

НОЯБРЬ

ISSN 0130-2221

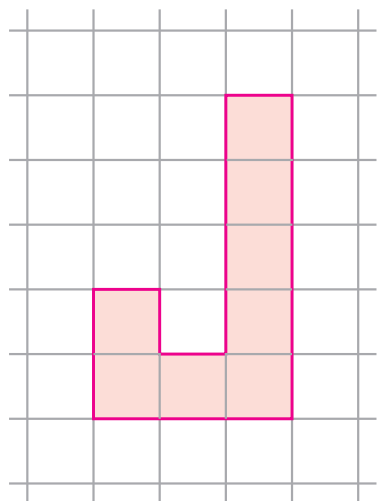
2019 · № 11

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ОДИННАДЦАТЬ друзей Хирша

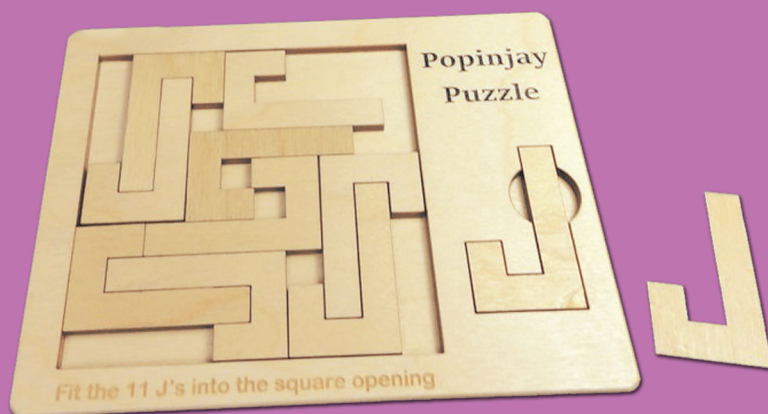


В этой головоломке американского изобретателя профессора Корнеллского университета Хаима Хирша (Haym Hirsh) требуется поместить 11 деталей в форме английской буквы **J** в квадратную рамку 10×10 . Как видно из рисунка, каждая буква состоит из восьми единичных квадратов, поэтому места в рамке более чем достаточно – может показаться, что удастся уместить даже 12 таких деталей. Но у них слишком неудобная форма, так что даже с одиннадцатью деталями головоломка совсем не простая.

На фотографии показан экземпляр этой головоломки, изготовленный из фанеры. Но можно рамку просто нарисовать на бумаге, а детали вырезать из картона.

Желаем успеха!

Е.Епифанов



В номере:**УЧРЕДИТЕЛИ**

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**А.А.Гайфуллин****РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонovich,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**И.К.Кикоин****ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА****А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободетский, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Звук в космосе. Возможно ли это? *И.Есипов*
9 Статистика языка. *А.Пиперски*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи M2582–M2585, Ф2589–Ф2592
18 Решения задач M2570–M2573, Ф2577–Ф2580

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 25 Задачи 9–12

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 25 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 27 Зачем плющить зерна, или О плотности
потоков. *А.Стасенко*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 29 Что такое фазовый портрет. *В.Соловьев,*
С.Дворянинов

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика+техника (приборы)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 35 Что не так с угадыванием шляп? *К.Кохась*
37 Принесите еще шляп! *К.Кохась*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 41 Новосибирский государственный университет
52 Инженерная олимпиада школьников
53 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (8, 16)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье И.Есипова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Звук в космосе. Возможно ли это?

И.ЕСИПОВ

КАКИЗВЕСТНО, ОСОБЕННОСТЬЮ ЗВУКОВЫХ волн, отличающих их от электромагнитных или гравитационных, является то, что они могут распространяться только в упругой сплошной среде. В космосе царит пустота. Типичная плотность вещества в межзвездном пространстве порядка $10^6 - 10^7$ атомов (в основном водорода) на один кубический метр при температуре $T = 2,7$ К (это около -270°C). Среднеквадратичная скорость движения таких атомов, согласно соответствующим законам молекулярной физики, определяется выражением $v_{\text{ср}} = \sqrt{3RT/M}$, где $R = 8,3$ Дж/(моль · град) – газовая постоянная, M – молярная масса. Для атомарного водорода $M = 10^{-3}$ кг/моль. Таким образом, для атомов водорода в межзвездном пространстве среднеквадратичная скорость будет около 250 м/с.

При таких условиях атом водорода сталкивается с другим атомом примерно один раз в несколько миллиардов секунд, т.е. частота столкновений $\nu \sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}$, пробегая расстояние от столкновения до столкновения $\lambda = v_{\text{ср}}/\nu \sim 10^9$ км (длина свободного пробега) – миллиард километров. Предполагая, что длина звуковой волны должна быть заведомо больше длины свободного пробега в веществе, а частота звука меньше частоты столкновений атомов, получаем, что такой звук будет иметь частоту колебаний меньше миллиардной доли секунды (меньше 10^{-9} Гц).

Такой звук нельзя воспринимать человеческим слухом, для которого характерен частотный диапазон 20–20000 Гц. Однако Вселенная огромна в пространстве (около

46 миллиардов световых лет или $43 \cdot 10^{22}$ км) и достаточно стара во времени (приблизительно 14 миллиардов лет), так что у звука есть возможность возникнуть в разных местах Вселенной на различных этапах ее развития. Кроме того, звук также является весьма полезным инструментом для изучения Вселенной.

Давайте попробуем совершить путешествие через пространство и время, потому что чем дальше мы сможем заглянуть в глубину Вселенной, тем на более древнем этапе ее истории мы окажемся. Начнем наше путешествие из Солнечной системы от планеты Земля.

Звук на Земле

Как вы знаете, звук обеспечивает один из самых распространенных способов общения между животными и людьми. Однако более важно, что звук также является отличным инструментом для дистанционного зондирования окружающей среды, атмосферы, океана и структуры нашей планеты (см., например, статью «Физика звука» в «Кванте» №12 за 2018 г.).

