трения. Но у него есть одно свойство, которое делает его очень похожим на абсолютно свободное тело, — оно все-таки может выполнить свободное тепловое *расширение* (деформацию, подчиняющуюся основному принципу), если выберет подходящую неподвижную точку. Будем называть такие тела *квазисвободными*¹.

¹ Квази (от лат. quasi) — почти, якобы, словно. Квазiterмины — рабочие понятия профессиональных физиков (квазинейтральность, квазиравновесие, квазичастицы и т.д.). У этих понятий есть одна особенность — «они не очень-то по душе уму, воспитанному на математической логике» (М. Планк). Так что работе с такими понятиями надо специально учиться.

Для того чтобы найти критерий, определяющий неподвижную точку для квазисвободных тел, рассмотрим для примера Y-образную конструкцию, состоящую из трех равных невесомых стержней, составляющих между собой углы 120° , на концах которых закреплены материальные точки одинаковой массы m (рис. 8, а). А чтобы

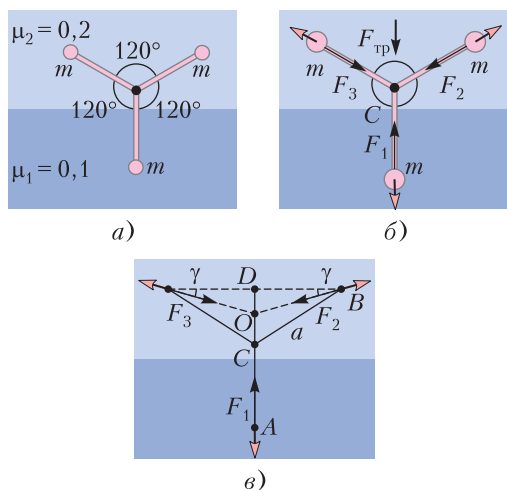


Рис. 8

частично убрать симметрию, поставим эту конструкцию на плоскость, нижняя часть которой обладает коэффициентом трения $\mu_1 = 0,1$, а верхняя — $\mu_2 = 0,2$.

Начнем нагревать стержни, и пусть сначала тепловое расширение идет так, что центр масс этой конструкции, точка C , остается на месте (рис. 8, б). Тогда скорости грузов на концах стержней будут направлены от этой точки, а силы трения, действующие на них со стороны поверхности, — на точку C . Если бы все коэффициенты трения были одинаковые, то сумма всех сил трения была бы равной нулю. Но в нашем случае это не так, и результирующая сил трения будет равна $F_{тр} = (\mu_2 - \mu_1)mg$. Поэтому центр масс нашей конструкции начнет двигаться с ускорением $a = F_{тр}/(3m) = 1/3 \text{ м/с}^2$. Немного, но через две минуты наша конструкция будет двигаться быстрее гоночного автомобиля, а через семь часов нагрева — быстрее спутника. Фантастика!

Конечно, этого не происходит. А происходит вот что: как только центр масс системы начал двигаться, скорости всех

материальных точек начали изменяться, а с ними стали изменяться и направления сил трения. И они будут изменяться до тех пор, пока сумма всех сил трения, действующих на части тела, не станет равной нулю.

Это и есть критерий нахождения неподвижной точки для квазисвободных тел: неподвижной точкой квазисвободного тела является такая точка, для которой сумма всех сил трения, действующих на части тела, удаляющиеся от нее, равна нулю.

Испробуем этот критерий на конкретных задачах.

Задача 4. Найдите положение неподвижной точки Y-образной конструкции (см. рис. 8, а). Чему будут равны смещения каждой материальной точки этой конструкции, если удлинение стержней составляет $\Delta a = 1 \text{ мм}$?

Решение. Пусть неподвижной точкой этой конструкции является точка O , которая видна из точки B под углом γ (рис. 8, в). Тогда равнодействующая всех сил трения, действующих на конструкцию, будет равна $F_{тр} = \mu_1 mg - 2\mu_2 mg \sin \gamma$. Приравнявая ее нулю, получаем $\sin \gamma = \mu_1/(2\mu_2) = 1/4$. Теперь мы можем найти длину отрезка DO : она равна $OD = BD \tan \gamma = \sqrt{5}a/10$, где a — длина стержней конструкции.

Определим теперь смещения каждой материальной точки. Вложим нашу конструкцию в бесконечную плоскость и воспользуемся тем, что все отрезки этой плоскости удлиняются одинаково ($k = 1 + \Delta a/a$).

Для отрезка $OB = 2\sqrt{5}a/5$ (его удлинение есть смещение точки B) получаем $\Delta l_B = (k - 1) \cdot OB = 2\sqrt{5}\Delta a/5 = 0,89 \text{ мм}$. А для отрезка $OA = (15 - \sqrt{5})a/10$ (его удлинение равно смещению нижней точки) получаем $\Delta l_A = (15 - \sqrt{5})\Delta a/10 = 1,28 \text{ мм}$.

Задача 5. А чему были бы равны смещения всех точек в предыдущей конструкции (см. рис. 8), если бы масса нижнего груза была в пять раз больше массы каждого из верхних грузов?

Задача 6. Прямоугольную пластину кладут на границу раздела двух горизон-

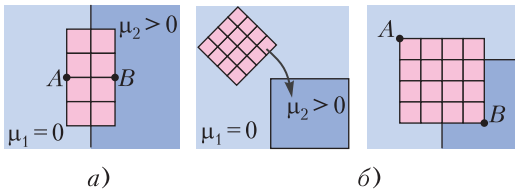


Рис. 9

тальных плоскостей так, что линия раздела плоскостей проходит ровно посередине пластины (рис. 9, а). Левая полуплоскость гладкая ($\mu_1 = 0$), правая плоскость шершавая ($\mu_2 > 0$). Пластину нагревают так, что ее боковой размер (расстояние между точками A и B) увеличивается на $\Delta a = 1$ мм. Найдите смещения точек A и B при условии, что увеличение размеров пластины гораздо меньше ее размеров. А каковы были бы смещения этих точек при фантастическом расширении пластины, например при увеличении ее размеров в 16 раз?

Задача 7. На прямой угол, образованный гладкой ($\mu_1 = 0$) и шершавой ($\mu_2 > 0$) плоскостями, кладут квадратную пластину (рис. 9, б). При нагревании размер пластины увеличивается на $\Delta a = 1$ мм. На сколько смещаются при этом вершины квадрата – точки A и B? Задачу решите в предположении, что увеличение размеров пластины гораздо меньше ее размеров.

Упоры

Движения тел при тепловом расширении становятся более разнообразными, если на их пути встречаются упоры. Упорами мы будем называть такие преграды, которые некоторым образом ограничивают движение тела, однако оставляют ему возможность выполнить свободное тепловое расширение.

Задача 8. Квадратную пластину, лежащую на ровной поверхности стола (рис. 10, а), ограничивают с боков упоры Γ_1 и Γ_2 (гвоздики). После этого пластину нагревают. Когда пластина остынет до прежней температуры, она оказывается смещенной относительно исходного положения. Определите величину результирующего смещения крайней

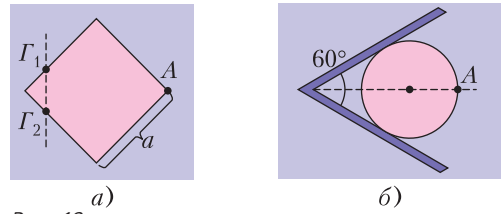


Рис. 10

точки пластины – точки A. Для расчетов примите, что сторона квадрата увеличивается при нагреве на $\Delta a = 1$ мм и что трение в точках контактов пластины и гвоздиков отсутствует.

Задача 9. Решите аналогичную задачу для диска, движение которого ограничено двумя упорами, составляющими угол 60° (рис. 10, б). Считайте, что радиус диска при нагревании увеличился на $\Delta a = 1$ мм.

Бывает, что наличие упоров приводит не только к смещению, но и к повороту тела!

Задача 10. Квадратную пластину закрепляют на оси Γ_1 , проходящей рядом с серединой нижней стороны, а рядом с серединой боковой стороны вбивают упор Γ_2 (рис. 11, а). На какой угол повернется пластина при нагреве, если известно, что ее размеры увеличиваются при нагревании на 0,2%? Трение между пластиной, осью и упором отсутствует.

Решение. Упор Γ_2 делает невозможным простое расширение пластины – боковая сторона «наезжает» на него (рис. 11, б). Однако если пластина немного повернется (рис. 11, в), то расширение станет возможным.

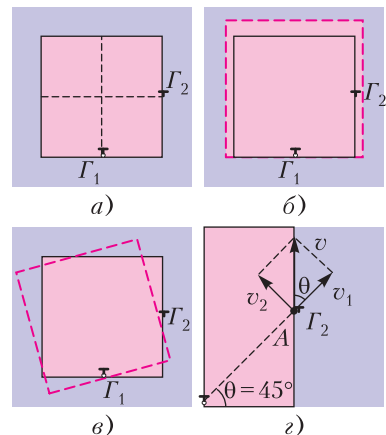


Рис. 11

Таким образом, чтобы выполнить расширение, пластина должна одновременно с расширением поворачиваться. В результате одновременного выполнения пластиной двух этих движений боковая сторона ползет вдоль упора G_2 , касаясь его, но не «наезжая» на него. При таком движении скорость $\vec{v}$ точки A боковой поверхности, которая касается упора, направлена вдоль боковой стороны (рис. 11,з). Эта скорость складывается из двух составляющих: скорости $\vec{v}_1$, возникающей за счет расширения пластины, и скорости $\vec{v}_2$, возникающей за счет поворота пластины. Отметим интересный факт: так как обе составляющие скорости точки A прямо пропорциональны расстоянию от нее до неподвижной точки G_1 , их отношение $\Omega = v_1/v_2 = \text{ctg } \theta$ есть константа и эта константа, в силу равноправности всех точек при тепловом расширении, одинакова для всех точек тела. Величину Ω можно было бы назвать «закрученностью» нашей маленькой Вселенной под названием «Нагреваемый квадрат». В нашем случае $\theta = 45^\circ$ и $\Omega = 1$.

Ну а теперь ответ. При небольших смещениях отношение скоростей можно считать постоянным. Переноса его со скоростей на смещения $\Delta l = \Omega \Delta a$, здесь Δl — длина дуги, пройденная точкой, для угла поворота получим $\Delta \varphi = \Delta l/a = \Omega \Delta a/a = 0,002 \text{ рад} = 7'$.

Силы при тепловом расширении

Итак, мы видели, что если есть упоры, то тело вынуждено выполнять те ограничения, которые они накладывают на его движение. Но без ответа вмешательство в тепловое движение тела не остается — тело давит на упоры, стремясь избавиться от навязываемых ему ограничений. Нам, знающим «микроскопическую» картину взаимодействия участков пластины с поверхностью, на которой она лежит, уже вполне по силам установить, как изменяются суммарные силы и моменты, действующие на пластину со стороны подложки, при переходе от одного движения к другому. Попробуйте свои силы при решении следующих задач.

Задача 11. С какими силами пластина из предыдущей задачи давит на упоры G_1 и G_2 при нагревании? Известно, что в отсутствие второго упора (гвоздика G_2) при обычном тепловом расширении пластина давит на первый упор (гвоздик G_1) с силой $F_1 = 2H$, а если бы мы захотели просто повернуть пластину относительно оси G_1 , прикладывая силу к середине боковой стороны, то нам пришлось бы давить на пластину с силой $F_2 = 3H$. Напоминаем, что по условию предыдущей задачи трение об упор G_2 отсутствует.

Задача 12. Из одного листа меди вырезают две пластины разной формы (рис. 12). Их по очереди кладут на ров-

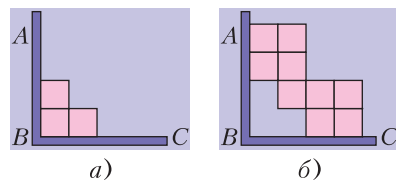


Рис. 12 а) б)

ную горизонтальную поверхность вплотную к упорам AB и BC и нагревают. Известно, что «простой уголок» при тепловом расширении давит на каждый из упоров с одной и той же силой $F_1 = 6H$. С какой силой давит на каждый упор «сложный уголок»? Трение между боками пластин и упорами отсутствует.

Задача 13. Из одного листа меди вырезают четыре пластины разной формы. Их по очереди кладут на ровную горизонтальную поверхность вплотную к упорам A и B и нагревают. Известно, что при этом «уголок» (рис. 13,а) давит на

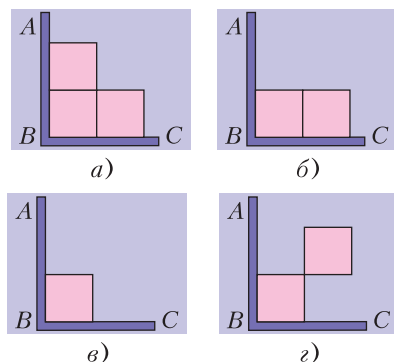


Рис. 13 а) б) в) г)

каждый из упоров с одной и той же силой $F_1 = 61\text{Н}$, «прямоугольник» (рис. 13,б) давит на упор АВ с силой $F_2 = 51\text{Н}$, а на упор ВС с силой $F_3 = 31\text{Н}$. С какой силой давит на каждый упор «маленький квадрат» (рис. 13,в)? С какой силой давит на каждый упор «двойной квадрат» (рис. 13,г)? Трение между боками пластин и упорами отсутствует.

Неизотропное тепловое расширение

Если вы решили две предыдущие задачи, то, несомненно, вы научились мысленно разрезать геометрические фигуры и складывать из них новые. Это умение вам очень пригодится при решении нашей последней задачи.

Задача 14. Квадратная пластинка, сделанная из анизотропного материала, при нагревании до некоторой температуры расширяется в вертикальном направлении на 15,4%, а в горизонтальном направлении на 2,2%. На рисунке 14,а направле-

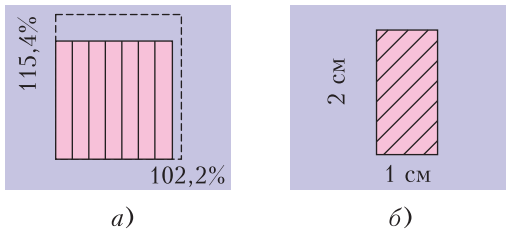


Рис. 14

ние наилучшего расширения материала показано прямыми линиями. Из этой пластинки вырезают прямоугольную пластину таким образом, что направление наилучшего расширения составляет угол 45° с основанием пластины, и нагревают ее до той же температуры (рис. 14,б). На сколько процентов увеличатся при нагреве длины боковых сторон прямоугольной пластины? На сколько процентов увеличится площадь пластины?

Указание. Анизотропными называются материалы, у которых физические свойства разные в разных направлениях.

Заключение

Мы вполне допускаем, что после прочтения статьи у вдумчивого читателя могут возникнуть законные вопросы.

—Вы знаете, я не сомневаюсь в правильности полученных выше ответов. Но вот та логика, которую вы использовали при решении задач, кажется очень необычной. В ваших задачах неодушевленные пластины сами выбирают неподвижные точки, неподвижный упор приводит во вращение расширяющийся квадрат, скорости порождают силы и эти силы направлены против скоростей. Все это очень непохоже на наш обычный Мир. Это не Мир Ньютона, в котором силы порождают изменения скоростей. Это и не Мир Аристотеля, в котором силы порождают скорости, направленные по силам. Это совсем иной Мир.

— Вы правы, в наших рассуждениях многое было непривычным. Но в них нет ошибок. Представьте себе механический кукольный театр, сделанный искусным механиком. Куклы в этом театре движутся, танцуют, встречаются и расстаются. Движение кукол управляется десятком пружин и стержней, спрятанных мастером за декорациями. И, конечно, если мы взглянем в работу механизма, то найдем здесь и законы Ньютона, и закон Гука, и наши обычные рассуждения. Но мы, люди, обладаем и иной способностью. Мы можем забыть о механизмах и видеть перед собой только героев увлекательной пьесы, прекрасных дам и галантных кавалеров, которые живут по своим собственным законам. По законам, которые мы не найдем в механике, но которые мы очень часто находим в жизни.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2638, M2639б, M2640, M2641 предлагались на V Олимпиаде мегаполисов.

Задачи Ф2645–2648 предлагались на Региональном этапе LV Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи M2638–M2641, Ф2645–Ф2648

M2638. Существует ли целое положительное число n такое, что все его цифры (в десятичной записи) больше 5, а все цифры числа n^2 меньше 5?

Н. Агаханов

M2639. а) В пустой таблице 2^{100} строк и 100 столбцов. Алиса и Ева по очереди заполняют пустые клетки первой строки таблицы; Алиса ходит первой. Каждым ходом игрок выбирает пустую клетку и ставит в нее крестик или нолик. После того как в первой строке не остается пустых клеток, игроки переходят ко второй строке и так далее (в каждой новой строке Алиса ходит первой). Игра заканчивается, когда все строки заполнятся. Алиса хочет, чтобы различных строк в таблице было как можно больше, а Ева – как можно меньше. Сколько различных строк будет в таблице, если обе будут действовать наилучшим для себя образом? б) Та же игра, но Алиса ставит только крестики, а Ева – нолики.

Д. Афризов

M2640. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ (рис.1). Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 – точки пересечения пар диагоналей BD и CE , CE и DA , DA и EB , EB и AC , AC и BD соответственно. Докажите, что если четыре из пяти четырехугольников

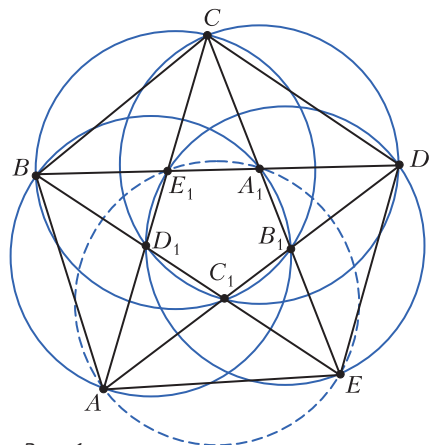


Рис. 1

$AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E, EA_1E_1A$ вписанные, то и пятый тоже вписанный.

Н. Седракан, Ю. Тихонов

M2641. Дано целое число $n > 1$. Монетный двор выпускает монеты n различных номиналов $a_1, a_2, \dots, a_n$, где каждый номинал a_i – целое положительное число (количество монет каждого номинала не ограничено). Множество номиналов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ назовем *удачным*, если сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ можно набрать монетами ровно одним способом (а именно, взяв по одной монете каждого номинала).

а) Докажите, что существует такое удачное множество номиналов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,

что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < n \cdot 2^n.$$

б) Докажите, что для любого удачного множества номиналов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > n \cdot 2^{n-1}.$$

И. Богданов

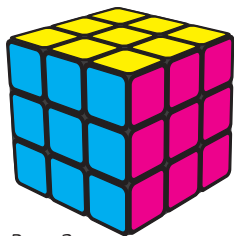


Рис. 2

Ф2645. Кубик Рубика с ребром a не имеет пустот и сложен из одинаковых кубиков плотностью ρ_1 с ребром $a/3$. Если все мелкие кубики, не видимые на рисунке 2, заменить на другие, такие же по размеру, но с плотностью ρ_2 , то средняя плотность кубика Рубика увеличится в $n = 3$ раза. Чему равно отношение плотностей ρ_2/ρ_1 ?

С.Кармазин

Ф2646. Два одинаковых однородных рычага массой $m = 7$ кг и длиной 80 см каждый шарнирно соединены с помощью легкого стержня и нитей, между которыми подвешен груз с такой же массой m (рис.3).

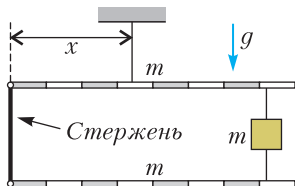


Рис. 3

Определите, на каком расстоянии x от левого края верхнего стержня находится точка крепления нити, удерживающей систему в равновесии, чему равны силы натяжения всех трех нитей и сила, действующая со стороны шарнира на верхний стержень. Для удобства на рисунке стержни размечены на 8 равных частей. Точка крепления самой верхней нити к рычагу изображена условно, $g = 10$ Н/кг.

М.Замятнин

Ф2647. Пять пружинок соединены так, как показано на рисунке 4, и в исходном состоянии ни одна из них не деформирова-

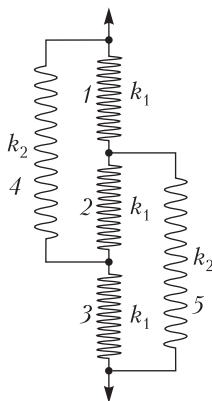


Рис. 4

на. Коэффициенты жесткости трех пружин равны k_1 , а двух оставшихся — k_2 .

1) Чему равен эффективный коэффициент жесткости системы пружин?

2) Систему растягивают, прикладывая к ее концам одинаковые силы. При каком соотношении k_1 и k_2 пружина 2 окажется сжатой?

А.Аполонский

Ф2648. Лодка переплывает реку по прямой, перпендикулярной берегам. Ее скорость относительно воды равна v_0 . До середины реки скорость течения изменяется по закону $u = \alpha x$ от нуля до $v_0/2$ — скорости воды на середине реки, где α — известный коэффициент, x — расстояние от берега. После середины реки скорость уменьшается до нуля у другого берега по тому же закону. Определите зависимость от времени угла между вектором скорости лодки относительно воды и направлением движения относительно берега. Через какое время лодка окажется на другом берегу?

А.Уймин

Решения задач М2626–М2628, Ф2633–Ф2636

М2626. На межгалактическую олимпиаду съехалось бесконечное количество участников, которых зарегистрировали под номерами 1, 2, 3, ... Оказалось, что при каждом $n = 1, 2, \dots$ участник с номером n имеет не менее n друзей среди оставшихся участников (дружба взаимна). Имеется гостиница для проживания участников с бесконечным количеством двухместных номеров. Докажите, что участников можно расселить в двухместные номера так, чтобы в каждом номере оказалась пара друзей.

На первом шаге заселения для участника 1 найдем его друга с наименьшим номером и заселим их в один номер. Далее на шаге k рассмотрим участника с номером k : если

он уже поселен на одном из предыдущих шагов, то ничего не делаем и переходим к следующему шагу; иначе среди друзей участника k выбираем еще не поселенного друга с наименьшим номером m и селим их в один номер (понятно, что должно быть $m > k$, так как участники с номерами, меньшими k , уже поселены на предыдущих шагах).

Ясно, что указанный алгоритм даст нужное расселение, если только каждый раз на k -м шаге для еще не поселенного участника k хотя бы один из его друзей будет также не поселен. Докажем, что это условие будет выполнено. Рассуждаем от противного: пусть на k -м шаге условие нарушилось. Рассмотрим участника k и пусть $m_1, m_2, \dots, m_s$ — номера всех его друзей, большие k (хотя бы один такой друг есть, так как у участника k хотя бы k друзей; заметим также, что s конечно, так как до k -го шага поселено конечное множество людей). Предположим, $m_1, m_2, \dots, m_s$ уже поселены соответственно с участниками $l_1, \dots, l_s$ на предыдущих шагах, так что $l_i < k$. Тогда участник l_i не дружит с k , иначе на шаге l_i его бы поселили не с участником $m_i > k$ (а поселили бы с другом с меньшим номером, таков, например, участник k). Таким образом, у участника k есть хотя бы s НЕдрузей среди участников $1, 2, \dots, k-1$ и s друзей среди участников $k+1, k+2, \dots$, итого у него не более $(k-1-s) + s = k-1$ друзей. Противоречие.

В.Брагин, П.Кожевников

М2627. Дана бесконечная арифметическая прогрессия. Рассматриваются произведения пар ее членов. Докажите, что произведения в каких-то двух различных парах отличаются не более чем на 1.

Возможно, домножая прогрессию на -1 и отбрасывая некоторое конечное количество начальных членов прогрессии, сведем к ситуации, когда прогрессия не убывает и состоит из неотрицательных чисел. Пусть она имеет вид $a_0, a_1, a_2, \dots$, где $a_0 = a \geq 0$ и разность $d = a_k - a_{k-1} \geq 0$.

Зададимся большим натуральным N и рассмотрим произведения вида $a_m a_n$, где $0 < m < n$ и $mn \leq N$.

Оценим сверху каждое такое произведение. Поскольку $mn + 1 - m - n = (m-1)(n-1) \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} a_m a_n &= (a + md)(a + nd) = \\ &= a^2 + ad(m+n) + d^2 mn \leq \\ &\leq a^2 + ad(mn+1) + d^2 mn \leq \\ &\leq a^2 mn + 2admn + d^2 mn. \end{aligned}$$

Таким образом, значение каждого такого произведения меньше cN для некоторой константы $c > 0$ (можно положить $c = a^2 + 2ad + d^2$).

С другой стороны, оценим (будет достаточно грубой оценки) снизу количество указанных произведений, т.е. количество пар $0 < m < n$ с условием $mn \leq N$, при этом для удобства будем рассматривать N вида $x!$ при $x \geq 5$. Для каждого $m \in \{1, 2, \dots, x\}$ число n может принимать значения $m+1, m+2, \dots, x!/m$. Количество таких значений не меньше $x!/m - m > x!/(2m)$ (последнее неравенство верно, так как $x! > 2x^2 \geq 2m^2$ при $x \geq 5$). Суммируя по $m \in \{1, 2, \dots, x\}$, получаем, что нужно количество пар не меньше чем $x!/2 \cdot (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/x) = N/2 \cdot (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/x)$. Зададимся произвольным числом $Z > 0$. Как известно, можно выбрать натуральное x такое, что $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/x$ будет больше наперед заданного числа; выберем x так, чтобы указанная сумма была больше $2Zc$. Тогда на отрезке $[0; cN]$ у нас расположено более ZcN значений сумм, значит, разность между какими-то двумя (соседними на числовой прямой) значениями не превосходит $cN/(ZcN) = 1/Z$.