Сначала кратко рассмотрим, как мы изучаем звук на Земле. Земная гравитация создала слоистую структуру атмосферы, океана и земной коры. Поэтому на Земле имеются условия для существования звуковых каналов, по которым звук может пробегать огромные расстояния без существенного затухания. Скорость звука возрастает с температурой, зависит от скорости ветра в атмосфере или течения в океане. В земной коре скорость звука зависит от плотности и структуры вещества, что позволяет сейсмологам находить подземные месторождения полезных ископаемых. Пробегая в океане большие расстояния,

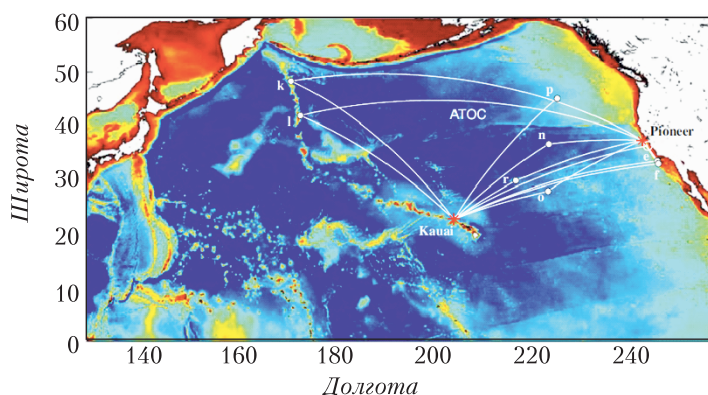


Рис. 1. Схема акустической термометрии в Тихом океане (АТОС — акустическая термометрия океанского климата). Измеряется время распространения звука на протяженных трассах между Гавайями, Алеутскими островами и Калифорнией. Это время зависит от температуры среды

звук оказывается чувствительным к малым изменениям средней температуры океана, что может быть критерием глобального потепления (рис.1). Несколько пересекающихся акустических путей используется для акустической томографии, которая обеспечивает 4D изображения океанических процессов (3D пространство плюс время).

У нас имеется большое разнообразие акустических методов и инструментов для исследования структуры земной коры, океана и атмосферы здесь на Земле. И возникает естественный вопрос — можем ли мы взять их в космос для исследований на других планетах? Ответить на этот вопрос не так просто. Исследование космоса имеет ряд существенных ограничений, которые необходимо выполнять, и не все известные нам методы, которые используются на Земле, удовлетворяют этим ограничениям.

Во-первых, и, пожалуй, самое строгое ограничение, это вес полезной нагрузки. Доставка оборудования в космос — весьма дорогостоящая процедура, а многие акустические методы (особенно те, которые связаны с низкочастотными источниками звука) требуют тяжелого оборудования. Во-вторых, есть ограничения по энергопотреблению оборудования. В космосе нужно полагаться на тяжелые батареи или солнечные панели, чтобы обеспечить элект-

рическое питание взятых в космический полет приборов. В-третьих, существует конкуренция в исследованиях разными методами. Электромагнитные и гравитационные волны не требуют упругой среды для распространения, и, таким образом, их можно использовать для дистанционного зондирования, в отличие от акустических методов, которые требуют установки измерительных приборов на планете. Поэтому акустические методы могут быть полезными там, где у них нет конкуренции. Это, прежде всего,

исследование электропроводящих сред: плазма, океаны, внутренняя структура планет, куда не проникают электромагнитные волны. И наконец, нужно учитывать тот факт, что акустические методы не обязательно имеют такую же эффективность на других планетах, о которой мы знаем на Земле. Эффективность акустических методов зависит от состояния среды, в которой они используются, а давление, температура, плотность и химический состав других миров, как правило, сильно отличаются от того, к чему мы привыкли здесь на Земле.

В этой связи важно понять, как уже используются акустические методы в космосе и какие имеются результаты, полученные с их помощью.

Исследование Луны

Начало инструментального исследования Луны можно отнести к 1959 году, когда впервые рукотворный инструмент достиг поверхности естественного спутника Земли. Это была советская станция «Луна-2». В 1969 году американский космический корабль «Аполлон-11» доставил на Луну первую в истории экспедицию. Эта и последующие экспедиции (последним был полет корабля «Аполлон-17» в 1972 г.) позволили выполнить ряд наблюдений на Луне и доставили образцы лунного грунта на Землю. В это же время СССР

запустил ряд автоматических лунных станций («Луна-16» в 1970 г. и последняя «Луна-24» в 1976 г.), которые также выполнили исследования на Луне и доставили на Землю лунный грунт (рис.2).

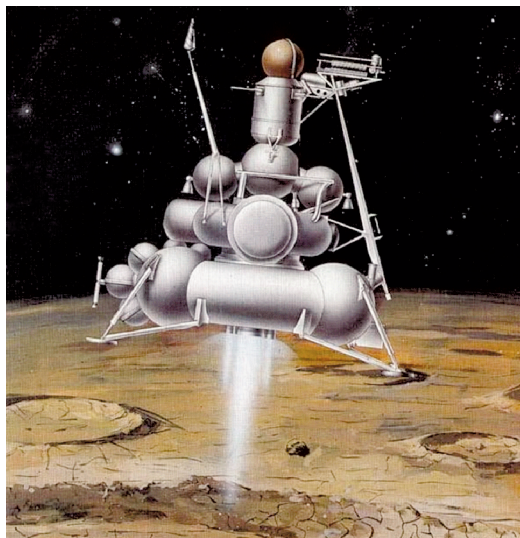


Рис. 2. Лунная станция «Луна-16» совершает посадку

Автоматические станции «Луна» доставляли на Землю керны лунного реголита, полученные в результате бурения на глубину более 2-х метров. Чтобы обеспечить такое бурение и получить неразрушенные керны, дополнительно использовалось ультразвуковое возмущение бура. Такая ультразвуковая технология лунного бурения позволила получить качественные образцы кернов, показавшие структуру лунного реголита. Анализ результатов этих полетов впервые дал убедительное доказательство наличия на Луне воды. Значительно позже, в 1990-х годах, американцы смогли получить аналогичные результаты. В структуре лунного грунта была обнаружена вода!

В ходе исследований по программе «Аполлон» измерялись различные физические поля на поверхности Луны, но достаточно детальную картину внутренней структуры Луны удалось получить именно акустическим методом. Акустические сигналы могли возбуждаться при старте возвращающейся ракеты либо естествен-

ными возмущениями поверхности Луны (включая падение метеоритов). Сигналы, возбужденные на поверхности, распространяются в глубь Луны, там они рассеиваются и отражаются на внутренней структуре. С помощью линейки сейсмических приемников, установленной на лунной поверхности, рассеянные внутренней структурой акустические сигналы регистрировались и затем передавались по радиоканалу связи на Землю.

Стоит заметить, что хотя сейсмические и другие эксперименты на Луне были прекращены в 1977 году, полученные данные от лунных сейсмических датчиков были заново обработаны в 2010 году с применением современных вычислительных средств. Интересно, что эта обработка показала новый вид лунного ядра: твердое ядро, окруженное жидким внешним ядром, в свою очередь, окруженным слоем частично расплавленной магмы (рис.3).

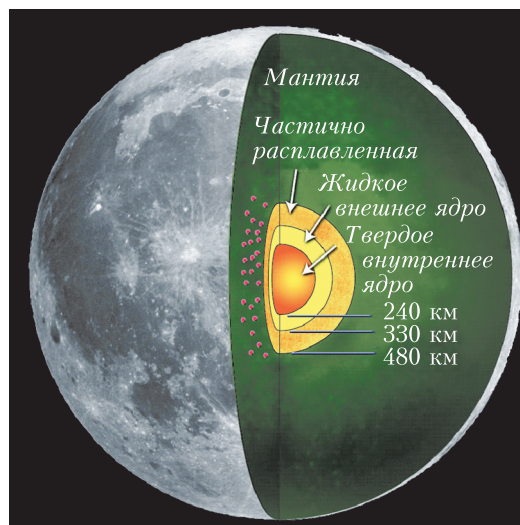


Рис. 3. Внутренняя структура Луны

Полученный опыт сейсмических исследований на Луне успешно применяется при исследовании астероидов. Автоматическая станция устанавливает на поверхности астероида сеймоприемники, которые регистрируют искусственные или естественные возмущения и их отражения от внутренней структуры.

Звук на Солнце

Солнце – это достаточно плотная ионизированная газовая структура. Мы не можем сомневаться в существовании звука на Солнце. Конечно, интенсивные вихри горячего газа в его верхних слоях и турбулентность создают страшный рев в широкой полосе частот. Однако на Земле мы этот рев не слышим, поскольку между Землей и Солнцем имеется 150 миллионов километров вакуума, который не пропускает звук.

В верхних слоях солнечной атмосферы температура газа ниже, чем в более глубоких слоях. По опыту исследования распространения звука в стратифицированной среде можно ожидать, что звук будет концентрироваться в области с минимальной скоростью своего распространения, т.е. в слое с минимальной температурой. Звук, рождаясь в результате турбулентных движений в конвективных зонах, распространяется таким образом, чтобы остаться в верхних слоях солнечной атмосферы (рис.4). На глубине скорость звука и температура резко увеличиваются, и это заставляет звук возвращаться обратно в конвективную зону. Солнце имеет сферическую форму, поэтому звук, распространяясь по циклическим траекториям вдоль поверхности Солнца (p -моды на рисунке 4, что соответствует волнам давления),

будет усиливаться, если число таких циклов будет целым. В таком случае мы можем считать Солнце резонатором, в котором усиливаются определенные колебания – сферические моды.

Заметим, что на Солнце не может быть сдвиговых волн, эффективных в сейсмических задачах на Земле или на других планетах. Солнце – это плотный газ (или жидкость), в такой среде отсутствует модуль сдвига и поэтому солнечная среда не может обеспечить распространение сдвиговой волны. На большой глубине, в радиационной зоне и ядре, существенны силы гравитации, а не упругости. Поэтому там будут распространяться не упругие волны давления, а внутренние волны, совершающие движение под действием сил плавучести (g -моды на рисунке 4). Так что это скорее гидродинамическая, а не акустическая задача. Эти волны (g -моды) затухают в области конвективных потоков и не доходят до поверхности, и поверхность Солнца не отражает информацию о ядре.

Однако в последнее время появились данные о возможности наблюдения этих слабых волн на Земле. Ядро Солнца вращается с периодом один оборот в семь дней, что намного быстрее, чем вращение радиационной и конвективной зон. Волны g -моды модулируют магнитное поле, создаваемое вращающимся ядром Солнца, и эти модуляционные составляющие с периодом в 7 дней были зарегистрированы земными магнетометрами.

Таким образом, получается, что мы можем слышать звук Солнца на Земле.