А.Кузнецов

М2628*. Решение этой задачи см. в статье А.Грибалко, А.Заславского, О.Манжиной «О взвешивании весов».

Ф2633*.¹ Математический маятник установлен на вращающейся горизонтальной платформе (рис.1). Подвес маятника выполнен из тонкого и очень легкого стержня длиной l , диаметр шарика на-

¹ Автор решений задач Ф2633–Ф2636 – А.Власов.

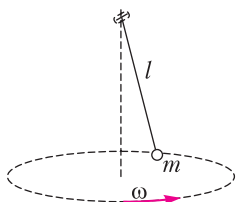


Рис. 1

много меньше длины подвеса, а его масса равна m . Точка подвеса находится на вертикальной оси вращения платформы и выполнена в виде цилиндрического шарнира. Определите период

малых колебаний маятника в широком интервале угловых скоростей вращения платформы, а также верхнюю границу интервала малых угловых скоростей.

Период колебаний определим энергетическим методом. Для этого перейдем в систему отсчета, связанную с вращающейся платформой. В этой системе отсчета (в соответствии с постулатом эквивалентности общей теории относительности) существует цилиндрическое «псевдогравитационное» поле. Потенциальная энергия шарика маятника в этом поле определяется формулой

$$U(r) = -m\omega^2 \frac{r^2}{2},$$

где $r = l \sin \varphi$, φ – угловая амплитуда колебаний. Полная механическая энергия колеблющегося маятника равна

$$E = ml^2 \frac{(\varphi')^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) - m\omega^2 \frac{l^2 \sin^2 \varphi}{2}.$$

При малых амплитудах колебаний потенциальные слагаемые преобразуется к квадратичному виду (поскольку $1 - \cos \varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}$, $\sin \varphi \approx \varphi$), в итоге получаем

$$E = ml^2 \frac{(\varphi')^2}{2} + mgl \frac{\varphi^2}{2} - ml^2 \omega^2 \frac{\varphi^2}{2} = ml^2 \frac{(\varphi')^2}{2} + mgl \left(1 - \frac{l\omega^2}{g}\right) \frac{\varphi^2}{2}.$$

Коэффициенты $ml^2 = \alpha$ – коэффициент инертности и $mgl \left(1 - \frac{l\omega^2}{g}\right) = \beta$ – коэффициент упругости колебательной системы определяют период колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \left(1 - \frac{l\omega^2}{g}\right)}}.$$

Из этой формулы следует наличие верхней границы области медленных вращений платформы, при которых траектория маятника пересекает вертикальную линию оси вращения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Эта частота совпадает с собственной частотой маятника при отсутствии вращения. Формально при такой частоте вращения период колебаний маятника равен бесконечности.

При скорости вращения платформы больше ω_0 систему можно назвать коническим маятником. Шарик маятника, отклоненного на некоторый угол, вращается по окружности с постоянной скоростью. Если теперь маятнику сообщить небольшой импульс ортогонально стержню подвеса, то маятник будет совершать колебания относительно равновесной динамической траектории (окружности). На рисунке 2 показаны такие колебания, в предположении, что их частота выше частоты вращения платформы. Определим период таких колебаний.

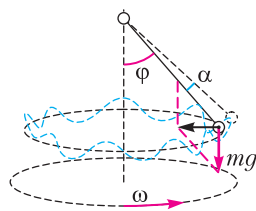


Рис. 2

Величина равновесного угла отклонения определяется динамическим уравнением движения по окружности:

$$mgtg \varphi = m\omega^2 l \sin \varphi, \text{ или } \cos \varphi = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Записываем энергию системы при колебаниях:

$$E = ml^2 \frac{(\alpha')^2}{2} + mgl(1 - \cos(\varphi + \alpha)) - m\omega^2 \frac{(l \sin(\varphi + \alpha))^2}{2}.$$

Можно показать, что коэффициенты инертности и упругости определяются вторыми производными, значения которых вычислены в точках равновесия: $\alpha = E''_{\alpha\alpha}|_{\alpha, \alpha'=0}$, $\beta = E''_{\alpha\alpha}|_{\alpha, \alpha'=0}$. В нашем случае

$$\alpha = ml^2,$$

$$\beta = mgl \cos \varphi - m\omega^2 l^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

или, после подстановки значения равновесного угла,

$$\alpha = ml^2, \beta = m\omega^2 l^2 \left(1 - \left(\frac{g}{l\omega^2} \right)^2 \right).$$

Теперь можно получить значение периода колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{g}{l\omega^2} \right)^2}}.$$

Из полученной формулы видно, что период «возмущенных» колебаний всегда больше периода вращения платформы (картинку колебаний на нашем рисунке 2 следует скорректировать).

Ф2634. Тонкое упругое кольцо удерживают на поверхности усеченного конуса так, как это показано на рисунке 1. В

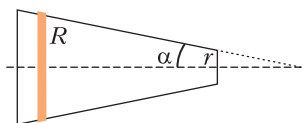


Рис. 1

недеформированном состоянии внутренний радиус кольца равен малому радиусу конуса. Кольцо освобождают. Определите время соскальзывания кольца с конуса. Масса кольца m , коэффициент упругости единицы длины кольца k , угол при вершине конуса α , коэффициент трения между поверхностями кольца и конуса $\mu < \operatorname{tg}(\alpha)$. Гравитацией пренебречь.

Начало координат помещаем в центр малого сечения конуса. Радиус деформированного кольца как функция его горизонтальной координаты x равен

$$R = r - x \operatorname{tg} \alpha.$$

Сила натяжения кольца равна

$$T = \frac{k}{2\pi r} \cdot 2\pi(R - r) = k \left(\frac{R}{r} - 1 \right).$$

Линейное давление на поверхность конуса равно

$$n = \frac{T}{R}.$$

Геометрия действующих сил показана на

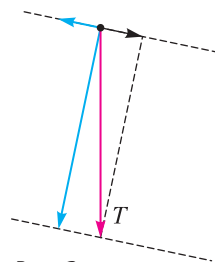


Рис. 2

рисунке 2. Запишем уравнение динамики для кольца:

$$mx'' = \left(\frac{T}{R} \sin \alpha - \mu \frac{T}{R} \cos \alpha \right) \cos \alpha \cdot 2\pi R,$$

или, после преобразования (с учетом выражения $R = r - x \operatorname{tg} \alpha$),

$$x'' = -2\pi \frac{k}{mr} \sin \alpha \cdot (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot x.$$

Получили уравнение гармонических колебаний. Кольцо покидает конус за время, равное четверти периода «псевдоколебаний»:

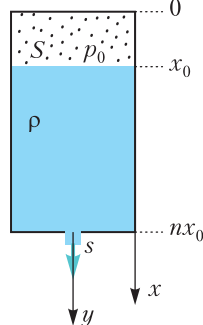
$$\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mr}{2\pi k \sin \alpha \cdot (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m}{K \sin \alpha \cdot (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}},$$

где $K = k/(2\pi r)$. При отсутствии трения и малых углах

$$\tau = \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

Пусть $m = 0,1$ кг, $K = 2,5$ Н/м, $\alpha = 0,01$ рад. В этом случае $\tau = 5$ с. Время не зависит от величины смещения.

Ф2635. Цилиндрический бак содержит жидкость и газ (см. рисунок). В некото-



рый момент времени кран, закрывающий сливное отверстие в дне бака, открывается и сжатый газ «выдавливает» жидкость из бака. Такой процесс возможен во многих ситуациях: от продувки балластных емкостей на подводных лодках до

сброса резервного топлива на самолетах. За какое время произойдет освобождение бака от жидкости? Как изменится это время, если начальное давление газа увеличить в 4 раза? Считайте известными следующие величины: $\alpha = S/s$ – отношение площадей сечения бака и сливного отверстия, p_0 – начальное давление газа, x_0 – начальная высота газового столба, n – вертикальный размер бака в единицах x_0 , ρ – плотность жидкости. Расширение газа считайте изотермическим, а внешнее давление примите равным нулю. Вязкостью жидкости и гравитацией пренебречь, бак закреплен.

Записываем энергетическое соотношение, уравнение связи и «следствие» уравнения изотермы для давления газа:

$$pSdx = \rho dy \cdot s \frac{v^2}{2}, \text{ где } v = \frac{dy}{dt},$$

$$dx \cdot S = dy \cdot s,$$

$$p_0 x_0 = p x.$$

После преобразования энергетическое уравнение принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{\frac{2p_0}{\rho} \cdot \frac{x_0}{x}}.$$

Уравнение легко интегрируется, и для времени освобождения бака получаем

$$t = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{\rho}{2p_0 x_0}} \int_{x_0}^{nx_0} \sqrt{x} \cdot dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \alpha \sqrt{\frac{\rho}{p_0}} \cdot x_0 (n^{3/2} - 1).$$

Отсюда видно, что при увеличении давления в 4 раза время «продувки» уменьшается в 2 раза.

Ф2636*. Ученик, который успешно перешел в 11 класс, летом на даче развлекался следующим образом. Он из большой бочки и других подручных материалов изготовил необычный термометр. Схема этого простого изобретения представлена на рисунке 1. В герметичной бочке находится вода. Высота столбика воды в прозрачной трубке зависит от температуры. Определите чувствительность такого термометра в диапазоне летних и осенних температур 10–40 градусов

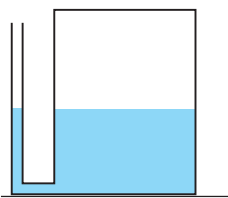


Рис. 1

Цельсия. Внутренний диаметр трубки значительно меньше внутреннего диаметра бочки. При решении задачи вам не обойтись без таблицы зависимости давления насыщенных паров воды от температуры:

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	50
$p, \text{мм рт.ст.}$	4,58	9,21	17,54	31,82	55,32	92,5

Записываем уравнение равновесия давлений, когда сумма давлений воздуха и насыщенных водяных паров в бочке равна внешнему атмосферному давлению с добавкой гидростатического давления водяного столба воды в трубке:

$$p_b + p_n = p_a + \rho g h.$$

Отсюда находим

$$h = \frac{1}{\rho g} (p_b + p_n - p_a).$$

Дифференцируем это соотношение по температуре (при постоянном атмосферном давлении):

$$\frac{dh}{dT} = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{dp_b}{dT} + \frac{dp_n}{dT} \right).$$

Чувствительность самодельного термометра имеет две составляющие: воздушную и паровую. Если считать объем паровоздушной смеси постоянным, то, используя для воздуха уравнение идеального газа

$$p_b = \frac{\nu R}{V} T, \text{ получаем}$$

$$\frac{dp_b}{dT} = \frac{\nu R}{V} = \text{const.}$$

Для определения температурной производной давления насыщенного пара воды воспользуемся данными таблицы, которые аппроксимируем простейшей формулой (приближение основано на уравнении Клапейрона–Клаузиуса)

$$p(t) = p(0) \cdot e^{\alpha t},$$

где t – температура по шкале Цельсия. Эта зависимость в логарифмическом виде линейна по температуре:

$$\ln \frac{p}{p(0)} = \alpha t.$$

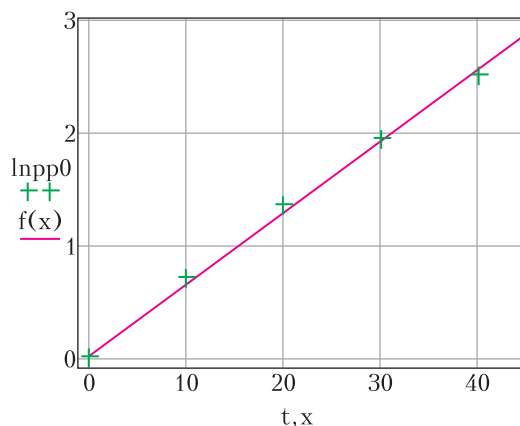


Рис. 2

Результат аппроксимации табличных данных этой линейной зависимостью представлен графиком на рисунке 2. Коэффициент $\alpha = 0,064 \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Производная давления по температуре равна

$$\frac{dp_{\Pi}}{dT} = \frac{dp_{\Pi}}{dt} = \alpha p(0) \cdot e^{\alpha t}.$$

В итоге получаем формулу чувствительности нашего термометра:

$$\frac{dh}{dT} = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{p}{T} + \alpha p(0) \cdot e^{\alpha t} \right).$$

Сделаем численную оценку двух составляющих при температуре 30°C :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{p}{T} = \frac{10^5 \cdot 10^2}{10^3 \cdot 10 \cdot 303} \text{ см/}^\circ\text{C} \approx 3,3 \text{ см/}^\circ\text{C},$$

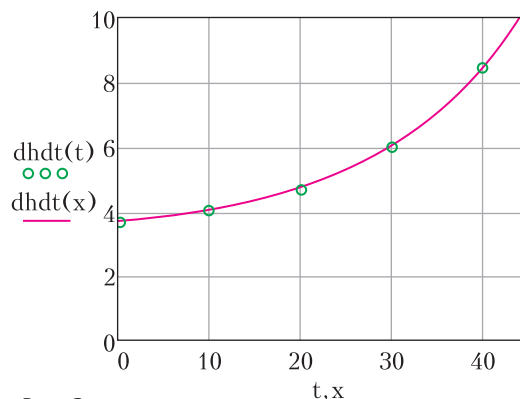


Рис. 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho g} \alpha p(0) \cdot e^{\alpha t} &= \\ &= \frac{0,064}{10^3 \cdot 10} \cdot 4,58 \cdot 10^{-3} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \times \\ &\quad \times e^{0,046 \cdot 30} \cdot 10^2 \text{ см/}^\circ\text{C} \approx 2,72 \text{ см/}^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Суммарная чувствительность при 30°C равна

$$\frac{dh}{dT} \approx 3,3 \text{ см/}^\circ\text{C} + 2,7 \text{ см/}^\circ\text{C} = 6,0 \text{ см/}^\circ\text{C}.$$

Эти результаты показывают хорошую чувствительность термометра и приближенное равенство двух ее составляющих. При этом «паровая» составляющая нелинейная. В заключение приводим график зависимости чувствительности паровоздушного термометра от температуры (рис.3).

О ВЗВЕШИВАНИИ ВЕСОВ

**А.ГРИБАЛКО, А.ЗАСЛАВСКИЙ,
О.МАНЖИНА**

В «Кванте» №11–12 за 2020 год опубликована следующая задача.

М2628. Имеется n внешне одинаковых чашечных весов. Известно, что ровно одни из них испорченные – они показывают что угодно, и их вес отличается от веса остальных, которые весят одинаково-

во и всегда показывают верный результат. За одно взвешивание можно положить несколько весов на каждую из чаш каких-то других весов. При каком наибольшем n за три взвешивания можно гарантированно найти испорченные весы?

Заметим, что это не первая задача о взвешивании весов. Еще в 2002 году на Турнире имени А.П.Савина была предложена такая задача.

Задача 1 (А.Чеботарев, Т.Караваяева, В.Гуровиц). У завхоза было трое одинаковых чашечных весов. В одних из них потерялась часть деталей, и теперь при взвешивании на них они могут выдать любой результат. Как найти неисправные весы за два взвешивания?

Эта задача совсем простая, и мы оставляем ее решение читателю. Несколько сложнее следующая задача.

Задача 2 (С.Токарев). *При каком наибольшем n можно за k взвешиваний гарантированно найти среди n весов более легкие неисправные весы?*

Ответ: при $n = 3^k - 2$.

Решение. Пусть при первом взвешивании на каждую чашу весов A ставится по x других весов и еще y весов остается. Тогда если одна из чаш перевесит, то неисправными могут быть либо весы на другой чаше, либо весы A , т.е. всего остается $x + 1$ подозрительных весов. Аналогично, если в первом взвешивании получено равновесие, то остается $y + 1$ подозрительных весов. Поскольку в обоих случаях появляются заведомо исправные весы, все дальнейшие взвешивания можно проводить на них, как в стандартной задаче поиска фальшивой монеты. Соответственно, необходимым и достаточным условием возможности найти неисправные весы за оставшиеся $k - 1$ взвешиваний будет выполнение неравенств $x + 1 \leq 3^{k-1}$, $y + 1 \leq 3^{k-1}$, что и дает приведенный выше ответ.

Интересно также, что если разрешить сложные взвешивания, при которых на чаши одних весов ставится по несколько других весов, на чаши которых также ставятся весы, и т.д. (в одном сложном взвешивании получаются результаты со всех участвующих в них весов, кроме тех, на чашах которых ничего не стоит), то двух взвешиваний достаточно, чтобы найти одни неисправные весы среди любого количества весов, большего двух. Описание алгоритма для произвольного n довольно сложно, поэтому ограничимся примером для $n = 15$.

Поставим на чаши весов A весы B_1 и B_2 , затем на чаши весов B_1 поставим весы C_1 и C_2 , а на чаши весов B_2 — весы C_3 и C_4 , наконец, на чаши весов C_1 , C_2 , C_3 , C_4 поставим соответственно весы D_1 и D_2 , D_3 и D_4 , D_5 и D_6 , D_7 и D_8 . Очевидно, что если весы A показывают равновесие, то они и будут неисправными. В противном случае все весы на более тяжелой чаше, пусть это чаша с весами B_2 , правильные, тогда по-

смотрим на показания весов B_1 . Аналогично получаем, что все весы на перевесившей чаше (а при равновесии на обеих) этих весов заведомо правильны, и смотрим показания весов на другой чаше, пусть это весы C_1 . Снова получаем, что неисправными могут быть только более легкие из весов D_1 , D_2 , т.е. после первого взвешивания остается не более четырех подозрительных весов. Определить следующим взвешиванием, какие из них неисправны, не представляет труда.

Решение задачи M2628. Отличие задачи M2628 в том, что неизвестно, в какую сторону вес испорченных весов отличается от веса правильных. Как мы увидим, это делает задачу существенно труднее.

Ответ: при $n = 13$.

Предположим, что испорченные весы можно найти за три взвешивания при каком-нибудь $n \geq 14$. Понятно, что при любом взвешивании нет смысла сравнивать разные количества весов, иначе чаша с большим числом весов перевесит и это не даст никакой информации.

После каждого взвешивания все весы будут разбиты на две группы: в одной будут заведомо настоящие, во второй — подозрительные, про которые пока непонятно, настоящие они или нет. Докажем, что нет смысла проводить второе и третье взвешивания на подозрительных весах. Допустим, мы сделали такое взвешивание на весах X . Поменяем местами их с какими-нибудь настоящими (не важно, где они находятся, на весах или нет). Если X настоящие, то результат взвешивания не изменится. Если же X испорченные, то они могли показывать такой же результат, как и после замены. Значит, в любом случае набор подозрительных весов либо останется прежним (в том числе не изменится информация, легче или тяжелей могут быть каждые из весов), либо из него будут удалены весы X . Таким образом, можно считать, что второе и третье взвешивания проводились на настоящих весах.

Если при первом взвешивании мы положили на каждую чашу не более четырех весов, то рассмотрим случай, когда было

равновесие. В этом случае весы на чашах настоящие, а подозрительными являются те, на которых проводили взвешивание, и не менее $n - 9$ не участвовавших в нем, т.е. всего не меньше шести весов. Значит, есть не менее 12 возможностей того, какие это весы и в какую сторону их вес отличается от настоящих. Во втором и в третьем взвешиваниях должны участвовать все подозрительные весы, кроме, может быть, одних, иначе мы не сможем отличить двое весов, не участвовавших во взвешиваниях, а испорченные могут оказаться среди них. Это значит, что после второго и третьего взвешиваний мы максимум у одних весов не смогли бы узнать, легче или тяжелей они настоящих, т.е. должны уметь различать не менее 11 ситуаций. Однако каждое взвешивание может иметь максимум три исхода, поэтому более девяти различных ситуаций мы различить не сможем.

Если же при первом взвешивании мы сравнивали не менее чем по пять весов с каждой стороны, то может оказаться, что одна из чаш перевесила. Тогда число подозрительных весов после первого взвешивания больше девяти и различить их за два взвешивания не получится.

Теперь покажем, как за три взвешивания найти испорченные весы при $n = 13$. Как понятно из оценки, первым взвешиванием нужно положить на чаши некоторых весов по четверо весов.

Если весы оказались в равновесии, то на них сравнивались настоящие весы, а подозрительными являются те, на которых проводилось взвешивание, и четверо весов, не участвовавших в нем. Для второго взвешивания возьмем настоящие весы, на одну их чашу положим трое настоящих весов, а на другую – трое подозрительных. Если подозрительные оказались легче или тяжелей, то испорченные весы среди них и мы знаем, в какую сторону их вес отличается от настоящих. Тогда, сравнив третьим взвешиванием любые двое из них на настоящих весах, мы выявим испорченные. Если же при втором взвешивании весы показали равновесие, то испорченные весы среди двух оставшихся подозрительных. Тогда сравним на настоящих весах одни из них с

настоящими и выясним, какие именно являются испорченными.

Если при первом взвешивании перевесила одна из чаш, то подозрительные весы либо на ней и они тяжелей настоящих (будем называть все весы на этой чаше тяжелыми), либо на другой чаше и они легче (будем называть их легкими), либо те, на которых проводили взвешивание. Для второго взвешивания возьмем настоящие весы, на одну их чашу положим двое тяжелых весов и двое легких, а на другую – одни тяжелые, одни легкие и двое настоящих. Если одна из чаш перевесила, например первая, то подозрительными остаются двое тяжелых весов на ней и легкие на другой чаше. Тогда сравним двое подозрительных тяжелых весов на настоящих весах и либо обнаружим испорченные весы среди них, либо это будут подозрительные легкие. Аналогично разбирается случай, если при втором взвешивании перевесила вторая чаша. Если же весы показали равновесие, то взвешиваемые весы настоящие, а подозрительными остаются трое весов. Третьим взвешиванием сравним на настоящих весах оставшиеся подозрительные тяжелые и легкие весы на одной чаше с двумя настоящими на другой. В случае неравенства в зависимости от результата понятно, какие из них испорченные, а в случае равенства испорченными являются те, на которых проводилось первое взвешивание.

Следует, однако, отметить, что, в отличие от большинства задач на взвешивания, в этой задаче число весов ограничено не только сверху, но и снизу. Так, при $n = 3$ никакое число взвешиваний не гарантирует нахождения неисправных весов!

Действительно, пусть, например, весы A и B правильные, весы C неисправные и более тяжелые, а при взвешивании на них получилось, что $A > B$. Сделав взвешивания на других весах (больше делать все равно нечего), мы получим также, что $C > A$ и $C > B$. Такую же систему неравенств мы могли бы получить, если бы весы B были неисправными и более легкими.

Теперь единственное, что нам остается, это повторять взвешивания на подозре-

тельных весах B и C , надеясь на то, что когда-нибудь неисправные весы покажут результат, отличный от предыдущего (повторять взвешивания на правильных весах A не имеет смысла, поскольку результаты этих взвешиваний меняться не будут). Теоретически это может вообще никогда не произойти, но, если, например, неисправные весы выдают любой из трех исходов с равными вероятностями, то вероятность повторения результата первого взвешивания в m последующих равна $1/3^m$, что стремится к нулю с ростом m . Поэтому рано или поздно неисправные весы будут найдены. Тогда возникает естественный вопрос о среднем числе нужных для этого взвешиваний или следующая задача.

Задача 3. Среди трех весов одни испорчены и отличаются от остальных по весу. При взвешивании на испорченных весах все три исхода равновероятны. Сколько в среднем взвешиваний надо сделать, чтобы найти испорченные весы?

Ответ: 37/9.

Решение. Нетрудно убедиться, что после трех взвешиваний на разных весах подозрительных весов останется не больше двух, и если их двое, то придется повторять взвешивания на них до получения нового результата. Очевидно, что перед первым таким взвешиванием вероятность оказаться неисправными для каждого веса равна $1/2$, поэтому безразлично, на каких весах взвешивать. Но если в этом взвешивании повторился результат, показанный ранее, ситуация меняется. Действительно, для правильных весов вероятность повторения результата равна 1, а для неисправных $1/3$, поэтому после взвешивания условная вероятность того, что неисправны другие весы, равна $1 : (1 + 1/3) = 3/4$, так что новое взвешивание надо проводить именно на них. Если же и во втором взвешивании повторится прежний результат, то мы вернемся в исходную ситуацию. Таким образом, мы получаем последовательность взвешиваний с вероятностью получения нужного результата, равной $1/2 \cdot 2/3 = 1/3$ в нечетных взвешиваниях и $3/4 \cdot 2/3 = 1/2$ в чет-

ных. Тогда среднее число взвешиваний x удовлетворяет уравнению

$$x = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot (x + 2).$$

Действительно, с вероятностью $1/3$ мы получаем нужный результат в первом взвешивании, с вероятностью $2/3 \cdot 1/2$ во втором, а в остальных случаях среднее число взвешиваний после второго опять равно x . Решив это уравнение, получаем $x = 5/2$.

Примечание. Мы рассмотрели частный случай хорошо известной в теории вероятностей задачи о среднем числе испытаний до первого успеха; см., например, задачу 22.5.6 в книге «Элементы математики в задачах» (М.: МЦНМО, 2018). Там же можно прочитать и про вычисление условных вероятностей.

Итак, общее число испытаний в среднем равно $3 + 5/2 = 11/2$? Нет, этот вывод слишком поспешен. Во-первых, при первом взвешивании на испорченных весах мы можем получить равновесие, после чего дальнейшие взвешивания будут не нужны. Вероятность этого равна $1/3$, а поскольку взвешивание на неисправных весах может с равными вероятностями быть первым, вторым или третьим, то среднее число взвешиваний в этом случае равно 2. Во-вторых, число подозрительных весов может сократиться до двух уже после второго взвешивания. Скажем, если мы получили результаты $A > B$ при взвешивании на весах C и $C > A$ при взвешивании на B , то уже можно заключить, что весы A правильные и делать взвешивание на них не нужно. Вероятность такого события равна $1/3$. С учетом этого для среднего числа взвешиваний получаем

$$\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{5}{2} \right) = \frac{37}{9}.$$

Согласитесь, что угадать такой ответ было бы довольно сложно.

Упражнение. Как изменится среднее число взвешиваний, если испорченные весы выдают верный результат с вероятностью p , а два других исхода равновероятны?

Вернемся к задаче М2628. Возможно, у читателя возник вопрос, почему в задаче спрашивается именно про три взвешивания. Дело в том, что это наименьшее

число, для которого вопрос содержателен, т.е. ни при каком n найти неисправные весы за два взвешивания нельзя! Действительно, пусть при первом взвешивании на чашах стоит по x весов и левая чаша перевесила. Тогда неисправными могут быть x левых весов (более тяжелые), x правых (более легкие) и весы, на которых делалось взвешивание (любые). Найти среди них неисправные одним взвешиванием можно только при $x = 1$, причем для этого надо иметь не меньше трех правильных весов (почему?). Однако, в этом случае $n \geq 6$ и при равновесии в первом взве-

шивании остается не менее четырех подозрительных весов, из которых невозможно найти неисправные одним взвешиванием.

В заключение предлагаем читателю подумать над следующими вопросами.

1. Верно ли что неисправные весы можно найти за три взвешивания при всех $4 \leq n \leq 13$?

2. При каких n можно найти среди n весов неисправные за k взвешиваний?

3. Как изменится ответ на предыдущий вопрос, если надо не только найти неисправные весы, но и выяснить, легче они настоящих или тяжелее?

Погода в пустыне Сахара

С.ВАРЛАМОВ

В «Кванте» № 11–12 за 2020 год приведено решение задачи Ф2624, основанное на предположении, что поглощение тепла воздухом и остывание воздуха происходят по очереди. Здесь же будет рассмотрена несколько иная картина теплообмена, возможно – более реалистичная.

Напомним условие задачи: *Суточный «ход» температуры воздуха летом на высоте 2 м (стандартная высота для метеорологических измерений) составляет в Сахаре 30°. Максимальная температура +40°C. Погода устойчивая, небо безоблачное. Оцените толщину слоя воздуха над поверхностью пустыни, вовлекаемого в конвекцию в течение суток. Солнечная постоянная равна 1370 Вт/м².*

Теперь – решение.

Тепловые явления, происходящие в атмосфере Земли, весьма сложны. Большое количество факторов определяют направления и мощности тепловых потоков. В атмосферных процессах задействованы все известные процессы теплопередачи: излучение, фазовые переходы (испарение-конденсация), теплопроводность и конвекция. Картина взаимного обмена теплотой

между атмосферой и поверхностью (твердой или жидкой) зависит от места на поверхности Земли, она меняется даже в течение суток и уж тем более за длительные промежутки времени (между зимой и летом). Если в воздухе имеются облака, то излучение, идущее и от Солнца и от поверхности Земли, рассеивается и перехватывается облаками.

Конкретно в Сахаре существуют и субтропические области, и области, в которых годами не выпадают осадки. Будем считать, что нас интересует ситуация в пустынных районах Сахары, где влажность воздуха весьма мала и никакой конденсированной воды на поверхности нет. Поэтому испарение воды, которое играет важную роль в других случаях, здесь не участвует по причине отсутствия вещества для испарения.

Итак, время – лето, когда Солнце бывает в зените, ветра нет. Днем при солнечном освещении теплота передается от поверхности атмосферному воздуху, который, прогреваясь снизу, участвует в конвекции. Ночью подогрев снизу прекращается, и конвекция замедляется. Согласно условию задачи нужно оценить толщину приземного слоя воздуха, который за дневное время суток прогревается на величину порядка 30 градусов.

На рисунке 1 показаны основные направления, в которых «путешествует» энергия, попавшая с излучением Солнца на Землю. В подписи к рисунку указано, что величи-

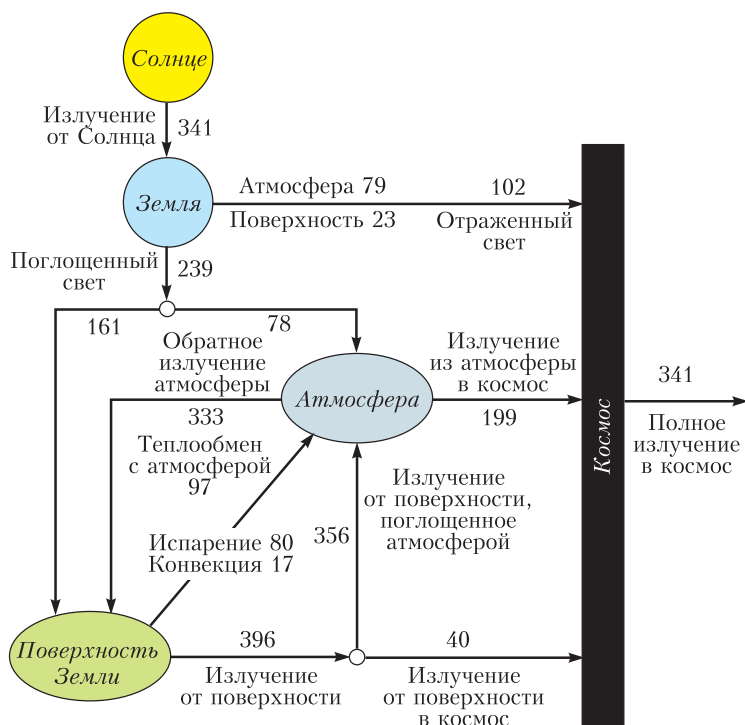


Рис. 1. Тепловой баланс Земли (март 2000 – май 2004). Все тепловые потоки (в $\text{Вт}/\text{м}^2$) усреднены по времени и по поверхности Земли. (Источник: K.T.Trenberth, J.Fasullo, J.T.Kiehl. *Earth's global energy budget*. – *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 90 (2009), 311–323.)

ны тепловых потоков усреднены не только по поверхности Земли, но и по времени, т.е. приведенная картина не относится напрямую к ситуации, которую мы намерены рассмотреть. Но «локально» и по времени и по участку поверхности при устойчивой погоде тоже выполняется условие «баланса». Это означает, что сколько в среднем за сутки Земля получает от Солнца, ровно столько же и отдает в Космос.

Над Сахарой облаков нет, поэтому доля солнечной энергии, добирающейся через прозрачную (в видимом диапазоне длин волн) атмосферу, составляет в полдень примерно $1000 \text{ Вт}/\text{м}^2$. Значительная часть падающего на Землю излучения сразу отражается поверхностью пустыни. Средняя величина альbedo песка или скалистых плоскогорий Сахары (которые занимают большую часть ее поверхности) равна примерно 30%. Если Солнце в зените (солнечный свет перпендикулярно падает на поверхность), то каждому квадратному

метру поверхности достается мощность, равная примерно $1 \text{ кВт}/\text{м}^2$. С учетом альbedo поглощается соответственно $700 \text{ Вт}/\text{м}^2$. В течение светлого времени суток поглощение солнечного света сначала растет и достигает максимальной величины $700 \text{ Вт}/\text{м}^2$ в середине дня, а затем уменьшается до нуля. При этом температура поверхности в дневное время достигает $+70^\circ\text{C}$. Мощность, приходящаяся на единицу площади, зависит от угла падения солнечных лучей. Средняя за светлое время суток, за 12 часов, мощность равна

$$0,7 \cdot 10^3 \cdot \frac{\int_0^\pi \sin \varphi \cdot d\varphi}{\pi} \text{ Вт}/\text{м}^2 = \frac{1,4}{\pi} \cdot 10^3 \text{ Вт}/\text{м}^2 \approx 446 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Термометр, работающий на поглощении теплового излучения тел и направленный днем или ночью вверх (в чистое небо), показывает среднюю температуру -30°C . Эта температура определяет средний по времени за сутки (примерно одинаковый днем и ночью) тепловой поток от атмосферы к поверхности Земли. Величина этого потока, приходящаяся на единицу площади поверхности, равна примерно

$$\sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) \times \\ \times (273 - 30)^4 \text{ К}^4 \approx 200 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Полученная оценка несколько меньше величины соответствующего усредненного потока энергии, указанного на рисунке 1 (т.е. $333 \text{ Вт}/\text{м}^2$).

Вместе эти два потока теплоты «к поверхности» дают за дневное время величину мощности примерно

$$446 \text{ Вт}/\text{м}^2 + 200 \text{ Вт}/\text{м}^2 = 646 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Средняя мощность, уходящая «от поверхности» посредством излучения, в дневное время соответствует излучению поверх-

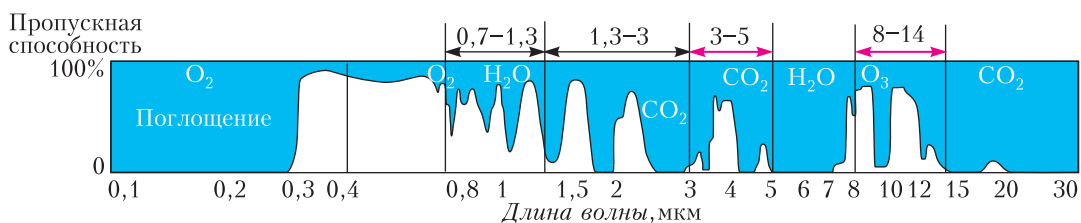


Рис. 2. График зависимости доли пропускаемого разными атмосферными газами излучения от длины волны

ности с некоторой средней температурой между максимальной $+70\text{ }^{\circ}\text{C}$ и минимальной $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Если считать, что коэффициент теплового излучения поверхности равен $0,7$, то эта мощность равна примерно $0,7 \cdot \sigma \cdot (273 + 40)^4 \text{ Вт/м}^2 \approx 380 \text{ Вт/м}^2$.

Здесь в качестве температуры выбрано среднее арифметическое значение $(10^{\circ} + 70^{\circ})/2 = 40^{\circ}$.

Величины потоков 646 Вт/м^2 «к поверхности» и 380 Вт/м^2 «от поверхности» не равны друг другу, следовательно, за счет конвекции воздуха от поверхности над Сахарой в дневное время отбирается мощность, равная их разности, т.е. примерно 266 Вт/м^2 . В ночное время конвекция воздуха над поверхностью прекращается, поскольку поверхность, быстро охлаждаемая за счет излучения, приобретает температуру ниже, чем температура воздуха, расположенного непосредственно над ней. Если считать, что воздух в среднем прогревается на 30 градусов, то можно оценить толщину слоя воздуха x , который участвует в дневной (за 12 часов) конвекции:

$$266 \cdot 12 \cdot 3600 \text{ Дж/м}^2 = \frac{7}{2} R \frac{\rho}{M} \Delta T \cdot x =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot 8,31 \cdot \frac{1,2}{0,029} \cdot 30 \text{ Дж/м}^3 \cdot x,$$

откуда следует $x \approx 320 \text{ м}$.

Почему атмосфера «перехватывает» частично и излучение Солнца и излучение, идущее от Земли? Это обусловлено наличием в воздухе (даже в прозрачном) частиц, которые хорошо поглощают излучение в некоторых диапазонах длин волн. Картинка зависимости доли пропускаемого атмосферным воздухом излучения от длины волны, приведенная на рисунке 2,

наглядно иллюстрирует причину неполного прохождения мощности излучения через атмосферный воздух. Температура поверхности Солнца равна примерно 6000 К . Этой температуре соответствует максимум излучения, приходящийся на длину волны $0,5 \text{ мкм}$ (примерно середина видимого диапазона света). Температуре поверхности Земли, равной в среднем 300 К , соответствует (согласно закону Вина) длина волны, на которую приходится максимум теплового излучения, равная $0,5 \text{ мкм} \cdot (6000/300) = 10 \text{ мкм}$.

Из потока солнечного излучения 1370 Вт/м^2 сквозь прозрачную (без облаков) атмосферу при перпендикулярном к поверхности Земли падении проходит только 1000 Вт/м^2 , что составляет примерно 73% от всего излучения. Это обусловлено поглощением и частичным рассеиванием атмосферой излучения, идущего от Солнца. Ультрафиолетовое излучение при длинах волн меньше $0,3 \text{ мкм}$ в основном поглощается и рассеивается кислородом, а в диапазоне ближнего и среднего инфракрасного излучения от $0,8$ до $3,0 \text{ мкм}$ поглощение и рассеивание обеспечивается парами воды и углекислым газом.

А в диапазоне теплового излучения Земли, соответствующего температурам $250\text{--}340 \text{ К}$ и диапазону длин волн от $3,0$ до 15 мкм , воздух частично не пропускает излучение за счет поглощения и рассеяния озоном, углекислым газом и водой, находящейся в воздухе в конденсированном состоянии.

Для более подробного ознакомления с тепловыми процессами в атмосфере Земли очень рекомендуем прочитать одну из замечательных книг «Библиотечки «Квант» — книгу А.В.Бялко «Наша планета Земля» (выпуск 29).

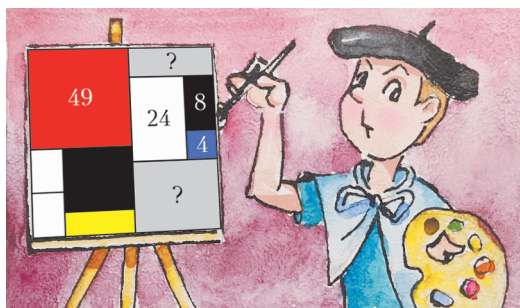
Задачи

1. Маша переклеила на калькуляторе наклейки со знаками четырех арифметических действий так, что никакая



наклейка теперь не наклеена верно. Петя вычислил на этом калькуляторе $8 - 2$ и $5 + 1$ и оба раза получил 4. Что получится, если он вычислит $(4 : 2) \times 9$?

2. Пит М. на квадратном холсте нарисовал композицию из прямоугольников. На рисунке даны площади не-



скольких прямоугольников, в том числе синего и красного квадратов. Чему равна сумма площадей двух серых прямоугольников?

Т.Корчемкина

3. Марина купила тур в Банановую страну с 5 по 22 октября. Ввозить и вывозить бананы через границу запрещено. Банановый король в начале каждого месяца издает указ о ценах. Цена одного банана в местной валюте на

нужные числа октября приведена в таблице. Марина хочет ежедневно съе-

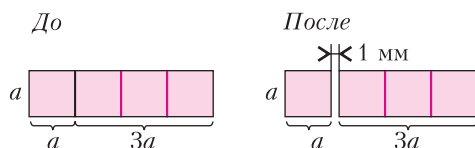
5	6	7	8	9	10	11	12	13
8,1	8	7	8,1	9	8	8,1	7,2	7
14	15	16	17	18	19	20	21	22
8	9	8,1	9	8	9	8,2	7	7,1



Иллюстрации Д.Гришуковой

дать по одному банану. Она любит только зеленые бананы, поэтому согласна съесть банан только в течение 4 дней после покупки. Например, банан, купленный 5 октября, Марина согласна съесть 5, 6, 7 или 8 октября. Марина может запастись бананами, когда они подешевле. В какие дни по сколько бананов надо покупать Марине, чтобы потратить как можно меньше денег?

4. При нагревании тела не только расширяются, но иногда и перемещаются. Чтобы продемонстрировать это явление, учитель положил на стол вплотную друг к другу квадратную и прямоугольную пластины и нагрел их. После остывания пластин ребята действительно увидели между ними зазор. Его ширина была равна 1 миллиметру.



— Интересно, — подумал Петя, — а на сколько увеличивались при нагревании размеры каждой пластины? Ответьте и вы на этот вопрос.

Е.Соколов

Задача 1 предлагалась на Международном конкурсе-игре «Кенгуру», задачи 2 и 3 предлагались на Турнире имени М.В.Ломоносова.

Я надеюсь ... побудить геометров ближе подойти к исследованию природы, а жадных до естественной науки — сначала выучиться геометрии.

Исаак Ньютон

Книга природы написана треугольниками, окружностями и другими геометрическими фигурами, без которых человек не может понять в ней ни единого слова.

Галилео Галилей

История науки дает нам много примеров применения чистой геометрии и пользы, приносимой ею.

Пьер Симон Лаплас

...нужно ясно понимать, как геометрия световых лучей связана с создаваемыми ими для наблюдателя изображениями испускающих эти лучи объектов.

Владимир Арнольд

А так ли хорошо знакомы вам физика × геометрия?

Да-да, не удивляйтесь, что привычный «плюс» заменен на иной математический знак, — ведь разговор пойдет не просто о сложении усилий двух научных областей, а именно об их умножении. Конечно, в школьной практике геометрические построения и формулы часто воспринимаются лишь как полезное подспорье при изучении физических проблем, особенно в кинематике, статике и оптике, да еще, пожалуй, в астрономии. Но даже в этих ограничениях можно заметить, как «оживают» задачи, как их условия становятся более наглядными, а решения — и рациональными и несравнимо изящными. Геометрия, сочетающая живое созерцание и строгую логику, пропитывает физику, порой открывая в ней новое, гармоничное измерение.

Эта теснейшая связь длится не одно тысячелетие и блестяще воплощается во множестве научных открытий и инженерных решений. Попробуем и мы выбрать из россыпи примеров те, что отражают эффективное взаимопроникновение наук, прибегая сегодня к помощи ПЛАНИМЕТРИИ. А выход в пространство совершим в следующий раз.

Вопросы и задачи

1. Когда нижний конец вплотную представленной к стене лестницы отодвинули на 2 м от стены, верхний конец лестницы опустился вниз на $1/5$ часть ее длины. Какова длина лестницы?

2. В круглом бассейне плавает дельфин. Начав движение от стенки бассейна, он

поплыл строго на север. Наткнувшись через 12 м на борт бассейна, он повернул на запад. Проплыв еще 5 м, он вновь наткнулся на стенку. Чему равен диаметр бассейна?

3. Как найти угол между часовой и минутной стрелками в 12 ч 20 мин?

4. Земной шар и апельсин обтянуты обручами по наибольшему обхвату. Если удлинить каждый обруч на 1 м, то они отодвнутся от поверхности тел и образуют зазоры. Какой из них будет больше?

5. Диск радиусом R обкатывает изнутри неподвижный обруч радиусом $2R$. Пусть центр диска совершит один оборот вокруг оси обруча. Сколько раз обернется диск за это время вокруг своей оси?

6. При движении доски на круглых катках она сохраняет горизонтальное положение и остается на одной и той же высоте. Можно ли осуществить такое движение, пользуясь *некруглыми* катками?

7. В условиях предыдущей задачи скорость верхней точки каждого круглого катка равна 1 м/с. С какой скоростью перемещаются точки касания доски с катками?

8. Совпадает ли центр тяжести *контура* треугольника с центром тяжести его *площади*? Для примера рассмотрите равнобедренный треугольник с большой высотой и малым основанием.

9. Однородная доска находится в равновесии в прямом двугранном угле с гладкими стенками. Как расположена доска? Устойчиво ли ее равновесие?

10. По закону, установленному Кеплером, тело, брошенное с поверхности Зем-

ли, должно было бы двигаться по эллипсу, однако мы считаем его траекторию параболической. Почему?

11. Отчего солнечное затмение не наблюдается каждое новолуние, а лунное – каждое полнолуние?

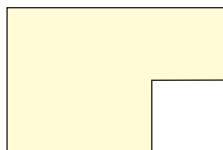
12. Диаметр источника света 20 см, расстояние от его центра до экрана 2 м. На каком наименьшем расстоянии от экрана нужно поместить центр мяча диаметром 8 см, чтобы он не отбрасывал тень на экран, а давал только полутень? Прямая, проходящая через центры источника света и мяча, перпендикулярна плоскости экрана.

13. В большой комнате в форме правильного шестиугольника с зеркальными стенами находится маленький человек. Постройте геометрическое место точек, из которых человек может видеть свои первые изображения во всех зеркалах.

14. Два плоских зеркала составляют двугранный угол 120° . В бисекторной плоскости расположен точечный источник света. Расстояние между первыми мнимыми изображениями источника равно l . Чему будет равно расстояние между изображениями, если двугранный угол уменьшить в два раза?

Микроопыт

Пользуясь только линейкой без делений, найдите построением положение центра тяжести однородной пластинки, изображенной на рисунке.



Любопытно, что...

...названия геометрических фигур первоначально означали конкретные предметы. Так, «ромб» произошел от имеющего некруглую форму бубна, «трапеция» – от стола, «линия» – от льняной нити.

...уяснить природу затмений древнему греку Анаксимену помогла догадка, что Луна и Солнце – два шара, движущиеся в одной плоскости.

...еще один древнегреческий ученый Фалес придумал геометрический способ измерения расстояний до корабля в море с берега. Сейчас для этой цели используется работающая по тому же принципу стереотруба.

...еще в третьем веке до новой эры Архимед доказывал новые математические факты с помощью свойств центра масс. Например, этим способом им была выведена теорема о пересечении в одной точке трех медиан треугольника.

... теория конических сечений, возникшая в рамках «чистой математики» и разработанная в деталях древними греками, нашла важнейшие приложения в XVII веке в трудах Ньютона и Кеплера по небесной механике.

...установив закон движения тела, брошенного под углом к горизонту, Галилей его долго не публиковал, понимая, что этот результат получен в приближении «плоской Земли», а какой будет форма траектории в случае достаточно больших скоростей, он не знал.

... соотношения между расстояниями в пространстве изучаются в геометрии, а свойства времени – в хронометрии. Поэтому та кинематика, которую начинают изучать в школе, и представляет собой не что иное как объединение этих наук, или «геометрию пространства – времени».

... современные средства исследований позволили надежно установить, что огромные постройки давностью в несколько тысяч лет, подобные Стоунхенджу, подчинялись строгим геометрическим соотношениям и использовались нашими предками для астрономических наблюдений.

Что читать в «Кванте» по теме «Физика x планиметрия»

(публикации последних лет)

1. «Геометрия световых лучей» – 2013, №1, с.55;
2. «Оптическое изображение и проективная плоскость» – 2014, Приложение №3, с.90;
3. «Калейдоскоп «Кванта» – 2015, № 2, 4 и 2016, № 5/6, с.32;
4. «Нахождение центра масс проволочного треугольника» – 2018, №1, с.31;
5. «Законы механики и параметры эллипса» – 2018, №5, с.32;
6. «Законы отражения и преломления света» – 2019, №1, с.42;
7. «Квант» для младших школьников», задача 1 – 2020, №2, с.27;
8. «Об укладке блинов, котлет и апельсинов» – 2020, №4, с. 38.

Материал подготовил А.Леонovich

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest.
Желаем успеха!

21. Две точки A и B внутри прямоугольника соединили с его вершинами, как показано на рисунке 1. Докажите, что суммарная площадь двух желтых треугольников, примыкающих к точке A , равна суммарной площади двух желтых треугольников, примыкающих к точке B .

Рис. 1

М.Ахмеджанова

22. Головоломка «Ёлки-палки» состоит из 100 палочек, длина каждой из которых либо 1 см, либо 3 см. На упаковке головоломки утверждается, что из всех этих палочек (не ломая) можно составить границу правильного многоугольника. Вовочка попытался выложить прямоугольник, но доказал, что этого сделать нельзя, и поэтому считает, что головоломка бракованная. Прав ли он?

М.Ахмеджанова

23. Рассмотрим клеточные фигуры A и B (рис.2). Пусть M – количество способов разрезать фигуру A на четырехклеточные фигуры тетрамино, а N – количество способов разрезать фигуру B на четырехклеточные фигуры тетрамино. Какое из чисел M или N больше? На сколько?

С.Костин

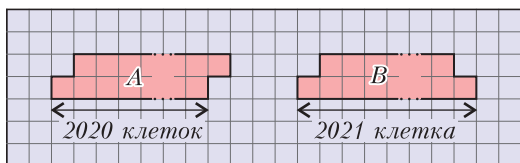


Рис. 2

24. Сколькими способами в таблицу 7×7 можно расставить цифры (от 0 до 9) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 не превышала 12, а сумма всех чисел в таблице была максимально возможной?

П.Кожевников



БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин www.bgshop.ru	■ Книги
■ Кафе	■ Аудиокниги
■ Клубные (дисконтные) карты и акции	■ Антиквариат и предметы коллекционирования
■ Подарочные карты	■ Фильмы, музыка, игры, софт
■ Предварительные заказы на книги	■ Канцелярские и офисные товары
■ Встречи с авторами	■ Цветы
■ Читательские клубы по интересам	■ Сувениры
■ Индивидуальное обслуживание	
■ Подарочная упаковка	
■ Доставка книг из-за рубежа	
■ Выставки-продажи	

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

Где достать поляризованный свет?

М. СТАРШОВ

НЕДАВНО В ОДНОМ ИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ физических журналов мне встретилась такая наукообразная фраза: «... весьма непросто создать натурные источники частично поляризованного света». Возможно, натурные источники создавать и не нужно. И не потому, что это непросто, а потому, что они нас окружают постоянно. Известно, например, что поляризованный свет «знают», узнают и используют пчелы. И можно догадаться, что Природа предоставляет им как раз частично поляризованный свет. Гораздо реже можно встретить полностью поляризованный, как говорят оптики, линейно или плоско поляризованный свет. И скорее всего это окажется свет, созданный человеком.

Нельзя не восхищаться призмой Николя, придуманной и изготовленной шотландцем Уильямом Николем в 1828 году. Чтобы сделать это устройство, надо было почти все знать о поляризации света, а главное – понимать, что этих приборов хорошо бы иметь два. Тогда можно не только всех убедить, что они работают, но и действительно заставить их работать. Однако ученый изготовил вторую призму, очень похожую на первую, только в 1839 году. Не странно ли?