Создание нашей Вселенной с помощью звука: Большой взрыв

Принято считать, что наша Вселенная была создана в результате уникального космического явления, которое называли «Большой взрыв». Открытие в 1964 году реликтового электромагнитного излучения является свидетельством

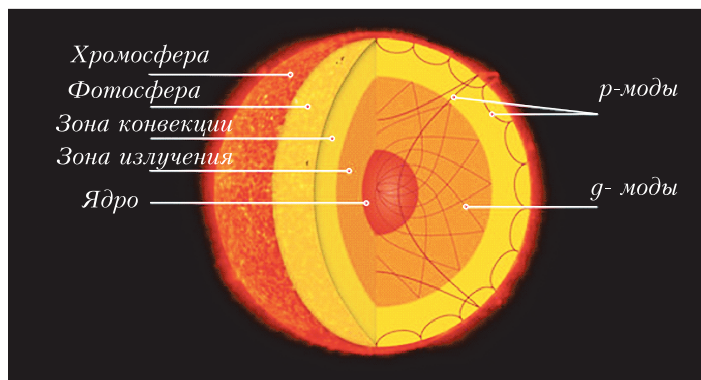


Рис. 4. Слоистая структура Солнца и лучи, по которым распространяется звук. Звук, распространяющийся по целочисленным циклам, усиливается и создает сферические моды колебаний давления на поверхности (p -моды) и внутренние волны в поле тяготения (g -моды)

этого события и последующего расширения Вселенной.

С момента создания нашей Вселенной и начинается история акустических волн. Сразу после Большого взрыва Вселенная представляла собой горячую кварк-глюонную плазму, которая остывала по мере расширения пространства. Из нее появились все частицы, составляющие видимую материю. Когда температура снизилась достаточно для объединения протонов и электронов в атомы, материя перешла в нейтральное состояние (рекомбинировала), а излучение отделилось от нее. Оно наблюдается сегодня в виде электромагнитного фонового излучения – реликтового излучения. Это – отправные пункты начальных этапов развития нашей Вселенной согласно теории Большого взрыва.

Особенностью этой теории является то, что она объясняет флуктуации плотности, возникшие согласно принципу неопределенности квантовой механики. В изначально горячей расширяющейся плазме, содержащей темную материю, барионы, электроны, фотоны и нейтрино, возникли области избыточной плотности вещества и области разряжения, что может быть источником звуковых волн. Возникающие в таком случае силы тяготения и силы давления противостоят друг другу и создают упругие колебания среды, очень похожие на то, как звук возникает в воздухе в результате действия быстрых перепадов давления. На начальном этапе рождения Вселенной скорости распространения этих акустических волн были вполне релятивистскими и составляли чуть больше половины скорости света!

Примерно через 380000 лет после начала истории нашей Вселенной расширяющаяся плазма достаточно остыла (ниже 3000 К) для того, чтобы электроны и протоны смогли объединиться в устойчивые

нейтральные атомы (прежде всего водорода). Это создало условия для свободного излучения фотонов. Электромагнитное излучение больше не поглощалось ионизованной плазмой, и фотоны получили возможность путешествовать на любые расстояния, потому что нейтральные атомы не могут заметно поглощать электромагнитную энергию. Когда это произошло? Флуктуации в пространстве областей повышенной плотности среды и пониженной плотности (т.е. акустические волны) как бы застыли в фазе, соответствующей акту последнего излучения, и среда потеряла упругость. В результате возникли пространственные достаточно стабильные флуктуации плотности вещества во Вселенной, которые находят свое отражение в пространственных флуктуациях реликтового электромагнитного излучения.

На рисунке 5 показана карта флуктуаций реликтового излучения, приходящего со всей небесной сферы, и эта карта отражает акустические колебания в молодой Вселенной! Но что интересного можно узнать, глядя на эту карту? Интенсивность флуктуаций реликтового излучения составляет величину от 10^{-4} до 10^{-5} от среднего значения. Следовательно, относительная величина флуктуаций

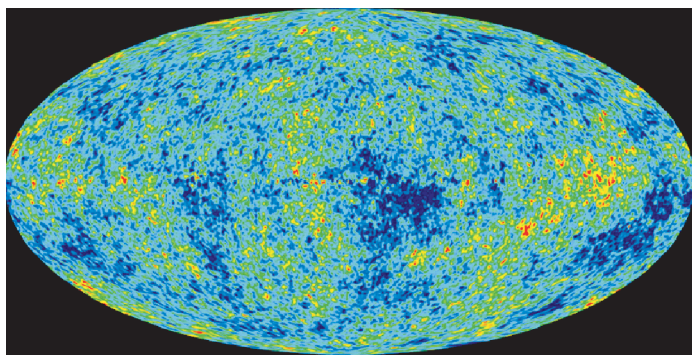


Рис. 5. Карта фонового реликтового электромагнитного излучения Вселенной, составленная за 9-летний период спутниковых наблюдений. Из результатов был убран спектр излучения абсолютно черного тела для средней температуры межзвездного пространства 2,725 К, чтобы показать флуктуации. Желтый и красный цвета показывают более высокую температуру, синий – более низкую. Интенсивность флуктуаций реликтового излучения составляет величину от 10^{-4} до 10^{-5} от среднего значения

давления в среде была того же порядка, что соответствует довольно интенсивным акустическим колебаниям. Так, звуковой шум с такими флуктуациями давления в 10 раз громче, чем уровень шума в метро. Иными словами, в молодой Вселенной существовали звуковые волны весьма существенной амплитуды. Возмущения плотности среды указывают на зародыши будущей структуры Вселенной. Галактики и скопления галактик, которые в миллион раз плотнее, чем средняя плотность Вселенной, образовались из областей молодой Вселенной с избыточной плотностью, в то время как обширные космические пустоты возникли из менее плотных ее частей.

Картина распределения плотности, приведенная на рисунке 5, дает нам возможность составить представление о пространственном спектре этих флуктуаций. На рисунке 6 показан спектр флуктуаций реликтового излучения в зависимости от углового размера его источника. Прежде всего мы видим, что существует характерный угловой размер в пространственном распределении плотности, соответствующий главному максимуму в спектре. Размер пространственных флуктуаций плотности в ранней Вселенной мало отличается от 1° в нашем спектре, что свидетельствует о достаточной пространственной однородности флуктуаций. Далее, наличие дополнительных максимумов показывает возможность анализа тонкой структуры ранней Вселенной. Специалисты считают, что отношение следующего пика к первому (или нечетных к четным пикам в общем случае) определяет барионную плотность среды, тогда как третий пик информирует о плотности темной материи.