Итак, призма Николя, или просто николь, из обычного света делает практически полностью поляризованный свет. На нее падает свет с колебаниями в любой плоскости, содержащей направление распространения пучка света, а пропускает она только колебания в одной плоскости, если говорить «на пальцах». Вторая такая же призма может убедить наблюдателя, что из первой свет вышел именно поляризованным.

Это красиво и замечательно, только призм эти делаются из редких, а значит, очень дорогих кристаллов исландского шпата. А вот лет двадцать назад, когда я начинал работать в смене одаренных детей «Созвездие», в отряде юных любителей физики был замечательный мальчик Дима из города Ртищево. На одной из своих лекций я рассказывал о поляризации света, способах получения и применения такого света. Когда лекция закончилась, все мальчишки побежали играть в футбол, а этот Дима пошел по территории детского лагеря, вдоль старых заброшенных корпусов, изредка нагибаясь до земли. Потом отправился к электрику, попросил немного изоляционной ленты, которой он соединил собранные кусочки старого оконного стекла. Было забавно наблюдать, как он предлагал то одному, то другому товарищу посмотреть через его самоделку на небо: «Вот так посмотри, а теперь поверни так! Ну, видишь, как небо меняется?»

Это он сделал так называемую стопу Столетова, которая очень просто и недорого позволяет получить или обнаружить линейно поляризованный свет. И вот, Дима убедился, что небо посылает нам свет в различной степени поляризации в зависимости от положения солнца.

Честно говоря, для такого эксперимента можно вообще ничего не делать руками, достаточно открыть глаза, гуляя по городу или на природе. Вот передо мной здание школы (фото на рисунке 1), но почему такие разные стекла в его окнах: одни какие-то серенькие, а другие совсем черные, как будто и не стекла вовсе? Взглянув с любопытством на похожие окна одного парижского дворца в лучах заходящего солнца, молодой француз Этьен Малюс в начале XIX века и открыл для человечества поляризацию отраженного света.

Блики на воде или на дорогом лимузине и вообще блеск тоже говорят о поляризации отраженного света. Правда, это не касается металлических ручек и других частей машины, «работают» только краска и стекло (с металлами все сложнее). Кто станет физиком или конструктором, возможно, будет этим пользоваться.



Рис. 1

С уверенностью процентов на 99 можно утверждать, что среди преданных читателей журнала «Квант» нет ни одного, кто бы не пользовался ежедневно поляризованным светом. Набирая этот текст, останавливаясь, чтобы исправить ошибку в слове, беру в руки только что сфотографированную стопу Столетова (фото на рисунке 2) и смотрю сквозь нее на экран жидко-кристаллического монитора своего ноутбука. Вижу текст и начинаю поворачивать коробочку вокруг направления на экран. Неожиданно картинка слабеет, мутнеет и темнеет, букв не вижу совсем. При дальнейшем повороте все восстанавливается. Нетрудно догадаться, что от экрана к нам идет поляризованный свет, а стопа это проверяет.



Рис. 2

Но можно поступить даже проще, достаточно раздобыть кусочек ровного чистого стекла размером в половину тетрадного листа или даже меньше. Держа его сбоку от монитора на уровне глаз, поворачиваю так, чтобы видеть на нем отражение экрана, как в зеркале. Медленно перемещаю руку со стеклом вперед и вверх, не теряя отражение экрана. А изображение вдруг слабеет, почти до исчезновения. Продолжаю движение в том же стиле – изобра-

жение снова появляется. И опять пропадает, когда стекло оказывается на уровне экрана и глаз, только с левой моей стороны. Не прикольно ли? Я бы на вашем месте немедленно принялся искать стекло, чтобы проверить прочитанное. Если возьмете зеркало вместо стекла, такого эффекта не получите. Зеркальный слой – это металл, амальгама с высоким коэффициентом отражения, а его защищающее стекло отражает слабо, и глаз изменений не чувствует.

А может быть, куда ни глянь, всюду увидишь частично поляризованный свет? И какие красивые наблюдения можно с ним проводить!

Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библиоглобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Снова теорема Штейнера–Лемуса

З.ДЕГТЯРЕВА, Д.МАКСИМОВ

ОДНОЙ ИЗ САМЫХ УДИВИТЕЛЬНЫХ, загадочных и красивых теорем в геометрии по праву считается теорема Штейнера–Лемуса, которая формулируется так:

Если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник равнобедренный.

Теореме Штейнера–Лемуса более полутора веков. За это время накопилось много разных ее доказательств, появляются все новые и новые. Прочитав статьи А. Коробова «Семь решений задачи Штейнера» («Квант» №4 за 1996 г.) и Л.Штейнгаца «Новый взгляд на теорему Штейнера–Лемуса» («Квант» №1 за 2013 г.), мы решили внести свой вклад в доказательство этой теоремы. Предлагаем читателям еще четыре доказательства, найденных нами.

Первое доказательство

Пусть AA_1 , BB_1 – биссектрисы треугольника ABC , $\alpha = \frac{1}{2}\angle A$, $\beta = \frac{1}{2}\angle B$, $AA_1 = BB_1$.

Докажем, что $AC = BC$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть, не умаляя общности рассуждений, $\angle A < \angle B$, т.е. $\alpha < \beta$ (рис.1). Рассмотрим два случая.

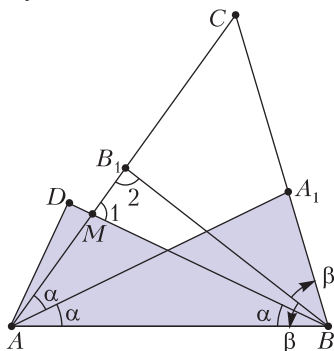


Рис. 1

Первый случай: $\angle A \leq \angle C$, т.е. $2\alpha \leq \angle C$. Из точки B проведем отрезок BD так, что $\angle ABD = \alpha$ и $\angle BAD = 2\beta$. Тогда треугольники ADB и AA_1B равны по стороне и двум прилежащим углам, значит, $DB = AA_1 = BB_1$. Пусть BD пересекает AC в точке M . Получаем, что $MB < BD = BB_1$. По теореме о внешнем угле треугольника имеем $\angle 1 = \angle A + \alpha$, $\angle 2 = \angle C + \beta$, следовательно, $\angle 1 < \angle 2$. Таким образом, в треугольнике MB_1B имеем $MB > BB_1$ – противоречие.

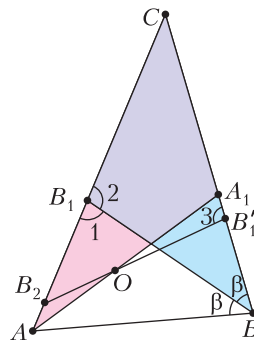


Рис. 2

Второй случай: $\angle A > \angle C$ (рис.2). Докажем, что $BC > B_1C > CA_1$. Действительно, по теореме о биссектрисе

$$\begin{aligned} \frac{BC}{CA_1} &= \frac{BA_1 + CA_1}{CA_1} = \\ &= \frac{BA_1}{CA_1} + 1 = \frac{AB}{AC} + 1 = \frac{AB + AC}{AC}, \end{aligned}$$

откуда

$$CA_1 = BC \frac{AC}{AB + AC}.$$

Аналогично получим, что

$$B_1C = BC \frac{AC}{AB + BC}.$$

Из неравенства треугольника следует, что $\frac{AC}{AB + BC} < 1$. Следовательно, $BC > B_1C$. Так как $\angle A < \angle B$, то $BC < AC$, значит, $BC + AB < AC + AB$, т.е. $B_1C > CA_1$.

Наложим треугольник $B_2B_1'C$, равный треугольнику BB_1C , на AA_1C так, чтобы углы при вершине C совпали. Сторона B_2C пойдет по стороне AC , CB_1' – по стороне CA_1 . Поскольку $AC > BC = B_2C > B_1C$, точка B_2 лежит на отрезке AB_1 .

Итак, $CB'_1 = CB_1$. Далее, так как $BC > B_1C = B'_1C > CA_1$, то точка B'_1 лежит на отрезке A_1B . Следовательно, прямые $B_2B'_1$ и AA_1 пересекутся внутри треугольника ABC в некоторой точке O .

В треугольнике ABB_1 выполнено соотношение $\angle 1 = 180^\circ - \angle A - \beta$. В треугольнике CB_1B имеем $\angle 2 = 180^\circ - \angle C - \beta$. По предположению, $\angle A > \angle C$, следовательно, $\angle 1 < \angle 2$, а так как они смежные, то $\angle 2$ тупой. Но $\angle 2 = \angle 3$ по построению, т.е. $\angle 3$ тоже тупой, и $\angle AB_2O = \angle 3 + \angle C > 90^\circ$. Тогда $AO > B_2O$ и $OA_1 > OB'_1$. Складывая эти неравенства, получаем $AA_1 > B_2B'_1 = BB_1$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Второе доказательство

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AH и BH_1 , причем $AH = BH_1 = l$, $\alpha = \frac{1}{2}\angle A$, $\beta = \frac{1}{2}\angle B$ (рис.3). Докажем, что $BC = AC$.

Доказательство. Опишем около треугольника ABC окружность (рис.4). Продолжим биссектрису AH до пересечения с окружностью в точке D , а биссектрису BH_1 – до пересечения с окружностью в точке D_1 .

Треугольники CAH и DAB подобны по двум углам: $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A = \angle 2$, $\angle CAH = \angle DAB$, следовательно, $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC}$, т.е.

$$AB \cdot AC = AD \cdot l. \quad (1)$$

Аналогично доказывается равенство

$$AB \cdot BC = BD_1 \cdot l. \quad (2)$$

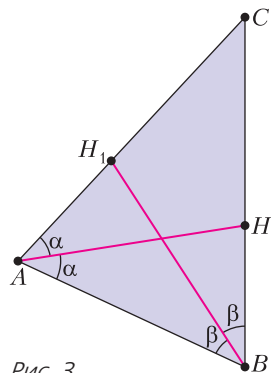


Рис. 3

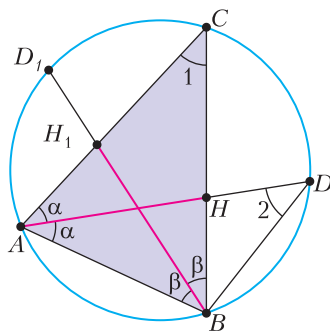


Рис. 4

Построим еще одну окружность ω с диаметром AD (рис.5). Опустим перпендикуляры DE и DF на прямые AC и AB соответственно. Тогда так как AD – диаметр ω , то точки E и F лежат на данной окружности и четырехугольник $AEDF$ вписанный.

Далее, $\angle ADE = \angle ADF = 90^\circ - \alpha$. Значит, $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF}$ и $AE = AF$, AH – биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника AEF . Поэтому $HE = HF = \frac{1}{2}EF$ и $\angle AHE = 90^\circ$.

Умножим обе части равенства (1) на $\frac{1}{2} \sin \angle A$:

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle A = \frac{1}{2} AD \cdot l \sin \angle A.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot l \sin \angle A. \quad (3)$$

Треугольник AEF вписан в окружность с диаметром AD . По теореме синусов $\frac{EF}{\sin \angle A} = AD$, т.е. $EF = AD \sin \angle A$; подставляя в (3), получим

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} l \cdot EF. \quad (4)$$

Проведем аналогичные построения с отрезком BD_1 : построим окружность ω_1 с диаметром BD_1 (рис.6) и опустим перпендикуляры D_1E_1 и D_1F_1 на прямые BC и AB соответственно. Тогда, аналогично (4), получаем

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} l \cdot E_1F_1.$$

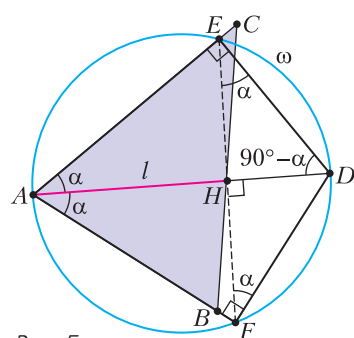


Рис. 5

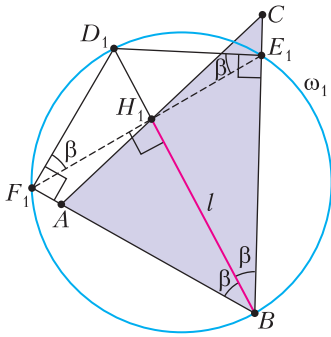


Рис. 6

Сравнивая с (4), получим $EF = E_1F_1$.

Из рисунков 5 и 6 имеем: треугольники AEN и BE_1H_1 равны по двум катетам, поскольку $H_1E_1 = \frac{1}{2}E_1F_1 = \frac{1}{2}EF = HE$ и $H_1B = l = AN$. Следовательно, $\angle EAN = \angle E_1BH_1$, т.е. $\alpha = \beta$, откуда $BC = AC$.

Третье доказательство

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE , CD , причем $AE = CD = l$. Докажем, что $BC = AB$.

Доказательство. Проведем через точку E прямую, параллельную CD , и обозначим ее точку пересечения с AB через M (рис.7). Проведем через точку D прямую, параллельную AE , и обозначим ее точку пересечения с BC через K . Тогда по обобщенной теореме Фалеса имеем

$$\frac{l}{DK} : \frac{l}{ME} = \frac{AB}{BD} : \frac{BC}{BE},$$

следовательно,

$$\frac{ME}{DK} = \frac{AB \cdot BE}{BD \cdot BC}. \quad (5)$$

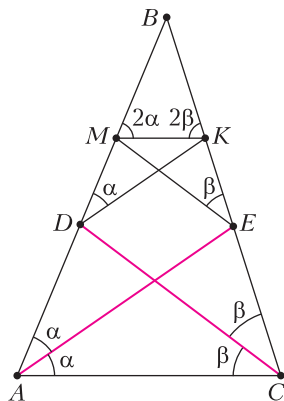


Рис. 7

С другой стороны,

$$\frac{l}{DK} : \frac{l}{ME} = \frac{BE}{BK} : \frac{BD}{MB},$$

поэтому

$$\frac{ME}{DK} = \frac{BE \cdot MB}{BK \cdot BD}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) имеем

$$\frac{AB \cdot BE}{BD \cdot BC} = \frac{BE \cdot MB}{BK \cdot BD}, \text{ или } \frac{AB}{BC} = \frac{MB}{BK}.$$

Следовательно, $AC \parallel MK$.

Угол BMK внешний для треугольника DMK , $2\alpha = \alpha + \angle DKM$, т.е. $\angle DKM = \alpha$ и треугольник DMK равнобедренный. Аналогично, $\angle KME = \beta$ и треугольник MKE равнобедренный. Таким образом, $DM = MK = KE$.

Продолжим AC , MK , DK , DC (рис.8). Обозначим через A_1 точку пересечения прямых DK и AC , через K_1 — прямых DC и MK , через B_1 — прямых BC и A_1K_1 . Получим треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC .

Если $AE = CD$, то $A_1K = CK_1$. Треугольники A_1K_1K и K_1KC равнобедренные, $A_1K = K_1K = KC$, $KK_1 \parallel A_1C$, поэтому A_1K_1KC — равнобокая трапеция. Следовательно,

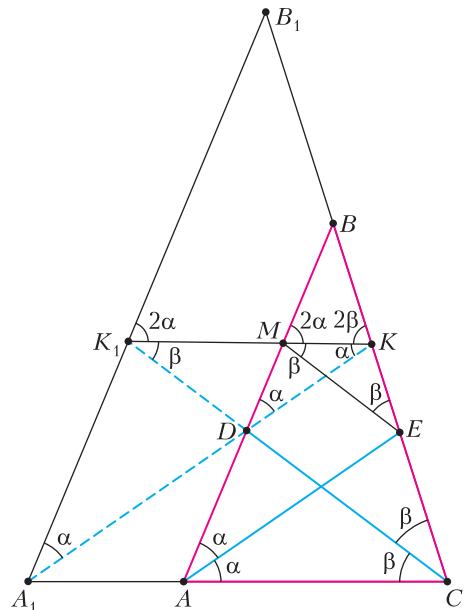


Рис. 8

$\angle A_1 = \angle C$, откуда $\angle A = \angle C$ и треугольник ABC равнобедренный, что и требовалось доказать.

Четвертое доказательство

Лемма. Если в треугольнике ABC $AM = l_a$ — биссектриса, $BM = x$, $MC = y$, то $l_a^2 = bc - xy$ (рис.9).

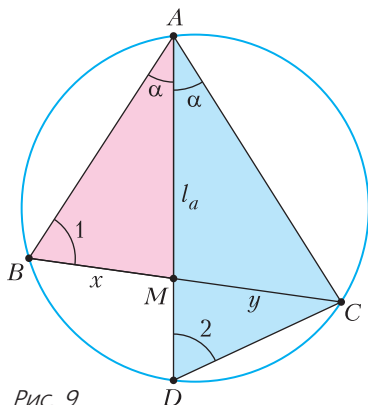


Рис. 9

Доказательство. Продолжим биссектрису AM до ее пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке D . Треугольники ACD и AMB подобны по двум углам, поскольку $\angle BAM = \angle DAC$ и $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{l_a}, l_a \cdot AD = bc.$$

Поскольку $AD = l_a + MD$, имеем $l_a(l_a + MD) = bc$, т.е. $l_a^2 + l_a \cdot MD = bc$. Но по теореме о произведении отрезков хорд $l_a \cdot MD = xy$, откуда $l_a^2 + xy = bc$, $l_a^2 = bc - xy$. Лемма доказана.

Теорема. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и CD , $AE = CD$, $\alpha = \frac{1}{2}\angle A$, $\beta = \frac{1}{2}\angle C$. Тогда $BC = AB$.

Доказательство. Предположим, что $AB > BC$, т.е. $\beta > \alpha$ (рис.10). Тогда в треугольнике AOC , где O — точка пересечения биссектрис, имеем $AO > OC$. Поскольку $CD = OC + OD$, $AE = AO + OE$ и $AE = CD$, то $OD > OE$.

В треугольниках ADC и AEC сторона AC общая, $AE = DC$, $\angle DCA > \angle EAC$, следовательно,

$$AD > EC. \quad (7)$$

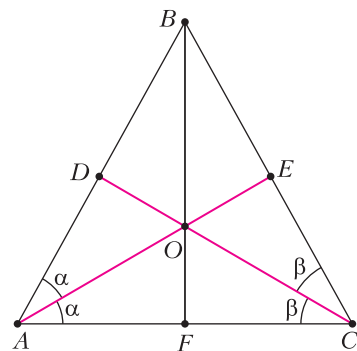


Рис. 10

По лемме имеем $AE^2 = AB \cdot AC - CE \cdot BE$ и $CD^2 = BC \cdot AC - AD \cdot BD$, откуда получаем следующее равенство:

$$AB \cdot AC - BE \cdot CE = BC \cdot AC - AD \cdot BD. \quad (8)$$

Так как $AB > BC$, то $AB \cdot AC > BC \cdot AC$, но из (7) $EC < AD$. Чтобы равенство (8) выполнялось, надо положить

$$BE > BD. \quad (9)$$

Далее, BF — биссектриса угла B , $\angle DBO = \angle OBE = 90^\circ - \alpha - \beta$; $\angle BDO$ — внешний угол в треугольнике ADC , поэтому $\angle BDO = 2\alpha + \beta$. Аналогично, $\angle BEO = 2\beta + \alpha$. Тогда

$$S_{\Delta BDO} = \frac{1}{2} BD \cdot BO \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \frac{1}{2} BD \cdot BO \cos(\alpha + \beta),$$

таким же образом

$$S_{\Delta BEO} = \frac{1}{2} BE \cdot BO \cos(\alpha + \beta).$$

Поскольку $BE > BD$, то

$$S_{\Delta BDO} < S_{\Delta BEO}. \quad (10)$$

С другой стороны, имеем $\angle DOB = 180^\circ - (2\alpha + \beta) - (90^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ - \alpha$, аналогично, $\angle EOB = 90^\circ - \beta$, откуда получаем

$$S_{\Delta BDO} = \frac{1}{2} OD \cdot OB \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} OD \cdot OB \cos \alpha$$

и, из таких же соображений,

$$S_{\Delta BEO} = \frac{1}{2} OE \cdot OB \sin(90^\circ - \beta) = \frac{1}{2} OE \cdot OB \cos \beta.$$

Но $\cos \alpha > \cos \beta$ (так как $\beta > \alpha$) и $OD > OE$. Поэтому

$$S_{\Delta BDO} > S_{\Delta BEO},$$

что противоречит соотношению (10).

XII Турнир городов

Задачи осеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. (3)¹ На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых – отмеченные точки?

С.Дворянинов

2. Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что

а) (2) каждый побывал в полуфинале более одного раза;

б) (3) каждый побывал в финале.

Б.Френкин

3. (5) В куче n камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких n начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Ф.Ивлев

4. (5) Дан равносторонний треугольник со стороной d и точка P , расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам a , b и c . Докажите, что найдется равносторонний треугольник со стороной a и точка Q , расстояния от которой до вершин этого треугольника равны b , c и d .

А.Эвнин

5. (5) Директор зоопарка приобрел восемь слонов с номерами 1, 2, ..., 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что

масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошел слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)

А.Грибалко

10–11 классы

1. (3) Каждый из квадратных трехчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $P(x) + Q(x)$ с действительными коэффициентами имеет кратный корень. Обязательно ли все эти корни совпадают?

Б.Френкин

2. (4) На прямой отметили точки $X_1, \dots, X_{10}$ (именно в таком порядке) и построили на отрезках $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_9X_{10}$ как на основаниях равнобедренные треугольники с углом α при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на полуокружности с диаметром X_1X_{10} . Найдите α .

Е.Бакаев

3. (5) Натуральное число N кратно 2020. В его десятичной записи все цифры различны, причем если любые две из них поменять местами, получится число, не кратное 2020. При каком количестве цифр в десятичной записи числа N такое возможно?

С.Токарев

4. (5) Стороны треугольника разделены основаниями биссектрис на два отрезка каждая. Обязательно ли из шести образовавшихся отрезков можно составить два треугольника?

Л.Емельянов

5. По кругу лежит 101 монета, каждая массой 10 г или 11 г. Докажите, что найдется монета, для которой суммарная масса k монет слева от нее равна суммарной массе k монет справа от нее, если

а) (3) $k = 50$;

б) (3) $k = 49$.

А.Грибалко

¹ В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Сложный вариант

8–9 классы

1. (4) Для всякого ли выпуклого четырехугольника найдется окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках?

А.Перепечко

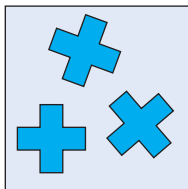
2. (7) См. задачу M2630 «Задачника «Кванта».

3. Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было

- а) (3) хотя бы сто чисел 5;
- б) (4) хотя бы сто чисел 10?

А.Аржанцев

4. (7) Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика прилегают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов? (На рисунке показано, как можно вырезать три креста.)



А.Грибалко

5. (8) Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных?

М.Евдокимов

6. (10) См. задачу M2633а «Задачника «Кванта».

7. (6 + 6) См. задачу M2631 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1. (4) Даны n натуральных чисел. Боря для каждой пары этих чисел записал на черную доску их среднее арифметическое, а на белую доску – их среднее геометрическое, и для каждой пары хотя бы одно из этих двух средних было целым. Докажите, что хотя бы на одной из досок все числа целые.

Б.Френкин

2. (5) Барон Мюнхгаузен придумал теорему: если многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots$ имеет n натуральных корней, то на плоскости найдутся a прямых, у которых ровно b точек пересечения друг с другом. Не ошибается ли барон?

Ф.Ивлев

3. (6) Окружности α и β с центрами в точках A и B соответственно пересекаются в точках C и D . Отрезок AB пересекает окружности α и β в точках K и L соответственно. Луч DK вторично пересекает окружность β в точке N , а луч DL вторично пересекает окружность α в точке M . Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника $KLMN$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC .

К.Кноп

4. (7) См. задачу M2633а «Задачника «Кванта».

5. (7) Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 100 прямоугольников, которые все ему подобны, но среди которых нет двух одинаковых?

М.Мурашкин

6. (10) См. задачу M2632 «Задачника «Кванта».

7. (12) Белая фигура «жук» стоит в угловой клетке доски $1000 \times n$, где n – нечетное натуральное число, большее 2020. В двух ближайших к ней углах доски стоят два черных шахматных слона. При каждом ходе жук или переходит на клетку, соседнюю по стороне, или ходит как шахматный конь. Жук хочет достичь противоположного угла доски, не проходя через клетки, занятые или атакованные слоном, и побывав на каждой из остальных клеток ровно по одному разу. Покажите, что количество путей, по которым может пройти жук, не зависит от n .

Н.Белухов

Материал подготовили Е. Бакаев,

А. Грибалко, С. Дориченко,

А. Заславский, П. Кожевников,

А. Кушнир, Л. Медников, В. Ретинский,

Е. Рябов, М. Скопенков, А. Тертерян,

И. Фролов, Б. Френкин, Е. Хинко,

А. Шаповалов

Региональный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике

Первый тур

7 класс

Задача 1. Бег по кругу (10 баллов)

С линии старта одновременно в одну сторону по круговой дорожке стадиона побежали два спортсмена A и B . Бегун A первую половину каждого круга бежал со скоростью $2v$, а вторую — со скоростью v . Бегун B первую половину времени, затраченного на прохождение круга, бежал со скоростью v , а вторую — со скоростью $2v$. Известно, что бегун A пробежал полный круг за $T_A = 90$ с. Через какое время t один спортсмен догнал другого первый раз после старта? Через какое время T один из бегунов обогнал другого ровно на один круг?

А.Аполонский

Задача 2. Как ни крути (10 баллов)

Муравей направился из вершины A куба, стоящего на горизонтальной поверхности, к вершине B (рис.1), перемещаясь только по ребрам этого куба, причем движение по горизонтальным и вертикальным ребрам обязательно чередовались и он не побывал ни в какой вершине дважды.

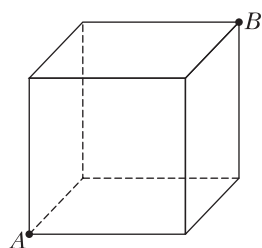


Рис. 1

Скорость перемещения муравья по вертикальным ребрам вверх была равна v , вниз — $3v$, а по горизонтальным он двигался с одинаковой скоростью. Определите скорость муравья по горизонтальным ребрам, если средняя скорость его движения от A к B не зависела от маршрута.

Д.Подлесный

Задача 3. Кубик Рубика (10 баллов)

Кубик Рубика с ребром a не имеет пустот и сложен из одинаковых кубиков плотностью ρ_1 с ребром $a/3$. Если все мелкие кубики, не видимые на рисунке 2, заменить

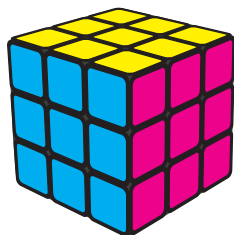


Рис. 2

на другие, такие же по размеру, но с плотностью ρ_2 , то средняя плотность кубика Рубика увеличится в $n = 3$ раза. Чему равно отношение плотностей ρ_2/ρ_1 ?

С.Кармазин

Задача 4. 3D принтер (20 баллов)

На 3D принтере идет печать полого кубика с внешней стороной $a = 10$ см (рис. 3). Катушка с пластиковым прутом квадратного сечения стоит на весах. Показания m весов с начала и до окончания печати вместе с длиной L прутка, оставшегося на катушке, заносятся в таблицу:

$m, \text{г}$	670	600	575	490	455	380	310
$L, \text{м}$	125	110	98	80	68	55	35

Определите:

- 1) массу m_0 пустой катушки;
- 2) линейную плотность λ прутка (массу одного метра);
- 3) плотность ρ материала прутка;
- 4) объем полости V в получившемся кубике.

Примечание. На рисунке 3 только прутки изображены в масштабе 1:1, а размеры кубика и весов даны условно. Для измерения необходимых размеров прутка можно использовать свою линейку или миллиметровую бумагу.

А.Вергунов, Д.Логинов

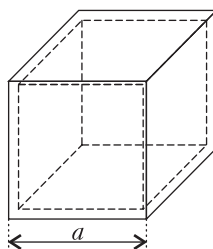
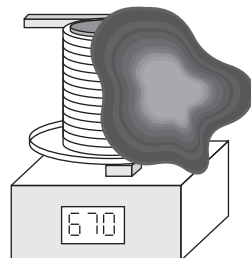


Рис. 3



8 класс

Задача 1. Часы (10 баллов)

На часах в некоторый момент времени угол между часовой и минутной стрелками составил $\alpha = 60^\circ$. Определите, через сколько минут угол между стрелками в следующий раз может снова оказаться равным α . Положение стрелок на рисунке 4 – условное.



В.Яворский Рис. 4

Задача 2. Соревнование калориметров (10 баллов)

В два калориметра положили по куску льда и в течение $\tau_k = 10$ мин стали нагревать их содержимое с одинаковой мощностью. Известно, что первый кусок льда легче второго на $\Delta m = 100$ г. На рисунке 5 приведена

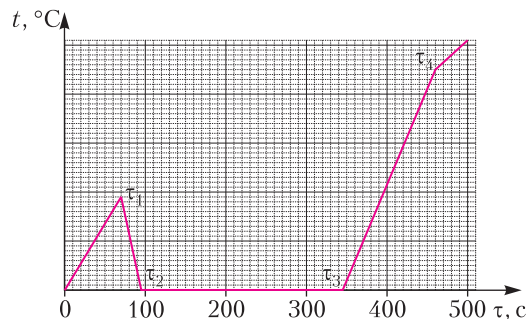


Рис. 5

зависимость разности температур t в калориметрах от времени τ . К сожалению, шкала оси разности температур не сохранилась, а изломам графика соответствуют времена τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4 . Объясните, какие физические процессы соответствуют каждому линейному участку графика. Определите:

- 1) мощность P нагревателя;
- 2) массы m_1 и m_2 кусков льда;
- 3) начальные и конечные температуры кусков льда;
- 4) разность температур Δt в момент времени τ_1 .

Справочные данные: удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг·°C), удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

А.Евсеев

Задача 3. Неразрывность (10 баллов)

При каких значениях массы груза M возможно равновесие системы, приведенной на рисун-

ке 6, если $m = 4,0$ кг?

Горизонтальный рычаг массой $2m$ разделен на 8 одинаковых участков. Нить удерживает максимальное натяжение $T_0 = 25$ Н. Ускорение $g = 10$ Н/кг.

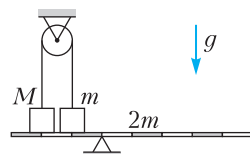


Рис. 6

М.Замятнин

Задача 4. Физика в медицине (20 баллов)

Для измерения некоторых технических характеристик медицинского шприца экспериментатор Глюк собрал установку, изображенную на рисунке 7. Исследуемый шприц он закрепил в вертикальном положении.

Вместо иглы к нему присоединил тонкую гибкую трубку, второй конец которой соединил с отверстием в дне цилиндрического сосуда. Затем Глюк измерил разность уровней Δh воды в сосуде и шприце, при которой поршень шприца начинал двигаться вверх в процессе плавного подъема сосуда.

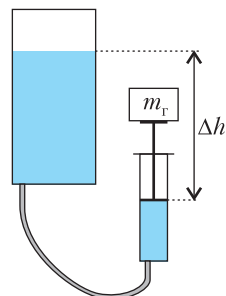


Рис. 7

Оказалось, что величина Δh зависит от массы m_T груза, закрепленного на верхнем упоре поршня. Результаты измерений зависимости $\Delta h(m_T)$ он представил в таблице, в которой также приведена величина Δh_x для груза неизвестной массы m_x . Определите площадь S поршня и силу трения скольжения $F_{\text{тр}}$ между поршнем и стенкой шприца. Для этого:

- 1) выведите теоретическую зависимость $\Delta h(m_T)$;
- 2) постройте график экспериментальной зависимости $\Delta h(m_T)$;
- 3) с помощью графика определите $F_{\text{тр}}$ и S ;
- 4) найдите, чему равна неизвестная масса m_x груза в шестой строке таблицы.

№	m_T , г	Δh , м
1	15	1,36
2	24	1,47
3	37	1,53
4	52	1,72
5	64	1,76
6	m_x	1,90
7	100	2,08

Примечание. Массой поршня можно пренебречь; воздушная прослойка между поршнем и водой в шприце отсутствует; плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3$ кг/м³; ускорение $g = 10$ Н/кг.

М.Чжан, С.Кармазин

9 класс

Задача 1. Леопольд атакует (10 баллов)

Кот Леопольд, находясь на крыше дома, два раза выстрелил в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями камушками из рогатки. Перед падением на землю скорости камушков были направлены перпендикулярно друг другу. Определите высоту h дома, если известно, что суммарное время полета камушков $t_0 = 3$ с, а времена их движения отличаются в два раза. С какой скоростью камушки были выпущены из рогатки? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Фольклор

Задача 2. Тяжелый стакан (10 баллов)

Внешний радиус цилиндрического стакана, находящегося в высоком аквариуме с шероховатым дном, равен R , высота L , толщина стенок и дна d (рис.8). Сверху стакан герметично закрыт тонким легким диском радиусом R . Плотность жидкости в аквариуме ρ , плотность материала стакана 20ρ .

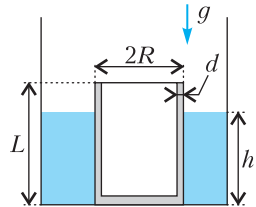


Рис. 8

1) Получите зависимость силы реакции N , с которой стакан действует на дно аквариума, от уровня h налитой в аквариум жидкости. Постройте график зависимости $N(h)$. Укажите на графике характерные точки, выразив их через величины, заданные в условии.

2) При каком соотношении между d и L стакан может всплыть?

Считайте, что R фиксировано и выполняется условие $0 < d \leq 0,040R$.

С.Кармазин

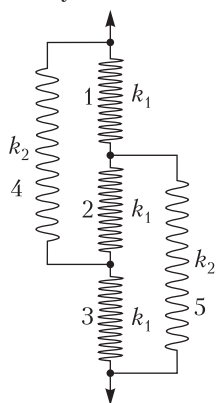


Рис. 9

Задача 3. Пять пружинок (10 баллов)

Пять пружинок соединены так, как показано на рисунке 9, и в исходном состоянии ни одна из них не деформирована. Коэффициенты жесткости трех пружин равны k_1 , а двух оставшихся – k_2 .

1) Чему равен эффективный коэффициент жесткости системы пружин?

2) Систему растягивают, прикладывая к ее концам одинаковые силы. При каком соотношении k_1 и k_2 пружина 2 окажется сжатой?

А.Аполонский

Задача 4. «Серый ящик» (20 баллов)

В «сером ящике» собрана электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке 10. К клеммам AB ящика подключают

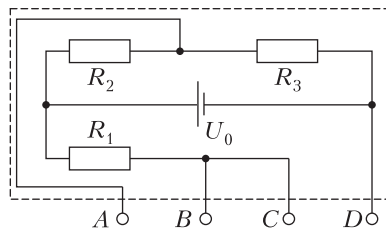


Рис. 10

идеальный вольтметр, а к клеммам CD – различные резисторы, сопротивления которых в n раз больше, чем у резистора R_1 . Зависимость показаний вольтметра U от n представлена в таблице:

$U, \text{В}$	2,2	3,9	5,0	5,4	6,2	6,5	6,9
n	1	2	3	4	5	7	8

1) Выведите формулу теоретической зависимости $U(n)$.

2) Постройте график зависимости $U(n)$ по данным таблицы.

3) Определите напряжение U_0 источника и отношение $k = R_3/R_2$. Для этого можете:

либо осуществить линеаризацию зависимости $U(n)$, т.е. найти такую функцию $z(n)$, для которой зависимость $U(z)$ является линейной, и построить ее график, по которому определить U_0 и k (за такой вариант решения этого пункта вы получите до 12 баллов);

либо использовать две пары значений из таблицы и уравнение, полученное в пункте 1 задания; выбор значений U и n для расчета необходимо обосновать с помощью графика, построенного в пункте 2 задания (за такой вариант решения этого пункта вы получите до 8 баллов).

Примечание. Баллы за разные способы решения пункта 3 не суммируются!

С.Кармазин

10 класс

Задача 1. Разгон паровоза (15 баллов)

На трех фотоснимках одного участка местности, сделанных с равными интервалами

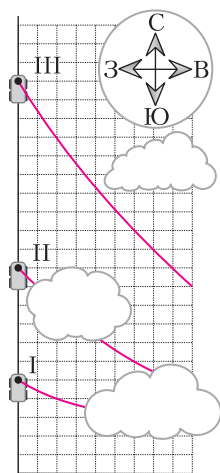


Рис. 11

труба неподвижного паровоза. Цены делений шкал сетки по вертикали и горизонтали равны.

М.Замятнин

Задача 2. Шарнир и колечко (15 баллов)

В вертикальной плоскости находятся два невесомых стержня, соединенных шарниром массой M (рис. 12). На свободном конце верхнего стержня закреплен груз массой m , а на свободном конце нижнего стержня закреплено легкое колечко, которое может скользить по гладкой горизонтальной закрепленной спице. Длина верхнего стержня l , длина нижнего стержня $L > l$. Изначально стержни составляют углы α с горизонтом и удерживаются неподвижно. Затем их отпускают. Найдите:

1) ускорения шарнира $a_{ш0}$ и грузика $a_{г0}$ сразу после начала движения;

2) ускорение колечка a_k в момент времени, когда шарнир, груз и колечко окажутся на одной прямой.

Считайте, что стержни и спица тонкие и все тела могут пролетать мимо друг друга не соударяясь. Ускорение свободного падения g .

А.Уймин

Задача 3. Воздушный шар (10 баллов)

Оболочка воздушного шара изготовлена из нерастяжимой плотной ткани с массовой поверхностной плотностью σ (масса 1 м^2 поверхности оболочки численно равна σ).

времени τ , запечатлен игрушечный паровоз и фрагменты шлейфа дыма от него. Наложённые друг на друга фотографии приведены на рисунке 11. Зная, что, тронувшись с места, паровоз поехал на север с постоянным ускорением $a = 0,4 \text{ м/с}^2$ и что в этот день дул западный ветер со скоростью $u = 4 \text{ м/с}$, найдите интервал времени τ и расстояние от точки O , на котором находилась

Если оболочку полностью заполнить газом, то она приобретает форму сферы радиусом r . В пустую оболочку закачивают некоторое количество гелия.

1) При каких значениях массы m гелия шар будет подниматься?

2) Какому соотношению должны удовлетворять параметры шара, чтобы его подъем был возможен?

Молярная масса гелия M_{He} , воздуха $M_{\text{в}}$, атмосферное давление p_0 , температура T . Объем шара $V = 4\pi r^3/3$, площадь сферы $S = 4\pi r^2$.

А.Аполонский

Задача 4. Псевдоэксперимент «Вязкое трение» (10 баллов)

Известно, что при падении бумажного конуса на него действует сила $F_{\text{сопр}}$ вязкого трения о воздух, зависящая от скорости движения конуса: $F_{\text{сопр}} = kv^n$. Изучите падение бумажного конуса при его разных массах и определите значения коэффициента n . Погрешность оценивать не нужно.

Примечание. В математике часто используется функция логарифма, которая является обратной к функции возведения в степень. По свойствам данной функции если $F_{\text{сопр}} = kv^n$, то $\ln F_{\text{сопр}} = \ln k + n \ln v$. Значение логарифма от некоторого числа можно вычислить на калькуляторе.

Оборудование. Два сборных фотодатчика, блок питания, электронные весы, USB-осциллограф, ноутбук, отвес, линейка, ножницы, клей, выкройка для конуса, пластилин, салфетка, миллиметровка для построения графиков.

Описание установки. Установка (рис. 13) позволяет с большой точностью определять время свободного падения бумажного конуса на участке, где движение конуса является равномерным. Для измерения времени движения конуса используется система из двух сборных фотодатчиков, верхнего 4 и нижнего 5, сигнал с которых через USB-осциллограф 6 поступает в ноутбук 7.

Верхний сборный фотодатчик состоит из лазера и фотоэлемента. При пересечении конусом луча лазера напряжение на фотоэлементе изменяется.

Нижний сборный фотодатчик представляет собой квадратный ящик, к двум противо-

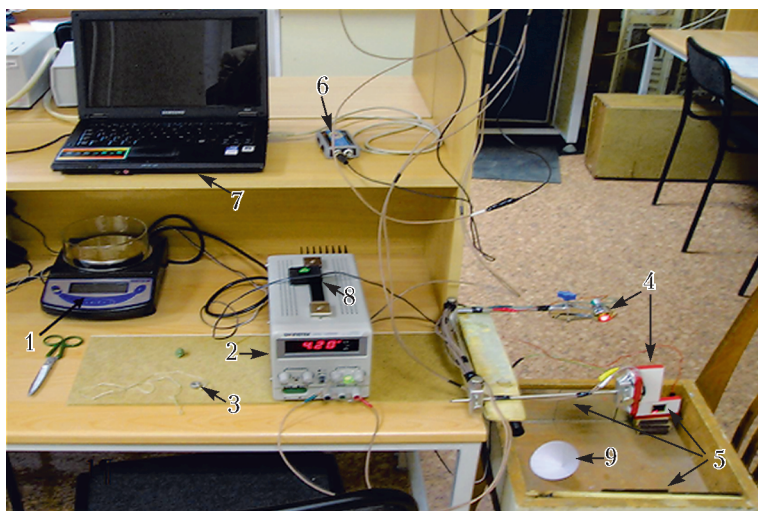


Рис. 13

положным стенкам которого изнутри приклеены плоские зеркала. На боковой стенке ящика закреплен лазер, луч которого, многократно отразившись от зеркал, попадает на фотоэлемент, двигаясь все время в одной горизонтальной плоскости. При падении конуса внутрь ящика луч лазера гарантированно перекрывается и напряжение на фотоэлементе изменяется. Расстояние от луча верхнего лазера до плоскости, образуемой лучами нижнего лазера, равно $(23,0 \pm 0,5)$ см.

Фотоэлементы соединены в электрическую цепь последовательно друг с другом и подключены к USB-осциллографу, который преобразует значение суммарного напряжения на фотоэлементах в цифровой вид и передает в ноутбук. На ноутбуке установлена программа, отображающая график зависимости напряжения от времени с точностью до 0,5 мс. С помощью полученного графика можно определить время движения конуса между двумя пересечениями лучей лазеров.

Для определения массы конуса 9 используются электронные весы 1. Для изменения мас-

сы конуса внутрь него помещают небольшие кусочки пластилина.

Порядок проведения измерений

1. Внутри конуса помещается некоторое количество пластилина и на электронных весах определяется общая масса конуса с пластилином.

2. Конус размещают острием вниз на расстоянии примерно 60–70 см над верхним лазером и отпускают. Расстояние в 60–70 см гарантирует, что при падении конуса к верхнему

лазеру его движение будет практически равномерным.

3. В окне программы по зависимости суммарного напряжения от времени (рис.14) определяются и заносятся в таблицу:

T_1, T_2 – времена начала и окончания первого провала;

T_3, T_4 – времена начала и окончания второго провала;

U_0 – постоянный уровень напряжения;

U_1, U_2 – уровни напряжений, соответствующие первому и второму провалам.

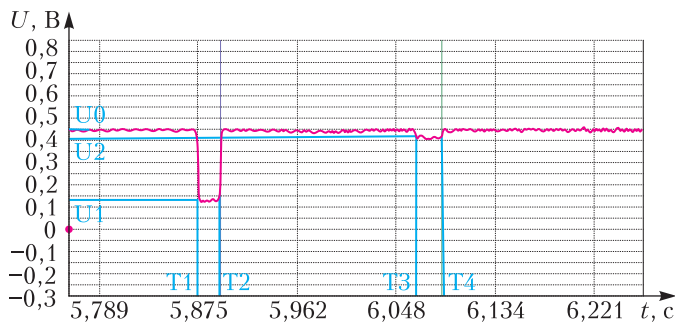


Рис. 14

Масса конуса с пластилином, мг	T_1 , мс	T_2 , мс	T_3 , мс	T_4 , мс	U_0 , В	U_1 , В	U_2 , В
533	161	181	372	386	0,450	0,123	0,406
600	128	143	331	341	0,450	0,136	0,407
700	192	198	372	381	0,450	0,127	0,402
790	546	552	715	723	0,450	0,123	0,410
894	133	149	289	301	0,450	0,126	0,402
990	120	131	257	277	0,450	0,122	0,392
1125	570	576	694	709	0,450	0,122	0,403

4. Опыты повторяются с другой массой пластилина внутри конуса.

М.Карманов

11 класс

Задача 1. Переправа (12 баллов)

Лодка переплывает реку по прямой, перпендикулярной берегам. Ее скорость относительно воды равна v_0 . До середины реки скорость течения изменяется по закону $u = \alpha x$ от нуля до $v_0/2$ – скорости воды на середине реки, где α – известный коэффициент, x – расстояние от берега. После середины реки скорость уменьшается до нуля у другого берега по тому же закону. Определите зависимость от времени угла между вектором скорости лодки относительно воды и направлением движения относительно берега. Через какое время лодка окажется на другом берегу?

А.Уймин

Задача 2. Доставка воды пневмопочтой (12 баллов)

Где-то в Космосе, вдали от звезд, движется по инерции фабрика-звездолет. В технологических процессах используется вода, которая доставляется к нужному месту порциями массой $m = 288$ г по гладким трубам, площадь поперечного сечения которых постоянна и равна $S = 50$ см². Каждая порция содержится между двумя одинаковыми поршнями, масса каждого из которых тоже равна m . Температура порции T при движении в установившемся режиме (колебания поршней относительно друг друга отсутствуют) остается неизменной. Движение поршней и порции воды по трубе обеспечивается давлением сжатого газа (рис.15): «позади» них давление газа p_1 всегда в 1,5 раза больше, а «перед» ними давление p_2 в два раза меньше, чем давление насыщенного водяного пара при температуре T . Какая часть массы воды в порции при движении в установившемся режиме находится в жидком состоянии? Каково в этом режиме расстояние между поршнями? Плотность насыщенного водяного пара при температуре T составляет $\epsilon = 6\%$ от плотности жидкой воды, которая при этой

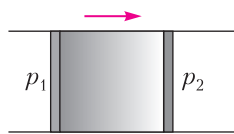


Рис. 15

температуре равна $\rho \approx 0,72$ г/см³. В вычислениях для простоты можно считать воду совершенно несжимаемой, а водяной пар – почти идеальным газом. Ответ для расстояния между поршнями выразите в см с точностью до целого значения.

К.Парфенов

Задача 3. Полетели (12 баллов)

В вакууме в невесомости между круглыми полюсами электромагнита на расстоянии x от оси магнита покоится частица массой m и зарядом q (рис. 16). Сначала магнитное поле равно нулю. Затем, за малый промежуток времени, индукция магнитного поля увеличивается до значения B_0 и поддерживается постоянной в течение времени $\tau < \pi m / (qB_0)$, после чего очень быстро уменьшается до нуля.

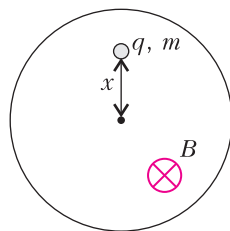


Рис. 16

- 1) Почему частица приходит в движение? Опишите качественно траекторию частицы.
- 2) С какой скоростью движется частица после включения магнитного поля?
- 3) С какой скоростью движется частица после выключения магнитного поля?
- 4) На каком минимальном расстоянии от оси магнита проходит траектория частицы?
- 5) Через какое время от момента включения поля частица окажется на минимальном расстоянии от оси магнита?

Магнитное поле в пределах полюсов можно считать однородным. Перемещением частицы за время включения и выключения поля можно пренебречь.

А.Аполонский

Задача 4. Эффект Холла (14 баллов)

Электроны являются носителями тока в металлах и полупроводниках n -типа. Если образец с током, в данном случае прямоугольный кусочек пленки полупроводника n -типа, помещен в магнитное поле и через него протекает электрический ток, то на движущиеся электроны действует сила Лоренца $F = evB$, перпендикулярная скорости $\vec{v}$ электрона и вектору $\vec{B}$ магнитной индукции (рис.17). Здесь v – средняя скорость дрейфа электронов, связанная с проходящим током I и прямо пропорциональная напряженности электрического поля $\vec{E}$ в направлении

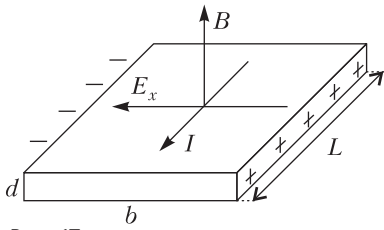


Рис. 17

этого тока: $v = \mu E$, где коэффициент пропорциональности μ называется подвижностью электронов. Из-за действия на электроны силы Лоренца (на рисунке она направлена в сторону левой грани) происходит разделение зарядов и появляется поперечное электрическое поле с напряженностью E_x . Возникновение этого поля при протекании тока в образце, помещенном в магнитное поле, называют эффектом Холла. Перемещение электронов в направлении левой грани прекращается, когда силу Лоренца уравновешивает электрическая сила: $evB = eE_x$. В установившемся режиме напряженность поперечного электрического поля $E_x = vB$.

Ниже описан эксперимент, в котором эффект Холла используется для исследования свойств полупроводника (рис. 18). Ток создает источник с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и малым внутренним сопротивлением. Величина маг-

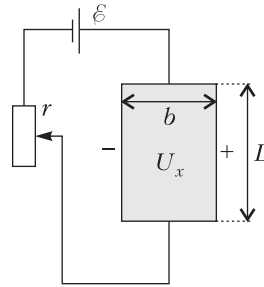


Рис. 18

нитной индукции $B = 1,0$ Тл. Для изменения тока применяют переменный резистор, а вольтметром измеряют напряжение U_x между боковыми гранями в направлении, перпендикулярном магнитному полю и направлению протекающего тока. Размеры полупроводникового образца: толщина $d = 1,0$ мм, ширина $b = 5,0$ мм, длина $L = 1,0$ см. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. В таблице представлена зависимость U_x от сопротивления r переменного резистора:

$r, \text{кОм}$	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0,0
$U_x, \text{В}$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,5

С.Карамзин

Публикацию подготовил В.Слободянин

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Кротовые норы на льду моря

Е.КРАСНОВА, В.ПТУШЕНКО

ПРЕДСТАВЬТЕ СЕБЕ ТАКУЮ КАРТИНУ: зима, гладь моря, покрытого льдом, и посреди этой глади то тут, то там... кротовые норы! Нет, не «астрофизические», а вполне осязаемые холмики, какие бывают на поверхности земли, но только огромные — до нескольких метров в высоту, ледяные, и посреди моря (рис. 1)!