Электромагнитные волны реликтового излучения принесли нам информацию об акустических колебаниях, которые были во Вселенной миллиарды лет назад. Другое астрономическое применение звука —

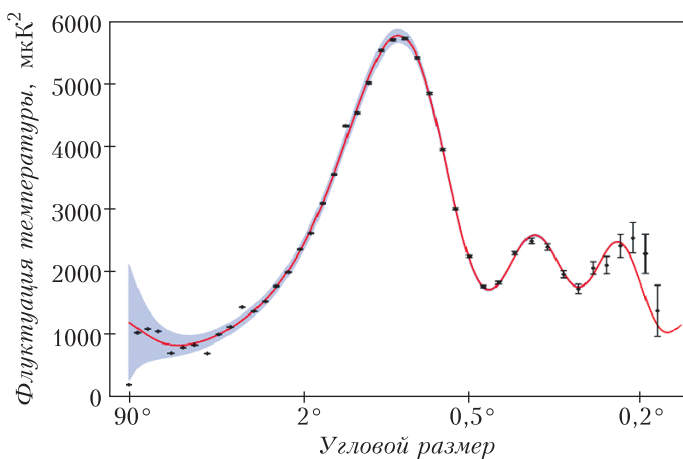


Рис. 6. Пространственный спектр флуктуаций реликтового электромагнитного излучения Вселенной

его использование для расширения возможности восприятия различного рода данных, особенно тех, для которых у нас нет опыта обработки. Новая информация иногда лучше воспринимается ушами, чем глазами. Например, наши глаза могут различать изображения, мелькающие с частотой не больше 10 Гц, в то время как наши уши могут воспринимать изменения в процессе с частотой до 20 кГц. Кроме того, наши уши могут быть чувствительны к нюансам, которые не очень хорошо видны на диаграммах временных рядов или на спектрах. Поэтому довольно часто разного рода электрические сигналы переводят в звук, чтобы их можно было проанализировать с помощью нашего звукового восприятия.

В качестве примера можно привести акустическое представление сигнала с лазерного интерферометра гравитационно-волновой обсерватории (LIGO) при регистрации гравитационных волн во время наблюдения слияния черных дыр. Оказалось, что гравитационные волны, возникающие в этом наблюдении, возмущали лазерное излучение в акустическом диапазоне частот. Чтобы получить представление о характере гравитационного возмущения, перевели сигнал с интерферометра на громкоговоритель. И этот прием позволил выявить в шуме 0,2-секундное частотно-модулированное чириканье.

Это чирикание соответствовало возрастающей скорости закручивания черных дыр в процессе слияния. Получив такое предварительное представление о характере зарегистрированного сигнала, можно уже переходить и к стандартным процедурам обработки, которые, конечно надежнее и объективнее, чем ухо.

Другим примером может быть «озвучивание» электромагнитных портретов Солнца и планет Солнечной системы. Флуктуации электромагнитного излучения от космического объекта транслируются через громкоговоритель. (С результатом можно познакомиться на сайте НАСА <http://acousticstoday.org/space>.) Оказывается у каждой планеты есть свой собственный ни на что не похожий акустический образ.

Заключение

Итак, как мы сможем ответить на вопрос, заданный в заголовке статьи? Возможен ли звук в космосе? Конечно, нет. Звук существует и распространяется только в упругой среде. Звук – это упругие колебания среды, т.е. колебания ее плотности, давления, температуры. Межзвездное пространство – это чрезвычайно разреженная среда. Атомы межзвездного газа пробегают от столкновения до столкновения миллиарды километров. Звук в таких условиях практически невозможен. Но Вселенная родилась со звуком. Звуковые колебания в ранней Вселенной определили во многом ее современную структуру. Толчком к образованию галактик стали акустические колебания плазмы ранней Вселенной. Поэтому без звука не было бы и нашей Вселенной!

Звук участвует в изучении космоса. Исследования структуры планет и астероидов, обнаружение воды на Луне – все это было сделано с помощью звука. Звук помогает исследовать структуру Солнца. У звука нет конкуренции в исследовании электропроводящих сред: плазма, океаны, внутренняя структура планет, куда не проникают электромагнитные волны. Таким образом, без звука наши представления о космосе, его строении и строении

космических тел были бы не полными. Звук – это инструмент для исследования космоса.

Отметим, что при написании этой статьи были использованы материалы статьи «Акустика и астрономия» (J.F.Lynch. Acoustics and Astronomy), опубликованной в журнале «Акустика сегодня» (Acoustics Today, 2017, v.13, n.4). Тем, кого заинтересовала тема этой статьи, советуем посмотреть первоисточник. Он имеется в свободном доступе. Там же можно найти ссылки на дополнительные сайты с демонстрациями других акустических эффектов в космосе. Так, на сайте Дж.Г.Кремпера из Вашингтонского университета (<http://acousticstoday.org/cramer>) можно познакомиться с акустической моделью звука Большого взрыва, вернее – звука после Большого взрыва.



БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи	■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

www.biblio-globus.ru

Статистика языка

А.ПИПЕРСКИ

РАЗВИТИЕ КОМПЬЮТЕРОВ ПРИВЕЛО К созданию больших собраний оцифрованных текстов на разных языках – так называемых лингвистических корпусов. Эти корпуса можно обрабатывать методами математической статистики. Математические модели, порой неожиданно простые, но эффективные, позволяют компьютерным лингвистам предложить человеку и конкретному пользователю решение задач, связанных с автоматической обработкой естественного языка: распознавание речи, определение языка текста и машинный перевод, классификация текстов по темам, извлечение знаний из текста, выделение ключевых слов, анализ тональности текста (т.е. выяснение, содержится ли в нем положительная или отрицательная оценка), обнаружение спама, создание чат-ботов и т.д.