Фотографии В.Птушенко

Рис. 1

Эти впечатляющие образования — напоминание о том, что «дыхание» моря не прекращается и зимой. Трудно вообразить, как могут сочетаться приливы и отливы с неподвижностью льда, сковавшего поверхность воды. И действительно, это сочетание —

трудное, травматичное для ледяного покрова. Лед примерзает к берегу – земля по мере наступления зимних холодов остывает быстрее, чем вода, и лед в контакте с ней схватывается быстрее. Здесь он неподвижен. А вдали от берега продолжают приливно-отливные колебания льда вместе с поднимающейся и опускающейся по два раза в сутки водой. Правда, сплошной ледовый покров немного сковывает эти движения: в большинстве районов Белого моря, где сделаны фотографии, представленные в статье и на четвертой странице обложки журнала, размах колебаний снижается на десяток-другой сантиметров, но при высотах приливов 1,5–2 м это снижение почти незаметно. А дальше судьба льда может складываться очень по-разному, в зависимости от множества местных условий: от высоты прилива, рельефа прибрежного морского дна, морских течений, температуры воздуха и т.д. Относительно тонкий лед может проявлять некоторую эластичность, но более толстый лед будет ломаться под давлением приливной волны, образуя трещины, идущие вдоль берега. Через эти трещины вода может заливать поверхность припайного льда. Если же напор приливной волны достаточно сильный, то лед начинает крошиться вблизи разлома, образуются льдины, которые могут быть выброшены на поверхность припайного льда, загнаны под нее или встать дыбом, образуя так называемые ропаки (отдельные льдины, стоящие вертикально или наклонно) или же целые береговые гребни. В некоторых случаях (например, при наличии течений) вдоль берега образуются незамерзающие полыньи. Наверное, эти процессы можно в какой-то мере сравнить с формированием рельефа



Рис. 2



Рис. 3

земной поверхности, только происходящим за гораздо более короткие времена.

Но самые интересные формы зимнего морского рельефа образуются вокруг камней, лежащих на мелководье, обнажающихся в малую воду и скрывающихся под ее поверхность во время подъема уровня моря. При наступлении сильных морозов, когда лед успевает замерзнуть за те несколько часов, пока камни скрыты под водой, с наступлением отлива он будет опускаться и ломаться о макушки камней. Лед словно раскроется лепестками вокруг камня (рис. 2). Через образовавшиеся вокруг камня трещины на поверхность льда будут заливаться новые порции воды, создавая вокруг камня прекрасный «каток». При сильных морозах вода, испаряющаяся из этих трещин, будет конденсироваться на камне и окруживших его ледяных лепестках, приводя к нарастанию слоя льда (так называемый сублимационный лед). Высота такого шатра может достигать человеческого роста (рис. 3) или даже больше. А в ледяных пещерках в стенах-лепестках шатра встречаются вмёрзшие в них водоросли (рис. 4).

И вот вся поверхность морского залива покрывается этими гигантскими «кратовинами», сверкающими на зимнем солнце...



Рис. 4

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №1)

1. 4.

Пример. Можно сложить большой куб, у которого две противоположные грани – белые, а остальные – красные.

Оценка. У 8 кубиков в совокупности $8 \times 2 = 16$ красных граней. На одну грань большого куба нужно 4 красных грани маленьких кубиков. Значит, полностью красными получится сделать не более $16/4 = 4$ грани большого куба.

2. 24.

Разрежем фигуру на три прямоугольника (рис.1).

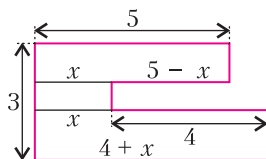


Рис. 1

Сумма длин их вертикальных сторон равна 3. Обозначим один из отрезков x , выразим через x остальные горизонтальные отрезки.

Итак, сумма длин вертикальных отрезков границы фигуры равна $3 \times 2 = 6$, а сумма горизонтальных $5 + (5-x) + 4 + (4+x) = 18$, что в сумме дает 24.

3. Решение показано на рисунке 2.

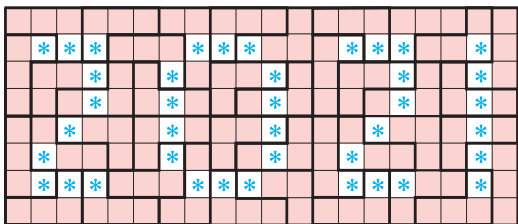


Рис. 2

4. $2^{11} - 3^3 = 2021$.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №11–12 за 2020 г.)

9. Да.

Раскрасим вершины в шахматном порядке (рис.3). Запишем в черных вершинах 4 различных простых числа, а в белых – удвоенные черные числа, лежащие напротив (по диагонали куба). Все числа будут разные, а произве-

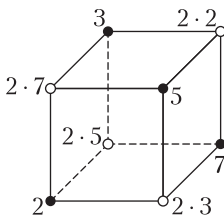


Рис. 3

дения на гранях будут равны произведению взятых простых и еще двух двоек.

10. а) Обозначим наш четырехугольник $ABCD$ и отметим точки K и L , как показано на рисунке 4. Докажем, что угол B в два раза больше угла D . Треугольники ADK и ABL прямоугольные, первый из них – увеличенный второй (катеты удлинились во столько раз, во сколько диагональ клетки больше ее стороны). Значит, углы у них одни и те же, и углы ADK и ABL равны. Но угол ABL – половина угла ABC .

б) См. рисунок 5.

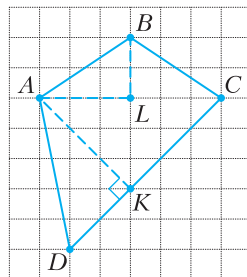


Рис. 4

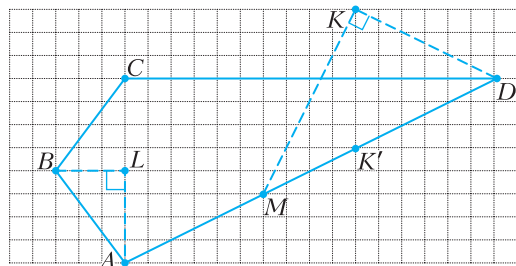


Рис. 5

Докажем, что угол ABC в 4 раза больше угла ADC . Точки K и K' симметричны относительно CD , поэтому угол ADK в 2 раза больше угла ADC . Треугольники MDK и ABL – подобные прямоугольные, откуда получаем требуемое.

11. В этом решении мы применим теорему Менелая, затем теорему Чебы. О них можно прочитать, например, в статье А.Егорова «Теоремы Менелая и Чебы» в «Кванте» №3 за 2004 год.

Итак, применим теорему Менелая (в векторной форме) для треугольника ABC и прямой, пересекающей его стороны или их продолжения в точках A_B , A_C , A_1 (рис.6):

$$\frac{\overline{AA_B}}{\overline{A_BB}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_C}}{\overline{A_CA}} = -1.$$

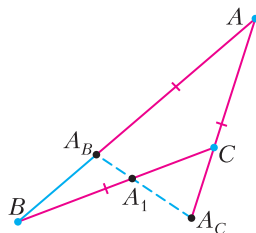


Рис. 6

Пусть $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Преобразуем:

$$\frac{a}{c-a} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{b-a}{a} = -1,$$

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{a-c}{b-a}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \frac{b-a}{c-b}, \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{c-b}{a-c}.$$

Теперь применим теорему Чевы (в векторной форме) для треугольника ABC и точек A_1 , B_1 и C_1 , лежащих на его сторонах или их продолжениях:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{a-c}{b-a} \cdot \frac{b-a}{c-b} \cdot \frac{c-b}{a-c} = 1.$$

Следовательно, прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

12. а) Да, существует.

Включим все выключатели, кроме одного выключателя a . Мы узнаем, к какой лампочке он подключен, потому что только эта лампочка не загорится. Сделаем так со всеми выключателями, кроме одного выключателя z , на это уйдет как раз $2n-1$ попытка. Посмотрим, к какой лампочке на данный момент нашелся только один выключатель – к этой лампочке и подключен z .

б) Да, существует.

Маленькими латинскими буквами будем обозначать выключатели, а большими – лампочки. Будем писать $a \rightarrow K$, если выключатель a подключен к лампочке K .

Включим все выключатели, кроме выключателей a и b . Если не включится только одна лампочка K , то $a \rightarrow K$ и $b \rightarrow K$. Если не включатся две лампочки K и L , то либо $a \rightarrow K$, $b \rightarrow L$, либо $a \rightarrow L$, $b \rightarrow K$; в таком случае будем говорить, что лампочки K и L *соответствуют* паре (a, b) , и писать $(a, b) \rightarrow (K, L)$.

Произвольным образом разобьем все выключатели на n пар: a_1 и b_1 , a_2 и b_2 и т.д. Первым действием включим все выключатели, кроме двух выключателей первой пары; вторым действием – все, кроме второй пары; третьим – все, кроме третьей пары, и т.д., всего таким образом сделаем $n-1$ действие (для всех пар, кроме последней). Если выключатели какой-то пары оба подключены к одной лампочке, то исключим их из дальнейшего рассмотрения. Теперь каждая лампочка соответствует ровно двум парам выключателей. Будем называть две пары выключателей *соседними (по лампочке L)*, если некоторая лампочка

L соответствует обеим парам. Например, если $(a_1, b_1) \rightarrow (K, L)$ и $(a_2, b_2) \rightarrow (L, M)$, то эти пары выключателей соседние (по лампочке L). Для каждой пары есть две соседние с ней (кроме случая, оговоренного ниже), поэтому все пары выключателей распадаются на циклы – замкнутые цепочки. Также возможен случай, когда две пары – соседние друг с другом «дважды», т.е. сразу по двум лампочкам: $(a_1, b_1) \rightarrow (K, L)$ и $(a_2, b_2) \rightarrow (K, L)$. Они образуют цикл длины 2. Осталось сделать две попытки. Будем рассматривать каждую цепочку пар выключателей по отдельности. Рассмотрим произвольную цепочку:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_k, b_k).$$

В первой попытке включим в ней все выключатели, кроме выключателей « b » с нечетными индексами: $b_1, b_3, \dots$. Во второй попытке включим в ней все выключатели, кроме выключателей « b » с четными индексами: $b_2, b_4, \dots$ (Так сделаем в каждой цепочке.)

Рассмотрим произвольную пару выключателей (a, b) и соседнюю с ней пару (c, d) . Пусть они соседствуют по лампочке L , т.е. $(a, b) \rightarrow (K, L)$ и $(c, d) \rightarrow (L, M)$. Пусть выключатели a , c , d включены, а b – выключен. Посмотрим, горит ли лампочка L . К ней подключено по одному выключателю из каждой из этих двух пар. Так как оба выключателя пары (c, d) включены, то L горит тогда и только тогда, когда к ней подключен выключатель a . А если мы знаем, к какой лампочке подключен один выключатель пары (a, b) , то знаем и то, к какой лампочке подключен другой выключатель. Таким образом, мы узнаем, к каким лампочкам подключены выключатели пары (a, b) .

Заметим, что каждая пара в одной из двух последних попыток окажется в положении, описанном выше – когда в ней включен ровно один выключатель, а в соседней паре включены оба. Таким образом, за две последние попытки мы выясним, как подключены все выключатели.

13. 912345678.

Квантик может всегда сделать число, начинающееся на 9, если запишет девятку слева от ранее записанных цифр, а все последующие цифры – справа. А Ноуттик может обеспечить минимально возможное число, начинающееся с девятки, если сначала назовет 9, а остальные цифры продиктует в порядке возрастания: 1, 2, 3, ..., 8.

14. В 2 раза.

Первое решение. Пусть точки касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами разбивают их на отрезки с длинами a , b , r (рис.7). Тогда радиус окружности равен r . Вы-

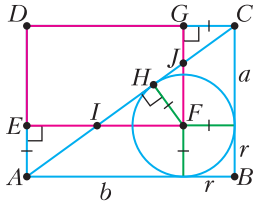


Рис. 7

разим площадь прямоугольника $ABCD$ двумя способами:

$$S_{ABCD} = BC \cdot AB = (a+r)(b+r),$$

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2(a+b+r)r,$$

откуда получаем

$$(a+r)(b+r) = 2(a+b+r)r,$$

$$ab + ar + br + r^2 = 2ar + 2br + 2r^2,$$

$$ab = ar + br + r^2.$$

Теперь найдем искомое отношение площадей:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{DEFG}} = \frac{(a+r)(b+r)}{ab} = \frac{ab + (ar + br + r^2)}{ab} = \frac{ab + ab}{ab} = 2.$$

Второе решение. Высота FH треугольника FIJ (см. рис.7) равна радиусу данной окружности, а значит, равна отрезкам AE и GC . Но тогда прямоугольные треугольники FHI и AEI равны (по углу и катету). Аналогично, равны треугольники FHJ и CGJ . Тогда площадь прямоугольника $DEFG$ равна площади треугольника ACD , а это половина прямоугольника $ABCD$.

15. Для всех n , кроме 1, 2, 4.

Непосредственно проверяется, что для n , равных 1, 2 и 4, требуемых разбиений не существует. Для $n=3$ подходит разбиение $1+2=3$.

Пусть $n=2k+1$, где $k>1$. Тогда в качестве первого подмножества можно взять 1, k , $2k$. Произведение его элементов равно $2k^2$, а сумма остальных элементов равна

$$(1+2+\dots+(2k+1))-1-k-2k = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} - 3k - 1 = 2k^2.$$

Пусть $n=2k$, где $k>2$. Тогда в качестве первого подмножества можно взять 1, $k-1$, $2k$. Произведение его элементов равно $2k^2-2k$, а сумма остальных элементов равна

$$(1+2+\dots+2k)-1-(k-1)-2k = (2k+1)k - 3k = 2k^2 - 2k.$$

16. Пусть $N=2k$. Если карта занимала место номер i , где $i \leq k$, следующим действием она

окажется на месте $2i$. А если занимала место номер i , где $i > k$, следующим действием она окажется на месте $2(i-k)-1 = 2i-(2k+1)$. Заметим, что числа $2i$ и $2i-(2k+1)$ сравнимы по модулю $2k+1 = N+1$. Итак, если число занимает номер i , то на следующем шаге его номер будет сравним с $2i$ по модулю $N+1$. Значит, через t шагов его номер будет сравним с $2^t i$ по модулю $N+1$.

Осталось показать, что существует m такое, что $1 \leq m \leq N$ и $2^m \equiv 1 \pmod{N+1}$. Тогда через m шагов все карты окажутся на своих местах. Приведем два способа завершить доказательство.

Первый способ. Так как числа 2 и $N+1$ взаимно простые, то существование такого m следует, например, из теоремы Эйлера:

Если a и m взаимно просты, то $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, где $\phi(m)$ — функция Эйлера (количество натуральных чисел, не превышающих n и взаимно простых с ним).

О теореме Эйлера можно прочесть, например, в статье В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» в «Кванте» №1 за 2000 год.

Второй способ. Если предположить, что среди чисел $2^1, 2^2, \dots, 2^N$ нет числа, дающего остаток 1 при делении на $N+1$, то (поскольку остаток 0 тоже не встречается) найдутся $1 \leq k < l \leq N$ такие, что 2^k и 2^l дают одинаковые остатки. Но тогда $2^l - 2^k = 2^k(2^{l-k} - 1)$ делится на $N+1$. Так как 2^k взаимно просто с $N+1$, то $2^{l-k} - 1$ делится на $N+1$, а значит, 2^{l-k} дает остаток 1, вопреки предположению.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

- 10/3 метра (воспользуйтесь теоремой Пифагора).
- 13 метров (прямой угол, вписанный в окружность, опирается на диаметр; снова теорема Пифагора).
- Часовая стрелка делает $1/12$ оборота в час, или полградуса в минуту, минутная — 6 градусов в минуту. Искомый угол равен разности углов, на которые повернулись стрелки с 12.00 до 12.20, т.е. равен 110° .
- Величина зазора равна разности нового и старого радиусов облуча:

$$R - r = \frac{2\pi r + 1}{2\pi} - \frac{2\pi r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ м} \approx \approx 16 \text{ см.}$$

Этот зазор одинаков для шара любого радиуса.

- Угловая скорость диска равна угловой скорости точки O в ее движении вокруг оси цилиндра O_1 (рис.8).

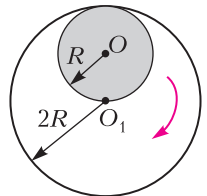


Рис. 8

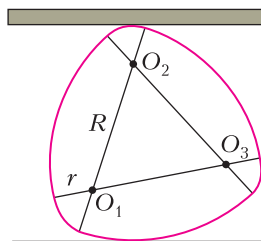


Рис. 9

Следовательно, диск делает тоже один оборот.

6. Да, можно. Каток такого профиля представлен на рисунке 9. Он состоит из трех дуг радиусом R и трех дуг радиусом r . Центры этих дуг находятся в точках O_1 , O_2 и O_3 – вершинах правильного треугольника. Ширина такой кривой одинакова во всех направлениях и равна $R + r$.

7. В месте касания доски и катка следует различать три точки: верхнюю точку катка, нижнюю точку доски и ту точку пространства, в которой каток касается доски. Две первые точки являются *физическими* и имеют скорость 1 м/с, а третья является *геометрической* и перемещается со скоростью центра катка, равной 0,5 м/с.

8. Нет, не совпадает. Центр тяжести *площади* данного треугольника лежит на пересечении медиан и делит большую высоту в отношении 2:1. У этого же треугольника центр тяжести *контура* близок к центру тяжести двух его боковых сторон, т.е. находится примерно на середине высоты.

9. Из рисунка 10,а следует, что в положении равновесия центр тяжести доски находится на вертикали, проходящей через вершину двугран-

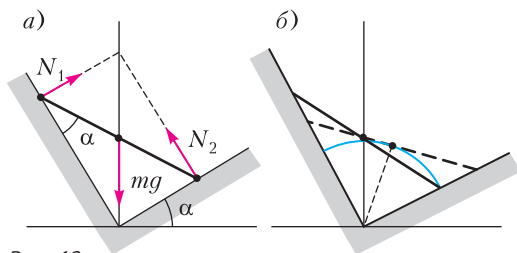


Рис. 10

ного угла, поэтому доска составляет с одной из его граней угол α , равный углу, образованному другой гранью с горизонтом. При малом смещении из этого положения центр тяжести доски, движущийся по дуге окружности, понижается (рис.10,б); следовательно, равновесие неустойчиво.

10. Строго говоря, тело должно двигаться по эллипсу, один из фокусов которого находится в центре Земли. Однако вблизи ее поверхности при скоростях тела до 1000 м/с часть его траектории практически неотличима от параболы.

11. Плоскость, в которой Луна обращается вокруг Земли, не совпадает с той плоскостью, в которой Земля обращается вокруг Солнца. Эти две плоскости образуют малый угол. Затмения

наблюдаются только в те моменты, когда Луна, находясь в нужной фазе, пересекается с конусом тени, которую отбрасывает Земля, либо когда Земля пересекается с конусом тени от Луны.

12. Из рисунка 11 следует, что центр мяча должен находиться от экрана на расстоянии $l = 0,8$ м.

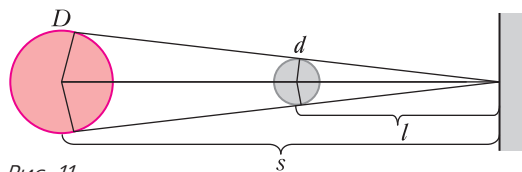


Рис. 11

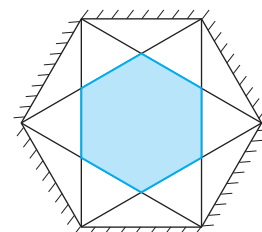


Рис. 12

13. Геометрическое место искомых точек – закрашенная область на рисунке 12.

14. На рисунке 13 угол $\alpha = 60^\circ$ и угол $\beta = 30^\circ$. Из построения следует, что расстояние между первы-

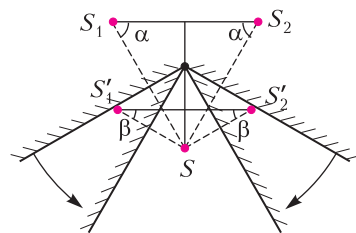


Рис. 13

ми мнимыми изображениями одинаково в обоих случаях и равно l .

Микроопыт

Решение видно из рисунка 14.

Тепловое расширение

Упражнения

1. Для всех трех отрезков $k = 1,5$.
2. Построение приводится на рисунке 15.
3. Два отрезка мы можем связать в один четырехугольник. При повороте четырехугольника на некоторый угол на такой же угол поворачивает-

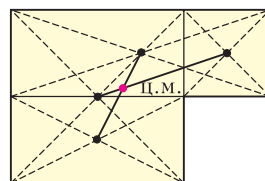


Рис. 14

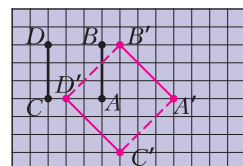


Рис. 15

ся и каждый отрезок в нем. Таким образом, исходный отрезок и присоединенный отрезок проворачиваются на один и тот же угол.

4. $k = \sqrt{2}$; $\varphi = 45^\circ$.

5. В соответствии с основным принципом расстояние между любыми двумя точками должно увеличиваться. Для пары неподвижных точек это не имеет места. «Разбухшее» кольцо имеет бесконечно много неподвижных точек – целую окружность. Действительно, если точки внешней границы кольца сдвинулись при разбухании от центра, а точки внутренней границы сдвинулись к центру, то есть по крайней мере одна окружность, точки которой остались на месте.

6. Построим бесконечную последовательность уменьшающихся отрезков AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , ..., где первый отрезок AA_1 есть прообраз отрезка $A'A$, второй – прообраз отрезка AA_1 , третий – прообраз отрезка A_1A_2 и т.д. (рис. 16). Последовательность этих отрезков упирается в неподвижную точку. Двигаясь к ней по этой системе

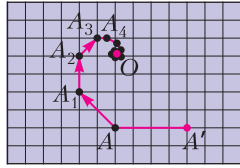


Рис. 16

отрезков, мы сместимся по вертикали на расстояние $\Delta y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{k^n} \sin n\varphi = a$, где $a = 4$ – длина отрезка $A'A$, а по горизонтали совсем не сместимся: $\Delta x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{k^n} \cos n\varphi = 0$ (вычисления сумм проведите самостоятельно). Поэтому расстояние от точки A до неподвижной точки O равно $l = a = 4$.

Задачи

2. При расширении расстояние от точки A до неподвижной точки O_1 составляет 2 клетки, поэтому она сдвинется вправо на $\Delta l_1 = 2\Delta a$. При сжатии расстояние от точки A до новой неподвижной точки O_2 будет составлять $3/2$ клетки, поэтому она сдвинется в противоположную сторону на $\Delta l_2 = 3\Delta a/2$. Общее смещение точки A составит $\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 = \Delta a/2 = 0,5$ мм.

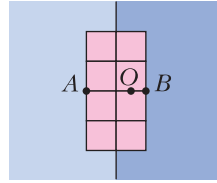
После возвращения фигур к прежним размерам величина зазора между ними будет равна увеличению расстояния между центрами квадрата и прямоугольника. Изменение этой величины происходило только при расширении и составило $\Delta L = 2\Delta a = 2$ мм.

3. До тех пор пока радиус каждого диска не увеличится на величину $\Delta r = d/2$, диски расширяются «индивидуально». При этом точка A смещается на расстояние $\Delta l_1 = \Delta r_1 = d/2$. После того как диски коснутся друг друга, они начинают расширяться как единое целое, неподвижной точкой

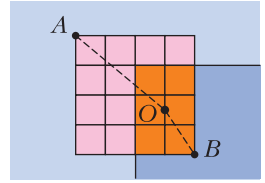
при этом является центр среднего диска. Точка A сместится при «коллективном» расширении еще на $\Delta l_2 = 3(\Delta a - \Delta r_1) = 9d/2$. В результате ее общее смещение составит $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 5d = 2,5$ мм.

5. Неподвижной точкой является нижняя материальная точка, ее смещение равно нулю. Верхняя точка B сдвинется на расстояние $\Delta l_B = k \cdot AB = \sqrt{3}\Delta a = 1,73$ мм. На такое же расстояние сдвинется и вторая верхняя точка.

6. Неподвижной точкой является точка O , лежащая посередине между точкой B и границей раздела плоскостей (рис. 17,а). Расстояние от



а)



б)

Рис. 17

точки A до неподвижной точки составляет $3/4$ от толщины пластины, поэтому ее смещение будет равно $\Delta l_A = 3\Delta a/4 = 0,75$ мм. Расстояние от точки B до неподвижной точки составляет $1/4$ от ширины пластины, поэтому ее смещение будет равно $\Delta l_B = \Delta a/4 = 0,25$ мм. При фантастическом расширении расстояние x от точки B до границы раздела будет изменяться по закону $x = \sqrt{l_0/4}$, где l_0 – начальная, а l – текущая ширина пластины (покажите это самостоятельно). Поэтому к концу расширения расстояния от точек A и B до границы раздела составят соответственно $14l_0$ и $2l_0$, т.е. точка A сместится на $\Delta l_A = 14l_0 - l_0/2 = 27l_0/2$, а точка B – на $\Delta l_B = 2l_0 - l_0/2 = 3l_0/2$.

7. Неподвижной точкой O будет середина прямоугольника 2×3 , который является областью перекрытия пластины и прямого угла (рис. 17,б). Расстояние от нее до точки A составляет $\sqrt{61}a/8$, а до точки B – $\sqrt{13}a/8$, где a – размер квадратной пластины. Поэтому смещения точек будут равны $\Delta l_A = \sqrt{61}\Delta a/8 = 0,98$ мм и $\Delta l_B = \sqrt{13}\Delta a/8 = 0,45$ мм соответственно.

8. При расширении квадрата неподвижной точкой O будет левая вершина квадрата (рис. 18,а). Точка A находится от нее на расстоянии $\sqrt{2}a$, поэтому при расширении она сместится вправо на расстояние $\Delta l_1 = \sqrt{2}\Delta a$. При сжатии неподвижной точкой будет центр квадрата. Точка A расположена от него на расстоянии $\sqrt{2}a/2$, поэтому сместится влево на расстояние $\Delta l_2 = \sqrt{2}\Delta a/2$.

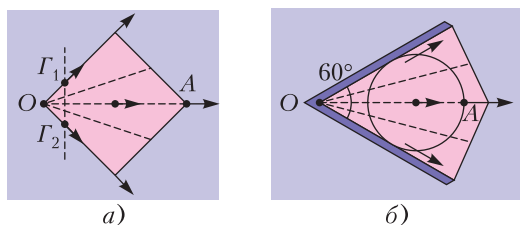


Рис. 18

Общее смещение точки A составит $\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 = = \sqrt{2}\Delta a/2 = 0,71$ мм.

9. При расширении неподвижной точкой является вершина угла (расстояние от нее до точки A равно $3r$), а при сжатии – центр диска (рис. 18,б). Поэтому при расширении точка A сдвинется вправо на $\Delta l_1 = 3\Delta a$, а при сжатии – влево на $\Delta l_2 = \Delta a$. Общее смещение точки A составит $\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 = 2\Delta a = 2$ мм.

11. При простом тепловом расширении каждая из сил трения, действующих на небольшие участки пластины, «смотрит» на ось Γ_1 . Сила $\vec{F}_1$ есть векторная сумма всех этих сил. При «закрученном» расширении все силы поворачиваются на угол $\theta = 45^\circ$, поэтому повернется на такой же угол и их сумма, оставаясь по модулю равной F_1 . Получается, что сумма всех сил трения, действующих на пластину, остается по величине равной F_1 , но направлена теперь не по вертикали, а под углом θ к ней (рис. 19).

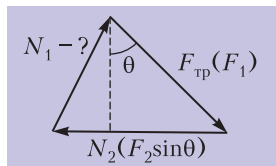


Рис. 19

Когда тепловое расширение сменяется обычным вращением, все силы трения разворачиваются ровно на 90° , создавая момент M_0 , противодействующий вращению. При «закрученном» расширении происходит лишь частичный поворот на угол θ , поэтому момент сил трения будет уже меньшим и равным $M_0 \cos(90^\circ - \theta) = M_0 \sin \theta$. Поэтому сила реакции N_2 со стороны гвоздика Γ_2 уменьшится и будет равной $N_2 = F_2 \sin \theta = = 2,12$ Н.

В результате получаем стандартную задачу статики, в которой надо найти неизвестную силу реакции N_1 :

$$N_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 \sin^2 \theta - 2F_1 F_2 \sin^2 \theta} = 1,58 \text{ Н.}$$

12. Если в «сложный уголок» вставить «простой уголок», то получится в два раза больший по линейным размерам «простой уголок» (рис. 20). Это наблюдение позволяет записать для неизвестной силы F_2 следующее уравнение: $F_1 + F_2 = 4F_1$, откуда получаем $F_2 = 3F_1 = 18$ Н (мы учли, что

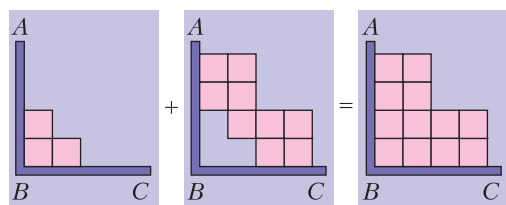
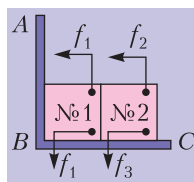


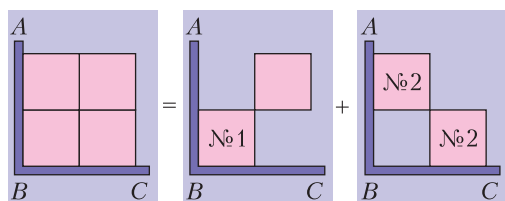
Рис. 20

масса полученной при сложении фигуры в четыре раза больше массы «простого уголка»).

13. Обозначим силу, с которой квадрат №1 давит на упоры, через f_1 (рис. 21, а), а силы, с которыми квадрат №2 давит на дальний и ближ-



а)



б)

Рис. 21

ний упоры, через f_2 и f_3 соответственно. Условие задачи позволяет составить для этих неизвестных следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 + f_3 = F_1, \\ f_1 + f_2 = F_2, \\ f_1 + f_3 = F_3. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$f_1 = F_2 + F_3 - F_1 = 21 \text{ Н}, \quad f_2 = F_1 - F_3 = 30 \text{ Н},$$

$$f_3 = F_1 - F_2 = 10 \text{ Н.}$$

Для того чтобы найти силу F , с которой последняя фигура давит на упоры, заметим, что если к ней прибавить фигуру, состоящую из двух квадратов второго типа, то получится квадрат, состоящий из четырех маленьких квадратиков (рис. 21,б). Это позволяет записать следующее уравнение: $4f_1 = F + f_2 + f_3$, откуда получаем ответ:

$$F = 5(F_2 + F_3) - 6F_1 = 44 \text{ Н.}$$

14. См. задачу Ф2643 «Задачника «Кванта».

XII ТУРНИР ГОРОДОВ

Задачи осеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. Не может.

Треугольник прямоугольный тогда и только тогда, когда некоторые две его вершины – диаметрально противоположные точки его описанной окружности. Каждой паре диаметрально противоположных точек соответствуют ровно 98 прямоугольных треугольников, для разных пар они различны. Поэтому общее количество прямоугольных треугольников делится на 98, но 1000 не делится на 98.

2. По условию каждый сыграл 7 партий, а всего было сыграно $8 \cdot 7 : 2 = 28$ партий. Поскольку каждый год играет 7 партий, кубок разыгрывался 4 раза.

а) Игрок, сыгравший в полуфинале не более одного раза, за 4 года сыграл не более $3 + 3 \cdot 1 = 6$ партий, что противоречит условию.

б) Всего в четырех финалах было $2 \cdot 4 = 8$ мест. Если кто-то не играл в финале, то кто-то другой должен был сыграть в финале как минимум дважды. Но тогда он сыграл не меньше $2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$ партий, что противоречит условию.

3. При n , не кратном 4.

Стратегия: каждый раз оставлять в куче кратное 4 число камней. При $n = 4k + 1$ надо взять один камень, при $n = 4k + 2$ – два камня; при $n = 4k + 3$ надо взять p камней, где p – простой делитель числа n вида $4q + 3$ (такой есть, иначе все простые делители n имеют вид $4m + 1$, а произведение чисел такого вида тоже имеет такой вид и не равно $4k + 3$).

Противник из кучи с кратным 4 числом камней не может взять число камней, кратное 4 (это будет не простое число), поэтому начинающий и дальше может играть по стратегии.

4. Пусть A, B, C – вершины данного треугольника такие, что $AP = a, BP = b, CP = c$. Пусть F – образ точки P при повороте вокруг A на 60° , переводящем C в B . Тогда треугольник APF – равносторонний со стороной a , и отрезок FB является образом отрезка PC при этом повороте, откуда $FB = PC = c$. При этом $AB = d, PB = b$, а значит, треугольник APF вместе с точкой B образуют нужную конфигурацию.

5. Мысленно расположим слонов в виде таблицы, как на рисунке 22. Первым взвешиванием сравниваем друг с другом две первые строки, вторым – два первых столбца. За первое взвешивание мы найдем строку, где должен быть похуевший

2	6	1
3	4	5
8	7	

Рис. 22

слон, если он есть, а за второе – столбец. На пересечении этих строки и столбца и будет похуевший слон (если в пересечении окажется пустая клетка, то никто из слонов не похуевал).

10–11 классы

1. Обязательно.

Предположим противное: $P(x)$ и $Q(x)$ имеют кратные корни a и b соответственно, $a \neq b$. Если ветви графиков $y = P(x)$ и $y = Q(x)$ направлены в одну сторону, то трехчлен $P(x) + Q(x)$ не имеет корней (все его значения одного знака и ненулевые). Если ветви графиков $y = P(x)$ и $y = Q(x)$ направлены в разные стороны, то в точках a и b трехчлен $P(x) + Q(x)$ принимает значения разных знаков, что невозможно для трехчлена с кратным корнем. Противоречие.

2. 18° .

Пусть построены треугольники $X_1A_1X_2, \dots, X_9A_9X_{10}$ (рис.23), а точки $B_1, \dots, B_9$ симмет-

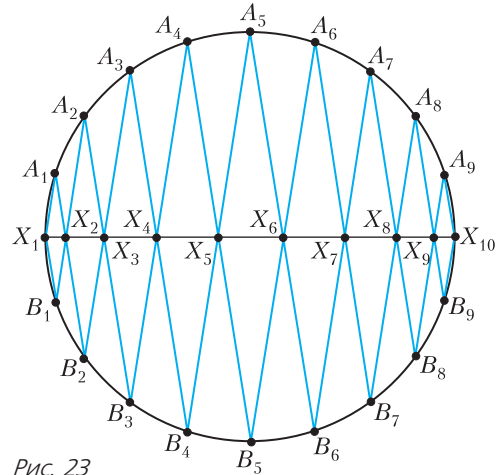


Рис. 23

ричны точкам $A_1, \dots, A_9$ соответственно (относительно прямой X_1X_{10}). Очевидно, точка X_i лежит на хорде $B_{i-1}A_i$ и на хорде B_iA_{i-1} ($i = 2, \dots, 9$), поскольку при отражении возникают вертикальные углы (угол при основании равнобедренного треугольника и такой же угол отраженного соседнего треугольника). Поэтому

$$\begin{aligned} \angle X_1B_1A_2 &= \angle A_2B_3A_4 = \angle A_4B_5A_6 = \angle A_6B_7A_8 = \\ &= \angle A_8B_9X_{10} = \alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, 5α равно половине дуги X_1X_{10} , т.е. 90° .

3. При 6 цифрах.

Если в числе седьмая цифра справа – это a , а третья справа – это b , то, меняя их местами, мы изменим число на $b \cdot 10^6 - a \cdot 10^6 + a \cdot 10^2 - b \cdot 10^2 = (b - a) \cdot (10^4 - 1) \cdot 100$. Значит, при такой замене делимость на $2020 = 20 \cdot 101$ не испортится, по-

сколькx $10^4 - 1$ делится на 101, а 100 делится на 20. Поэтому больше 6 цифр в числе N быть не может.

Шесть цифр может быть. Например, подходит число 351480 (0 должен оставаться в конце, обмен 3 и 8 испортит делимость на 4, а обмен соседних цифр или цифр, стоящих через одну или через две, испортит делимость на 101, поскольку числа $10 - 1$, $10^2 - 1$ и $10^3 - 1$ на 101 не делятся). Есть и другие примеры, скажем 531260. Пяти- или четырехзначное число, кратное 2020, получается умножением 2020 на число $10a + b$, меньшее 50. У числа $2020b$ вторая и четвертая цифры, отсчитываемые с конца, равны, а у числа $2020a$ они равны нулю, поэтому у суммы эти цифры равны, что нас не устраивает.

4. Обязательно.

Пусть $a \leq b \leq c$ — длины сторон треугольника. Тогда стороны разделяются на такие части:

$$a = \frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}, \quad b = \frac{ba}{a+c} + \frac{bc}{a+c}, \quad c = \frac{ca}{a+b} + \frac{cb}{a+b}.$$

Из отрезков, составляющих c , первый меньше a , а второй меньше b (так как $\frac{c}{a+b} < 1$).

Тогда возьмем в первую тройку отрезки $\frac{ab}{b+c}$, $\frac{ac}{b+c}$, составляющие a , и отрезок $\frac{ca}{a+b}$. Последний из них наибольший (его знаменатель не больше, а числитель не меньше, чем у других), но меньше a .

Во вторую тройку возьмем отрезки $\frac{ba}{a+c}$ и $\frac{bc}{a+c}$, составляющие b , и отрезок $\frac{cb}{a+b}$. Последний из них наибольший (аналогично), но меньше b .

Возможны и другие способы разбить отрезки на две тройки.

5. Решим сразу оба пункта. Пусть k — любое из чисел 49 или 50. Раскрасим монеты в черный и белый цвета (10 г — одним цветом, 11 г — другим). Монет какого-то цвета, скажем белых, будет нечетное количество, пусть $2m + 1$. Надо доказать, что среди k монет справа и k монет слева от какой-то монеты будет поровну белых. Предположим противное. Тогда $m > 0$, иначе единственная белая монета — искомая. Назовем белую монету *правой*, если среди k монет справа от нее белых больше, чем среди k монет слева от нее, в противном случае — *левой*. Так как белых монет $2m + 1$, правых и левых монет будет не поровну, пусть правых больше.

Пусть A — правая монета, а B — m -я справа от A белая монета (т.е. на дуге, идущей вправо от A к B , белых монет между A и B ровно $m - 1$).

Если бы среди k монет справа от A не было B , то среди них было бы не более $m - 1$ белой монеты. Так как $k \geq 49$, то вместе среди k монет слева от A и k монет справа от A хотя бы $2m - 2$ белые монеты, поэтому среди k монет слева от A было бы тогда не менее $m - 1$ белой, т.е. не меньше, чем справа, но это противоречит тому, что A — правая.

Значит, среди k монет справа от A есть B , но тогда среди k монет слева от B встречаются все белые монеты, лежащие на дуге, идущей вправо от A к B , и сама монета A , т.е. среди них встречается не менее m монет. Так как $k \leq 50$, то вместе среди k монет слева от B и k монет справа от B не более $2m$ белых, поэтому среди k монет справа от B не более m белых, т.е. не больше, чем слева. Значит, монета B — левая.

Итак, для всякой правой монеты m -я справа от нее белая монета — левая. Значит, левых не меньше, чем правых. Противоречие.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Нет.

Возьмем параллелограмм, как на рисунке 24. Если бы окружность пересекла его стороны AB и CD , то ее центр лежал бы на каком-то перпендикуляре к отрезку AB и на каком-то перпендикуляре к отрезку CD . Но такие перпендикуляры не пересекаются (они лежат в непересекающихся полосах).

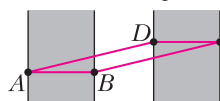
3. а) Нет, не сможет.

Пусть Вася действует так: если Петя называл четное число, Вася его и записывает, а если Петя называл нечетное — записывает сумму его и всех чисел на доске. Тогда Вася может записать на доску нечетное число лишь один раз — когда Петя впервые назвал нечетное число. Значит, на доске будет написано не более одного нечетного числа и, тем самым, не более одной пятерки.

б) Да, сможет.

Как Пете добиться того, чтобы Вася написал на доске число 10:

- (1) Если сумма чисел на доске равна 0, то Петя называет число 10, и Вася обязан написать 10.
- (2) Если сумма чисел на доске равна -5 , то Петя называет число 10, и Вася либо пишет число 10, либо пишет число 5 и попадает в ситуацию (1).
- (3) Если сумма чисел на доске равна 5, то Петя называет число -10 , и Вася либо пишет число -5 и попадает в ситуацию (1), либо пишет число -10 и попадает в ситуацию (2).
- (4) Если сумма чисел на доске равна 10, то Петя называет число -15 , и Вася либо пишет число



–15 и попадает в ситуацию (2), либо пишет число –5 и попадает в ситуацию (3).

Заметим, что если на доске другая сумма чисел, скажем n , то Петя может назвать число $-n + 10$, и Вася либо напишет число 10, либо попадет в ситуацию (4). Таким образом, имея любой набор чисел на доске, мы можем в итоге заставить Васю написать 10. Значит, мы сможем сделать так, чтобы на доске было 100 десятков.

4. Можно.

Расположим 9 крестов, как на рисунке 25, и опишем вокруг них квадрат. Этот квадрат состоит из девяти крестов (их суммарная площадь равна 45), восьми половинок прямоугольников 1×2 (их суммарная площадь равна 8) и четырех «уголков». Каждый уголок целиком лежит в фигуре, состоящей из половинки прямоугольника 1×2 и половинки клетки, т.е. его площадь не больше 1,5, откуда все уголки суммарно имеют площадь не больше 6. Тогда площадь квадрата не больше $45 + 8 + 6 = 59$, что меньше 64. Значит, сторона квадрата меньше 8 и его можно уместить на шахматную доску – а с ним и 9 крестов.

Несложно найти и точную длину стороны нашего квадрата – это $\frac{17}{\sqrt{5}}$.

5. Существуют.

Заметим, что $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ (проверьте!). Домножив это равенство на 2^3 , получим $6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$. Заменяя 6^3 на сумму из предыдущего равенства, получаем пять кубов, дающих в сумме куб: $3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$. Домножив новое равенство на 2^3 и снова заменяя 6^3 на сумму трех кубов, получаем 7 кубов, дающих в сумме куб:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 + 10^3 + 16^3 + 20^3 = 24^3.$$

Действуя далее аналогично, мы сможем получить и 99 кубов, дающих в сумме куб, что и требуется в задаче.

10–11 классы

1. Пусть на черной доске не все числа целые. Тогда среди исходных чисел есть четные и нечетные. Пусть a – любое из четных исходных чисел, b – любое из нечетных. По условию их среднее геометрическое – целое число, т.е. их произведение – полный квадрат. Если взять любые два четных исходных числа a_1 и a_2 , то тогда a_1b и a_2b – полные квадраты, откуда $a_1a_2b^2$ –

полный квадрат, а значит, и a_1a_2 – полный квадрат. Аналогично, произведение любых двух нечетных исходных чисел – полный квадрат. Но тогда на белой доске все числа целые.

2. Не ошибается.

Пусть корни многочлена из условия – числа $x_1, \dots, x_n$. Выберем n различных направлений на плоскости и возьмем x_1 прямых первого направления, x_2 – второго, ..., x_n – n -го направления. Тогда, по формулам Виета, число прямых $x_1 + \dots + x_n$ будет равняться a , а число их точек пересечения между собой будет равняться b , если только никакие три прямые не пересекутся в одной точке. Этого можно добиться, проводя прямые последовательно: очередную прямую нужного направления выбираем так, чтобы она не задевала уже имеющиеся точки пересечения (их на каждом шаге конечное число).

3. Достаточно доказать, что прямая KM проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC (для прямой LN доказательство аналогично).

Обозначим через I центр описанной окружности треугольника CKL (рис.26). Пусть $\angle CML = \alpha$, тогда $\angle CAK = \widehat{CK} = \frac{1}{2}\widehat{CD} = \angle CMD = \alpha$, и

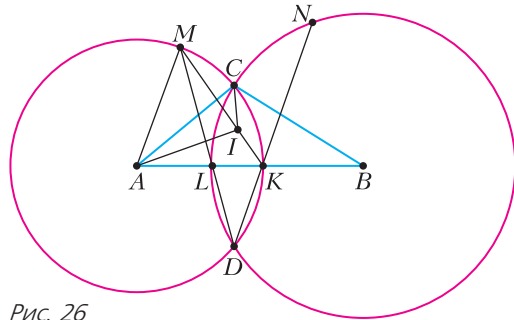


Рис. 26

$\angle CIL = 2\angle CKA = 180^\circ - \angle CAK = 180^\circ - \alpha$, откуда точки M, A, L, I, C лежат на одной окружности. Значит, I – середина дуги $\widehat{CL}$, откуда AI – биссектриса угла BAC . Аналогично, BI – биссектриса угла ABC , следовательно, I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Так как I – середина дуги $\widehat{CL}$, а K – середина дуги $\widehat{CD}$, точки I и K лежат на биссектрисе угла CMD , что и требовалось.

5. Да, существует.

Для начала покажем, что существует прямоугольник, который можно разрезать на 4 подобных ему прямоугольника разного размера. На рисунке 27 показано, что для произвольного x существует прямоугольник, который можно раз-

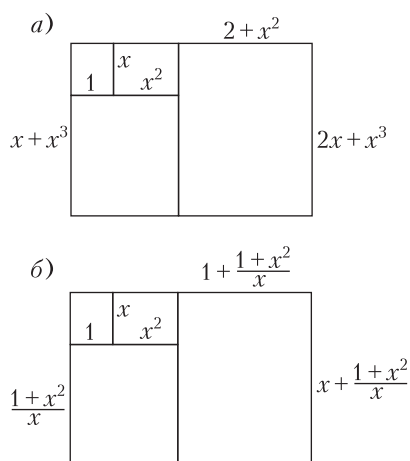


Рис. 27

резать на 4 прямоугольника с отношением сторон, равным x (два способа).

В первом случае все 4 прямоугольника будут подобны исходному, если $1 + x^2 + 2 + x^2 = x(2x + x^3)$, откуда $x = \sqrt[4]{3}$. При этом, как несложно проверить, они имеют разный размер. Во втором случае все 4 прямоугольника будут подобны исходному, если $1 + x^2 + 1 + \frac{1+x^2}{x^2} = x\left(x + \frac{1+x^2}{x}\right)$, откуда $x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$. При этом они, опять же, имеют разный размер.

Теперь перейдем к доказательству основного факта. Возьмем, для определенности, прямоугольник с отношением сторон $\sqrt[4]{3}$ и разобьем его на 4 прямоугольника указанным способом. Выберем меньший из них и разобьем таким же способом и т.д. После каждого разбиения все прямоугольники имеют разный размер, так как мы разбиваем наименьший. После 33 разбиений мы получим 100 прямоугольников, что и требовалось.

Замечание. Как известно, существует разрезание квадрата как на 25, так и на 26 различных квадратов (см. ru.wikipedia.org/wiki/Квадрирование_квадрата). Проведем разрезание на 25 квадратов, потом разрежем меньший из них на 26 квадратов. Получится разрезание на 50 квадратов. Повторив такую операцию еще дважды, получим разрезание квадрата на 100 различных квадратов.

7. Сориентируем доску так, чтобы у нее было 1000 столбцов и n строк, а жук сидел в нижнем левом углу. Покрасим клетки в шахматном порядке, причем клетку жука сделаем белой. Занумеруем столбцы числами от 1 до 1000 слева направо, а строки числами от 1 до n снизу вверх.

Рассмотрим некоторый путь жука из клетки $(1, 1)$ в клетку $(100, n)$. Из каждой клетки пути нарисуем стрелку в следующую клетку. Тогда из каждой белой клетки пути стрелка ведет в черную.

Пусть i – четное число, причем $1000 \leq i \leq n - 1003$. Между строками i и $i + 1$ проведем горизонтальную прямую l .

Ниже прямой l количество белых клеток в пути превосходит количество черных не меньше чем на 1000, так как 1000 черных клеток в нижних строках находятся под боем слона. Поэтому не меньше 1000 стрелок идут из белых клеток ниже l в черные клетки выше l . Но так может проходить лишь стрелка из клетки в строке $i - 1$ или i . А поскольку там всего 1000 белых клеток, в каждой из них начинается стрелка, идущая в черную клетку строки $i + 1$ или $i + 2$.

Стрелка из клетки $(1, i - 1)$ может идти только в $(2, i + 1)$. Тогда стрелка из $(3, i - 1)$ может идти только в $(4, i + 1)$. Последовательно рассматривая клетки $(5, i - 1)$, $(7, i - 1)$, ..., $(999, i - 1)$, $(1000, i)$, $(998, i)$, ..., $(2, i)$, видим, что все 1000 стрелок в действительности определены однозначно (рис. 28).

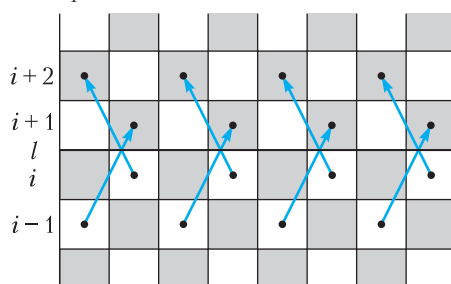


Рис. 28

Аналогичное верно для $i + 2$ и, значит, для белых клеток в строках $i + 1$ и $i + 2$. Поэтому если жук пришел в белую клетку выше l , то он уже никогда не вернется в клетку ниже l . Действительно, пусть жук впервые пересекает l сверху вниз после того, как он побывал в белой клетке выше l . Перед пересечением этой прямой жук находился в строке $i + 1$ или $i + 2$. Если жук был в белой клетке, то он пошел бы вверх. А если жук был в черной клетке, то он пришел в нее из клетки ниже l – значит, он уже спустился ниже l , побывав в белой клетке выше l . Получили противоречие.

Среди стрелок из белых клеток строк $i - 1$ и i рассмотрим пройденную последней. Так как до этого жук не побывал в белой клетке выше l , то из концов остальных таких стрелок он спустился ниже l . Таким образом, лишь из одной черной клетки в строках $i + 1$ и $i + 2$ стрелка ведет в белую клетку выше l .

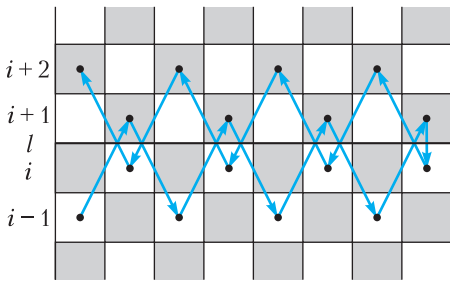


Рис. 29

Поскольку стрелка из $(1, i+2)$ не может вести в белую клетку ниже l , стрелки из всех остальных черных клеток в строках $i+1$ и $i+2$ должны вести в белые клетки ниже l . Последовательно рассматривая клетки $(3, i+2)$, $(5, i+2)$, ..., $(999, i+2)$, $(1000, i+1)$, $(998, i+1)$, ..., $(2, i+1)$, видим, что все 999 стрелок в действительности определены однозначно (рис. 29).