Рассмотрим две задачи – автоматическое определение языка текста и исправление опечаток, хорошие решения которых основаны на анализе частотности отдельных букв и слов, а также их сочетаний в реальных текстах. Удивительно, но такой подход позволяет решать эти задачи, не обладая знаниями ни о грамматических правилах языков, ни о смыслах анализируемых текстов.

Определение языка текста. Предположим, что компьютер получил задание определить, на каком языке написан такой текст:

*При все че математиката е строга наука,
тя има и естетическа страна.*

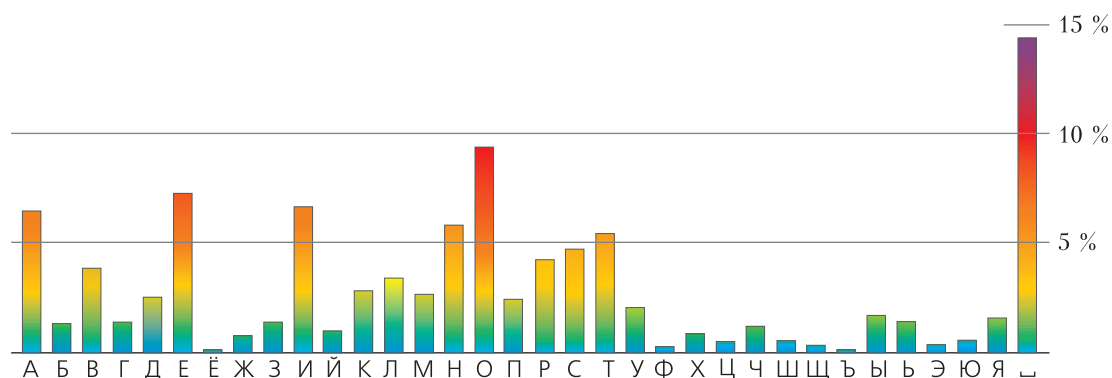
Эта болгарская фраза означает «При том, что математика – строгая наука, она имеет

и эстетическую сторону». Компьютер не владеет языками, но у него есть список языков, к одному из которых надо отнести этот текст. Будем считать, что круг кандидатов не слишком широк: английский, белорусский, болгарский, немецкий, русский, украинский, французский языки.

Самая простая идея, которая приходит в голову, – определять язык по алфавиту. В нашем случае это кириллица, поэтому сразу можно отбросить английский, немецкий и французский языки. Но этот метод не решит задачу полностью, например, он плохо справляется с русским и болгарским языками: болгарский алфавит – часть русского (в болгарском нет букв Ё, Ы, Э), так что любой болгарский текст можно принять за русский. Соотношение русского и украинского алфавитов сложнее, ни один не является частью другого: в украинском нет буквы Ъ, зато есть буквы для обозначения гласных звуков Є, І, Ї и согласного Ѓ. Но все буквы данной фразы в нем присутствуют. В белорусском нет И (вместо нее используется буква І), поэтому он не подходит. Итак, алфавитный подход с задачей не справляется: осталось три языка-кандидата.

Наличие лингвистических корпусов позволяет анализировать языки, находить характеристики, которые их различают. В частности, «паспортом» языка может служить набор частот, с которыми в среднем встречаются буквы в этом языке.

На частотность букв обратили внимание еще в докомпьютерную эпоху. Например, в телеграфной азбуке Морзе, возникшей в первой половине XIX века, наиболее часто используемым буквам ставили в соответствие более короткие сочетания точек и тире. Так, самые частые в английском языке буквы Е и Т кодируются односимвольно – точкой и тире соответственно. Эти буквы можно встретить и в начале



верхнего ряда стандартной английской раскладки клавиатуры, унаследованной от пишущих машинок, — QWERTY. А в немецкой раскладке привычный глазу ряд заменен на QWERTZ — буква Y в немецком языке встречается существенно реже, чем Z, и сослана на периферию. Еще один пример: в криптографии простые шифры на основе замены букв утратили значение после того, как были изучены частотные характеристики языков. Естественно, в XIX веке подсчеты частотности выполнялись вручную. Теперь же, с появлением лингвистических корпусов, частоты букв или слов можно посчитать на компьютере, причем эти данные будут более точными, объективными.

Если условиться, что русский алфавит состоит из 33 букв и пробела, то окажется, что самый частый символ — это пробел (14,46%), дальше следуют гласные О (9,42%), Е (7,33%), И (6,72%), А (6,52%) и согласные Н (5,83%), Т (5,56%) (см. рисунок). А реже всего встречаются буквы Ф (0,27%), Ъ (0,03%) и Ё (0,01%). Конечно, в каждом конкретном тексте частоты могут отличаться от приведенных, но эти отклонения будут несущественными. А вот в болгарском языке частоты букв будут другими. Первыми после пробела идут те же четыре гласные, что и в

русском, но в обратном порядке: А, И, Е, О. Буква Ъ в русском языке — редкость, а в болгарском употребляется в разы чаще: она обозначает особый гласный звук типа краткого «а» и встречается даже в самом слове *български*. Последней по частотности буквой является Ь. Все это показывает, что частотность букв действительно является индивидуальной характеристикой языка.

В компьютерном анализе (например, при определении языка) текст — это последовательность букв. В простейшей модели принимается, что каждая буква в этой последовательности появляется независимо от предыдущих, т.е. текст рассматривается как цепь независимых случайных событий: «прочитав» несколько букв, читатель не знает, что ждет его дальше. Вследствие независимости вероятность встретить данную последовательность букв в выбранном языке равна произведению вероятностей (частот) появления букв в этом языке.

Зная частотности букв для каждого из трех языков-претендентов, можно найти вероятность появления всей фразы (см. таблицу).

Получается, что вероятность случайного появления этой фразы в болгарском языке в 300 раз больше, чем в русском, и в

	П	Р	И	—	В	С	...	
Болгарский	0,025	· 0,044	· 0,076	· 0,163	· 0,038	· 0,043	· ...	$\approx 4,0 \cdot 10^{-80}$
Русский	0,024	· 0,043	· 0,067	· 0,145	· 0,039	· 0,048	· ...	$\approx 1,4 \cdot 10^{-82}$
Украинский	0,024	· 0,039	· 0,055	· 0,157	· 0,045	· 0,034	· ...	$\approx 1,2 \cdot 10^{-85}$

300000 раз больше, чем в украинском. Если о происхождении фразы нет априорной информации, то языки-кандидаты считаются равноправными. Это позволяет сравнивать вероятности появления фразы в разных языках, представив их более привычно, в процентах:

болгарский – 99,65%, русский – 0,3497%, украинский – 0,0003%.

Следовательно, выбрав вариант с максимальной вероятностью, в данном примере получим правильный ответ: фраза написана по-болгарски. Любопытно, что такой простой алгоритм неплохо сработал даже на тексте небольшой длины. Но так бывает не всегда. Например, для названия книги *Математическая составляющая* получается неожиданный результат:

болгарский – 51,55%, русский – 40,75%, украинский – 7,7%.

Симпатия этого алгоритма к болгарскому языку объяснима и носит общий характер: в нем меньше букв, чем в русском или украинском языках, а значит, частотность отдельной буквы будет в среднем чуть больше. Поэтому большинство текстов алгоритм сочтет болгарскими.

Точность определения языка текста можно повысить, если рассматривать не частоты букв по отдельности, а частоты комбинаций символов некоторой длины. Дело в том, что, в отличие от примененной выше простейшей модели, буквы в реальном тексте не независимы: на самом деле каждая буква зависит от предшествующих, по крайней мере – от предыдущей. Так, по правилам русского языка после Ъ могут идти только буквы Е, Ё, Ю или Я. В болгарском после Ъ можно встретить и букву Л, причем это в 10 раз вероятнее, чем встреча с Е, Ю и Я, вместе взятыми. А в украинском И почти не используется после пробела – значит, наша первая фраза со словами *има и* едва ли может быть украинской.

Эту идею академик Андрей Андреевич Марков (1856–1922) воплотил в математической модели, которая в его честь получила название «цепь Маркова». Он изучил распределение гласных и согласных в

последовательности из 20000 букв в романе «Евгений Онегин» (первая глава и начало второй). Основной вывод гласил: «Мы видим, что вероятность букве быть гласной значительно изменяется, в зависимости от того, предшествует ей гласная или согласная». Подсчеты А.А.Маркова показали, что общая доля гласных – 43,2%, но вероятность встретить гласную после гласной уменьшается до 12,8%, а после согласной – возрастает до 66,3%.

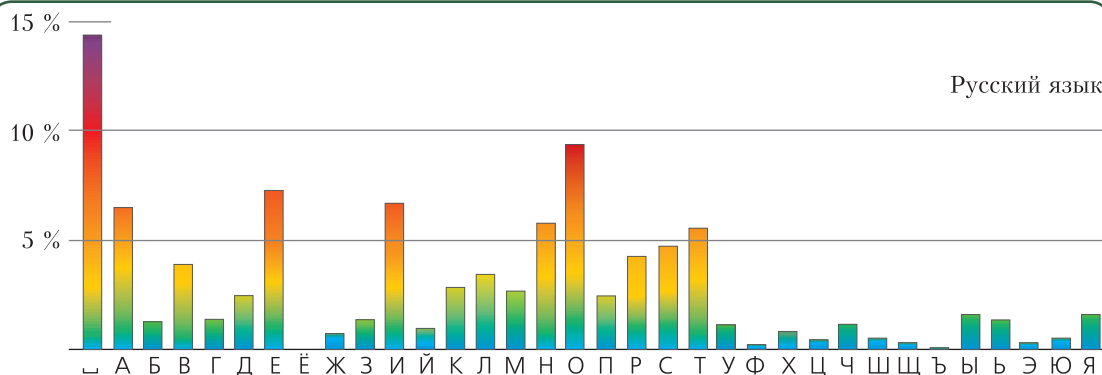
Получается, что в реальном тексте имеем дело не с вероятностями независимых случайных событий, а с условными вероятностями последовательно происходящих событий. В марковской модели будущее зависит от настоящего, а вот прошлое можно не анализировать: его влияние заложено в настоящем. Житейский пример: предсказывая погоду на завтра, можно ориентироваться на сегодняшнюю. Зимняя гроза – редкое явление, так что если сегодня гроза, то завтрашний день может оказаться и солнечным, и дождливым, но вряд ли выпадет снег. С другой стороны, если сегодня идет снег, то увидеть завтра грозу – маловероятно.

Марковские цепи как математический инструмент можно использовать для анализа распределения не только гласных и согласных в данном языке, но и для всех пар букв алфавита. Зависимость буквы от предшествующей заметить несложно. Например, в русском языке среди пар, начинающихся с буквы З, наиболее вероятны сочетания ЗА (29,67%), ЗН (10,18%), З␣ (пробел после З; 8,36%), а после буквы А те же символы А, Н, ␣ дают совсем другие результаты: АА (0,03%), АН (9,56%), А␣ (20,36%).