Аналогичное рассуждение для всех четных значений i между 1000 и $n-1003$ показывает, что средняя часть пути жука определена однозначно и при росте n продолжается в виде пружины (рис. 30).

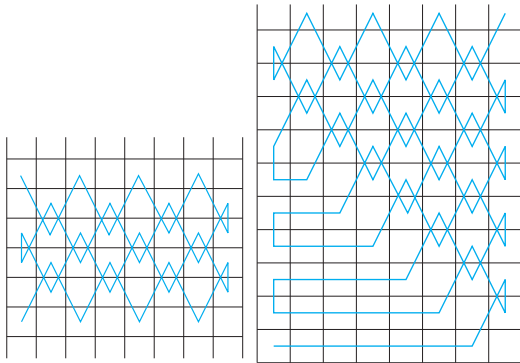


Рис. 30

Следовательно, количество возможных путей не зависит от n .

Замечание. Конструкция на рисунке 31 показывает, что рассматриваемые пути действительно существуют.

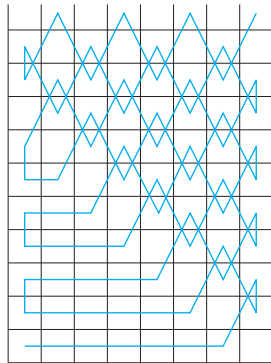


Рис. 31

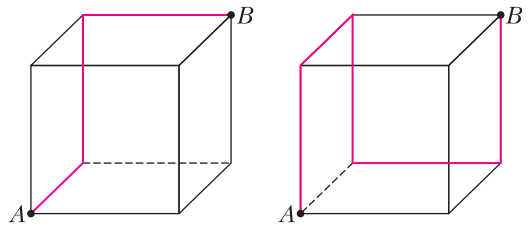
Региональный этап LV Всероссийской олимпиады школьников по физике

Первый тур

7 класс

1. $t = 70$ с; $T = 720$ с.

2. Возможны два варианта движения муравья (рис. 32). Пусть искомая скорость превышает скорость v в k раз, т.е. равна kv , а длина ребра куба равна a . Время движения по мар-



Маршрут №1

Маршрут №2

Рис. 32

шруту №1:

$$t_1 = \frac{a}{kv} + \frac{a}{v} + \frac{a}{kv} = \frac{k+2}{k} \frac{a}{v},$$

а средняя скорость:

$$v_1 = \frac{3a}{t_1} = \frac{3k}{k+2} v.$$

Аналогично, время движения и средняя скорость на маршруте №2:

$$t_2 = \frac{a}{v} + \frac{a}{kv} + \frac{a}{3v} + \frac{a}{kv} + \frac{a}{v} = \frac{7k+6}{3k} \frac{a}{v},$$

$$v_2 = \frac{5a}{t_2} = \frac{15k}{7k+6} v.$$

Поскольку по условию задачи скорости равны, приходим к уравнению $\frac{3k}{k+2} = \frac{15k}{7k+6}$, решая которое, находим $k = 2$. По горизонтальным ребрам муравей перемещается со скоростью $2v$.

3. См. задачу Ф2645 «Задачника «Кванта».

4. По таблице построим график зависимости показаний весов от длины оставшегося прутка (рис. 33). Экстраполируя линейную зависимость до пересечения с осью ординат, получим массу пустой катушки:

$$m_0 \approx 170 \text{ г.}$$

По мере изменения показаний весов при раскручивании катушки (по угловому коэффициенту наклона графика) найдем линейную плотность прутка:

$$\lambda = \frac{(650 - 250) \text{ г}}{(120 - 20) \text{ м}} = 4,0 \text{ г/м.}$$

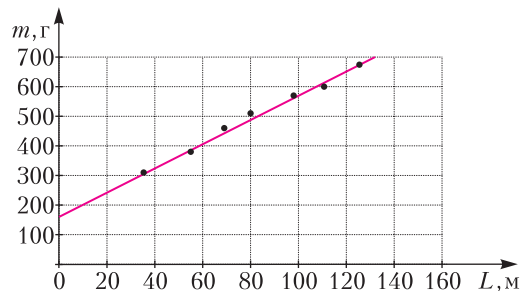


Рис. 33

С помощью метода рядов (проводя измерения не менее чем для 10 витков) определим толщину прутка: $d = 1,5$ мм. Таким образом, поперечное сечение прутка равно $s = 2,25 \text{ мм}^2$, а объемная плотность пластика составляет $\rho = \lambda/s \approx 1,78 \text{ г/см}^3 = 1,78 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Длина прутка, израсходованного на печать кубика, равна $L_1 = 125 \text{ м} - 35 \text{ м} = 90 \text{ м}$. Следовательно, суммарный объем стенок составляет $V_1 = sL_1 = 202,5 \text{ см}^3$, а объем полости равен $V = a^3 - V_1 \approx 797 \text{ см}^3$.

8 класс

1. Если часовая стрелка опережает минутную, то минутной стрелке потребуется время $t \approx 22$ мин, в противном случае $t \approx 44$ мин.

2. Из графика находим $\tau_1 = 70$ с, $\tau_2 = 93$ с, $\tau_3 = 345$ с, $\tau_4 = 460$ с. Поскольку график начинается из нуля, температуры кусков льда вначале равны. Первые 70 с разность температур растет. Потом более легкий кусок начинает плавиться, и разность температур уменьшается в течение 23 с. Третий участок графика соответствует плавлению обоих кусков льда, когда их температура неизменна (0°C). Это происходит в течение 252 с. Четвертый участок соответствует нагреву воды в том калориметре, где был кусок меньшей массы, в то время как в другом продолжает плавиться лед (115 с). На пятом участке в обоих калориметрах нагревается вода.

Разница во времени плавления обусловлена разницей в массе кусков льда. Время, которое ушло на плавление дополнительных 100 г льда, это $((\tau_4 - \tau_2) - (\tau_3 - \tau_1)) = 91,7$ с. Отсюда находим мощность нагрева:

$$P = \frac{\lambda \Delta m}{\tau} \approx 360 \text{ Вт}.$$

Разница во времени нагрева до температуры плавления тоже обусловлена разницей в массе кусков льда. Дополнительные 23,3 с — это время, которое ушло на нагрев 100 г льда от начальной температуры до 0°C , откуда

$$t_{01} = t_{02} = t_0 = \frac{-P\tau_1}{c_{\text{л}}\Delta m} = -40^\circ\text{C}.$$

За 70 с легкий кусок льда нагревается до 0°C , значит, его масса $m_1 = \frac{-P\tau_1}{c_{\text{л}}t_0} \approx 0,3$ кг. Масса второго куска $m_2 \approx 0,4$ кг.

За те же 70 с второй кусок успеет нагреться до $t_{21} = \frac{c_{\text{л}}m_2t_0 + P\tau_1}{c_{\text{л}}m_2} \approx -10^\circ\text{C}$, т.е. температуры кусков льда будут отличаться на $\Delta t = 10^\circ\text{C}$.

К концу нагрева в калориметрах установятся температуры

$$t_{1\text{к}} = \frac{P(\tau_{\text{к}} - \tau_3)}{c_{\text{в}}m_1} \approx 73^\circ\text{C}, \quad t_{2\text{к}} = \frac{P(\tau_{\text{к}} - \tau_4)}{c_{\text{в}}m_2} \approx 30^\circ\text{C}.$$

3. Если груз M очень легкий, то связанный с ним нитью груз m перевешивает и касается рычага. Но вращающего момента груза m относительно точки опоры недостаточно, чтобы уравновесить момент силы тяжести самого рычага. Рычаг начинает проворачиваться по часовой стрелке, нить провисает, и оба груза m и M «встают» на рычаг. Для равновесия системы необходимо, чтобы выполнялось равенство моментов относительно точки опоры:

$$Mg \cdot 2l + mgl = 2mgl,$$

где l — длина одного участка рычага. Тогда минимальное значение M для равновесия системы равно $M = m/2$. Нить при этом не натянута. Рассмотрим случай больших масс M . При $M > m$ груз M перевешивает и начинает давить на рычаг, а груз m повисает на нити. Для равновесия системы теперь достаточно выполнения такого условия:

$$(M - m)g \cdot 2l = 2mgl, \text{ откуда } M = 2m.$$

Если не было бы ограничения на силу натяжения нити, равновесие системы наступило бы при $m/2 < M < 2m$, или $2,0 \text{ кг} < M < 8,0 \text{ кг}$. Но при больших значениях M груз m оказывается подвешенным, и сила натяжения становится равной 40 Н. Нить обрывается.

Рассмотрим случай, когда нить натянута до предельного значения T_0 , но грузы не отрываются от рычага. Правило моментов принимает вид $(Mg - T_0) \cdot 2l + (mg - T_0)l = 2mgl$, откуда $M = 0,5(m + 3T_0/g) = 5,75$ кг. Таким образом, равновесие системы возможно при $2,0 \text{ кг} < M < 5,75 \text{ кг}$.

4. При равномерном движении поршня вверх сила тяжести груза и сила трения между поршнем и стенкой шприца уравновешены силой давления столба воды высотой Δh (атмосферное давление можно не учитывать):

$$m_{\text{т}}g + F_{\text{тр}} = \rho g S \Delta h, \text{ откуда } \Delta h = \frac{F_{\text{тр}}}{\rho g S} + \frac{1}{\rho S} m_{\text{т}}.$$

Мы видим, что Δh линейно зависит от $m_{\text{т}}$ (рис.34).

Для вычисления углового коэффициента прямой линии на графике удобно использовать точку

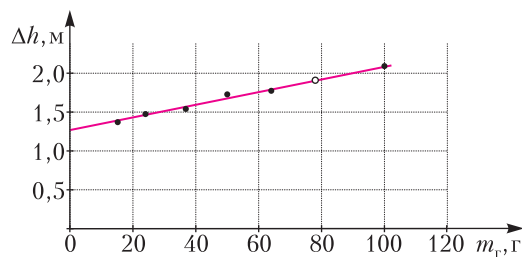


Рис. 34

$m_{r1} = 6$ г, $\Delta h_1 = 1,3$ м, а также точку $m_{r2} = 90$ г, $\Delta h_2 = 2$ м. Получаем

$$k = \frac{1}{\rho S} = \frac{\Delta h_2 - \Delta h_1}{\Delta m_r} = 8,33 \text{ м/кг}$$

и находим площадь поршня

$$S = \frac{1}{k\rho} = \frac{1}{8330} \text{ м}^2 = 1,2 \text{ см}^2.$$

Из графика видно, что при $m_r = 0$ прямая линия пересекает вертикальную ось в точке $\Delta h_0 = 1,25$ м. В соответствии с этим находим

$$F_{\text{тр}} = \rho g S \Delta h_0 = 1,5 \text{ Н}.$$

Из графика получаем, что при $\Delta h_x = 1,9$ м масса груза должна быть равной $m_x = 78$ г.

9 класс

1. Скорости камушков при падении на землю одинаковы (это следует, например, из закона сохранения энергии) и равны u . Суммарная траектория камушков представляет собой параболу, из симметрии которой следует, что они упали на землю под углом 45° к горизонту. Суммарное время полета камушков $t_0 = \frac{2u \sin 45^\circ}{g}$. Время полета камушка, двигавшегося меньшее время, составляет $t_1 = t_0/3$, а его вертикальное перемещение равно

$$h = ut_1 \sin 45^\circ - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_0^2}{9} = 10 \text{ м}.$$

Из кинематики равноускоренного движения $u^2 = v^2 + 2gh$, откуда

$$v = gt_0 \sqrt{\frac{5}{18}} \approx 15,8 \text{ м/с}.$$

2. На стакан вниз действует сила тяжести mg , а вверх – сила Архимеда $F_A = \rho g \pi h R^2$ и сила реакции опоры, равная силе N , с которой стакан давит на дно аквариума. Следовательно, $N = mg - F_A$. Учитывая, что толщина стенки мала по сравнению с радиусом стакана, вычислим ее объем упрощенно – как объем листа, из которого свернут цилиндр высотой L . Объем дна также запишем упрощенно – как произведение внешней площади дна стакана на его толщину. Итак,

$$N = 20\pi\rho g d R (2L + R) - (\pi\rho g R^2)h.$$

График зависимости $N(h)$ приведен на рисунке 35. Угловой коэффициент $\frac{\Delta N}{\Delta h} = \pi\rho g R^2$ прямой на графике не зависит ни от d , ни от L . Обозначения на графике:

$$N_0 = 20\pi\rho g d R (2L + R), \quad h_0 = \frac{20d(2L + R)}{R},$$

$$N_1 = \pi g R \rho (40dL + 20dR - RL).$$

Если уровень воды в аквариуме достигает верха стакана, а стакан к этому моменту еще не всплыл, то зависимость изображается на графике линией 1. Условие реализации такого сценария $L < h_0$.

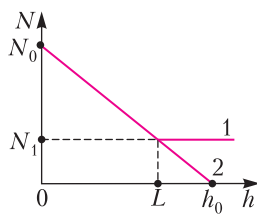


Рис. 35

Казалось бы, что для всплытия стакана (прямая 2 на графике) достаточно увеличить L . Стакан всплывет, если L превысит h_0 . Для этого должно выполняться условие

$$L \geq h_0, \text{ или } L \geq \frac{20d(2L + R)}{R}.$$

Окончательно, после преобразований, условие плавания стакана примет вид

$$L \geq \frac{20dR}{R - 40d}.$$

При увеличении L всплытие возможно лишь в том случае, если

$$d < \frac{R}{40}, \text{ или } d < 0,025R.$$

3. См. задачу Ф2647 «Задачника «Кванта».

4. Сила тока через резисторы R_2 и R_3 равна $I_1 = U_0 / (R_2 + R_3)$. Напряжение на резисторе R_3 равно

$$U_{01} = I_1 R_3 = \frac{U_0 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{k U_0}{1 + k}.$$

Аналогично, напряжение на резисторе nR_1 равно

$$U_{02} = \frac{nR_1 U_0}{R_1 + nR_1} = \frac{n U_0}{1 + n}.$$

Показание U вольтметра равно разности U_{02} и U_{01} (знак этой разности не имеет значения – всегда можно поменять полярность подключения вольтметра):

$$U = \frac{n U_0}{1 + n} - \frac{k U_0}{1 + k}.$$

График зависимости $U(n)$ представлен на рисунке 36. Визуальный анализ графика позволяет

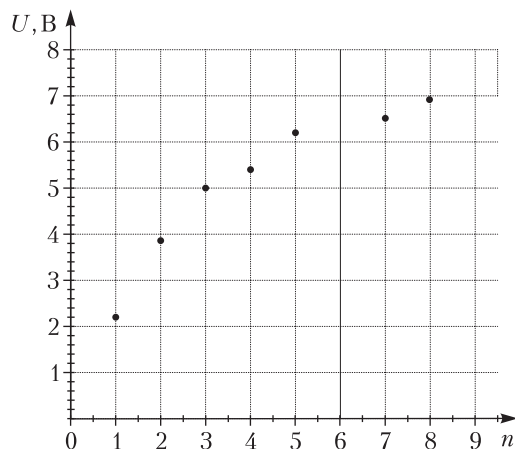


Рис. 36

предположить, что точки при $n = 4$ и $n = 7$ лежат несколько ниже общего тренда зависимости $U(n)$. Вычислим искомые величины, используя, например, значения U для $n = 2$ и $n = 5$. Получаем два линейных уравнения с двумя неизвестными:

$$3,85 \text{ В} = \frac{2}{3}U_0 - \frac{kU_0}{1+k}, \quad 6,20 \text{ В} = \frac{5}{6}U_0 - \frac{kU_0}{1+k}.$$

Решая эти уравнения, находим

$$U_0 \approx 14 \text{ В}, \quad k \approx 0,7.$$

(Продолжение следует)

Лингвистические задачи

(см. 2-ю с. обл.)

Все формы начинаются с **тасукэ**; очевидно, это корень («помогать»). Элемент **дзару**, встречающийся в формах 1 и 2 (и только в них), очевидно, показатель отрицания («не»). Тогда **раси** – показатель вероятности («наверно»), см. 2. **Рарэ** – показатель страдательного залога, см. 3, 4. **Сасэ** встречается в тех формах (4, 5), где в переводе есть слово *заставлять*; он, видимо, передает идею «побудительности», или «каузативности» (заметим, что при наличии этого показателя «страдательность» относится не к самому действию, а к «побудительности», см. 4). Тогда **сикаба** – это показатель условности (3), **такари** – желания (7), **бэкари** – долженствования (1). **Тари** соответствует совершенному виду (6) (несовершенный, видимо, особого показателя не имеет). Остаются показатели **ки** (1, 5, 6) и **кэри** (4, 7); их нет только в тех фразах (2, 3), где выражается условность («если») или вероятность («наверно»). Поэтому можно предположить, что **ки** и **кэри** выражают изъявительное наклонение, причем **ки** указывает на обычное прошедшее время, а **кэри** – на давно прошедшее (во фразах 2, 3, обозначающих условное или вероятное действие, время, по-видимому, не выражено).

Теперь уже можно выполнить задание 1:

тасукэсэсарэрдзарубэкарисикаба –

*если бы его не должны были
заставлять помогать.*

Далее выясняем порядок элементов (используя также форму из задания 1). Для большинства элементов порядок устанавливается с полной определенностью: 1) корень; 2) побудительность (**сасэ**); 3) страдательный залог (**рарэ**); 4) отрицание (**дзару**); 5) долженствование (**бэкари**); 6) условность (**сикаба**); 7) время (**ки**, **кэри**). Показатель совершенности (**тари**) стоит между местами 3 и 7; определеннее мы ничего сказать

не можем. Показатель желания (**такари**) занимает, вероятно, то же место (5-е), что и сходный с ним в смысловом отношении показатель долженствования; показатель вероятности (**раси**) – то же (6-е), что показатель условности.

Теперь можно выполнить задание 2:

ему помогли (давно) – тасукэсарэкари;

если бы он хотел помогать –
тасукэтакарисикаба;

его, наверно, не заставляли помогать –
тасукэсэсарэрдзарураси;

он помог – тасукэтарики.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 210696

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

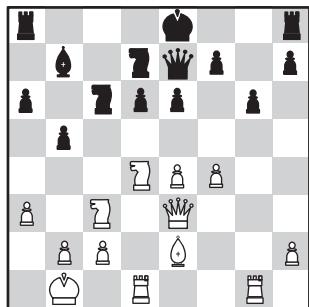
Тел.: (831) 216-40-40

Кризис ВАРИАНТА

Начало 2021 года подарило любителям шахмат долгожданную и столь редкую в последнее время возможность насладиться игрой ведущих гроссмейстеров в классические шахматы на традиционном турнире в голландском Вейк-ан-Зее. Впервые за 36 лет победа в этом соревновании досталась представителю страны-хозяйки, Йордену ван Форесту. Главным итогом турнира с точки зрения шахматной теории стал ряд ярких побед, одержанных белыми в популярном среди ведущих игроков варианте Найдорфа в Сицилианской защите. Особняком среди них стоит партия российского юниора Андрея Есипенко, в которой он не оставил шансов действующему чемпиону мира.

А.Есипенко – М.Карслен
Вейк-ан-Зее, 2021

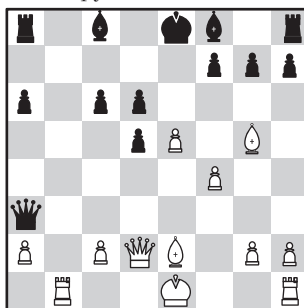
1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd4 4. ♘d4 ♙f6 5. ♗c3 a6 6. ♗e2 e6 7. ♗e3 ♗e7 8. g4 b5 9. g5 ♙f7 10. a3! Стандартная для сицилианской защиты жертва пешки. 10... ♗g5 11. ♙d2 ♗e3 12. ♗e3 ♙h4? Первая серьезная ошибка – черные просто теряют темп. Необходимо 12... ♗b7 13. 0-0-0 ♗e7 14. ♗hg1 g6 15. f4 ♗c6, и белым не выгодно жертвовать коня, так как их король еще находится на c1. 13. ♗g1 g6 14. 0-0-0 ♗e7 15. f4 ♗b7 16. ♗b1 ♗c6? Вторая, и сразу решающая ошибка. Однако и после лучшего 16... 0-0 17. h4 ♗c6 18. ♗f3 b4 19. ab ♗b4 20. h5 преимущество у белых.



17. ♗cb5 ab 18. ♗c6 ♗c6 19. ♗c3! Вероятно, этот двойной удар Магнус просмотрел. Теперь партия технически выиграна за белых. 19... 0-0 20. ♗c6 d5 21. ed ♗fc8 22. d6 ♗d8 23. ♗b5 ♗cb8 (23... ♗a3 24. ba ♗b8 25. ♗g3) 24. ♗c4 ♗a3 25. ♗c7 ♗e8 (не спасает и 25... ♗f6 26. ♗b8+ ♗b8 27. ba ♗d7 28. ♗b5) 26. ♗g5 ♗a4 27. ♗a5 ♗ab4 28. b3 ♗ab7 29. ♗c3 ♗d8 30. ♗f3 ♗b4 31. ♗c7 ♗f6 32. ♗a8 ♗a8 33. ♗a8 ♗f5 34. ♗b2 ♗b5 35. ♗d7 ♗c5 36. ♗c1 ♗f4 37. ♗e8+ ♗g7 38. d7, и черные сдались.

Ф.Каруана – М.Вашье-Лаграв
Вейк-ан-Зее, 2021

1. e4 c5 2. ♗f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♙f6 5. ♗c3 a6 6. ♗g5 e6 7. f4 ♙b6 8. ♙d2 ♙b2. Принимающая жертву пешки, черные должны быть очень аккуратны – в этом варианте буквально один неточный ход может стоить партии. 9. ♗b1 ♗a3 10. ♗e2 ♗c6?! Внешне логичный ход – но неточный. Сильнее принципиальное 10... ♗bd7 11. 0-0 ♗c5 12. ♗h1 ♗e7. 11. ♗c6 bc 12. e5 ♗d5 13. ♗d5 ed? Уже решающая ошибка. Необходимо 13... cd, но после 14. 0-0 черным пришлось бы немало потрудиться за доской.



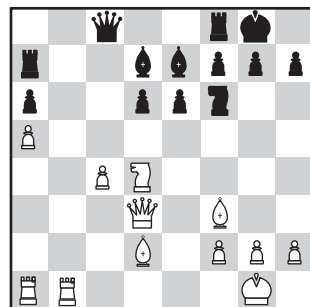
14. e6! Решающий тычок, не учтенный французским гроссмейстером, значительно слабее 14. 0-0 de 15. fe ♗e6, позволяя черным укрепиться. 14... f6. Черные не могут брать пешку слоном, так как, обладая преимуществом в развитии, белые используют открытые линии, например в варианте 14... ♗e6 15. 0-0 ♗e7 16. f5 ♗d7 17. ♗h5.

15. ♗h5+ ♗d8 16. ♗h4 d4 17. ♗f2 ♗c3 18. f5 ♗d2+ 19. ♗d2. Размен ферзей не спасает черных, так как их пешки слишком слабы. Исход противостояния решит пешечная пара белых f5-e6. 19... c5 20. ♗f3 ♗a7 21. g4 g6. 21... ♗c7 лишь немного усложняет задачу белым: 22. ♗d3! a5 23. ♗d5 ♗a6+ 24. ♗e4 ♗e7 25. ♗e1 с явным преимуществом. 22. ♗h4 ♗e7 23. ♗b6 h5 24. h3 ♗e8 25. ♗g3 ♗c7 26. ♗d3 hg 27. hg ♗h1 28. ♗h1 gf 29. gf ♗f8 30. ♗c4 ♗h7 31. ♗e4 ♗e7 32. ♗d6 ♗d6 33. ♗d6 ♗b7 34. ♗b7 ♗b7 35. ♗a6 ♗b2 36. ♗c5 ♗c2+ 37. ♗d4, и черные сдались.

Было бы несправедливо обойти стороной творчество победителя турнира, однако в силу ограничений по объему статьи публикуем партию, сыгранную им в последнем туре, без комментариев.

Й.Ван Форест – Н.Гранделиус
Вейк-ан-Зее, 2021

1. e4 c5 2. ♗f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♙f6 5. ♗c3 a6 6. ♙d3 ♗bd7 7. ♗e2 b5 8. a4 ♗c5 9. ♗e3 b4 10. ♗d5 ♗ce4 11. a5 ♗d5 12. ♗e4 e6 13. 0-0 ♗d7 14. ♗d2 ♗e7 15. ♗f3 0-0 16. ♙d3 ♙b8 17. c4 bc 18. bc ♗a7 19. ♗fb1 ♗c8 20. c4 ♙f6.



21. ♗b5! ab 22. cb ♗b5 23. ♙b5 ♗d7 24. ♗b7 ♗d8 25. a6 ♗f6 26. ♗a5 ♗e8 27. ♗c7 ♗a1 28. ♗a1 d5 29. ♗d6 ♗d8 30. ♗c1 g6 31. h3 ♗e8 32. ♗c7 ♗f6 33. ♗e5 ♗e4 34. ♗c6 ♗f8 35. ♗d4 ♗b8 36. f3 ♗a6 37. ♗a6 ♗b4 38. ♗e5 ♗e1+ 39. ♗h2 ♗f2 40. ♗c3 ♗h1+ 41. ♗g3 ♗g1 42. ♗c8 ♗h1+ 43. ♗h4 ♗f2+ 44. g3 g5+ 45. ♗g5 f6+ 46. ♗h6 f6 47. ♗e5, и черные сдались.

А.Русанов

Зимнее «дыхание» моря

Как образуются огромные ледяные холмы
посреди замерзшего моря?

Прогулки с физикой



ISSN 0130-2221 21002



9 770130 222214

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 49 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)