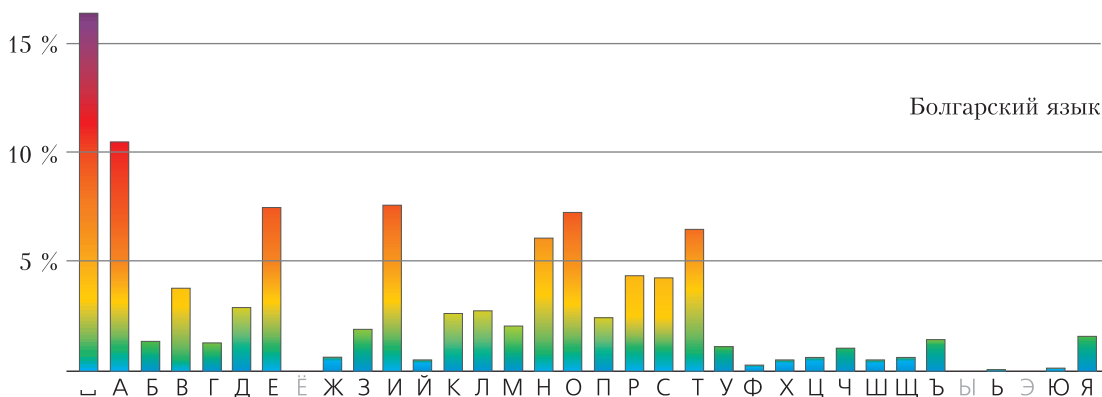
Для решения задачи определения языка текста можно сравнивать частотные характеристики пар из одинаковых символов в разных языках. Например, тройки лидеров среди пар, начинающихся с буквы З: в русских текстах – ЗА, ЗН, З␣; в украинских – ЗА, З␣, ЗН; в болгарских – ЗА, ЗИ, ЗВ.

Зная частоты всевозможных пар, можно в каждом из языков-кандидатов найти вероятность в марковской модели словосо-

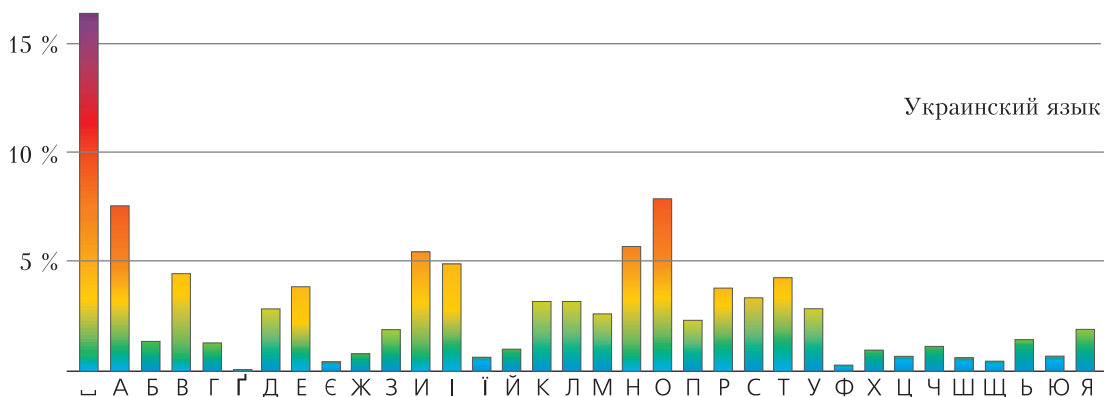
Русский язык



Болгарский язык



Украинский язык



Частотность букв действительно является отличительной и притом наглядной характеристикой языка. Здесь приведены гистограммы для трех славянских языков.

четания *Математическая составляющая*, которое рассматривается как последовательность пар: $\sqcup M$ (буква М является началом слова), МА, АТ, ТЕ, ЕМ и т.д. Вероятность всего словосочетания находится как произведение вероятностей этих пар. Результаты (округленные) дают ответ на вопрос, где могла появиться такая

книга: болгарский – 0,06%, русский – 99,94%, украинский – 0,00003%.

А для фразы, с которой начался разговор (*При все че математиката...*), степень уверенности у марковской модели почти абсолютная: вероятность, что эта фраза написана по-болгарски, равна 99,99991%!

Частотность последовательностей из двух (а лучше даже трех) букв – очень точная характеристика языка. Приведенный метод – основа всех применяемых определителей языка, самый известный – модуль в Google Translate. Получается, что для решения этой лингвистической задачи не требуется знание языков, работает чистая статистика.

Исправление опечаток. Текстовые редакторы и смартфоны решают эту задачу методами, сходными с использовавшимися в задаче определения языка. Только теперь сравниваются частоты не букв, а слов и их последовательностей в выбранном языке.

Предположим, что пользователь ввел фразу:

Его рукав немного болит,

а задача компьютера – найти и исправить в ней опечатки. Человеку сразу понятно, что опечатка допущена в слове *руква*, а должно быть написано слово *рука*. Попробуем научить этому и компьютер, используя гигантский лингвистический корпус русскоязычных текстов общей длиной 16 миллиардов слов.

На первом этапе отыщем подозрительные слова: такие слова, которые либо отсутствуют в корпусе, либо встречаются там очень редко, скажем, для определенности – не более 100 раз (причиной возникновения в корпусе таких слов могут быть опечатки). А слова, которые встречаются более 100 раз, составляют словарь.

Вот сведения о частотах наших четырех слов в корпусе: *его* – 46643493, *руква* – 50, *немного* – 3475296, *болит* – 203993. По принятой договоренности алгоритм решает, что в слове *руква* допущена опечатка.

На втором этапе определим набор слов, одно из которых, возможно, хотел ввести пользователь. Очевидно, что эти слова должны быть похожими, близкими в каком-то смысле к слову *руква*: вряд ли человек хотел напечатать *локоть*, а получилась *руква*.

Для измерения близости слов в лингвистике обычно используется расстояние Дамерау–Левенштейна (названное в честь

американского лингвиста и российского математика). Это расстояние равно минимальному числу «шагов», необходимых для превращения одного слова в другое. Такими шагами являются типовые, стандартные ошибки при наборе текста: замена одной буквы на другую, добавление или удаление буквы, перестановка соседних букв.

Например, расстояние между словами *собака* и *кошка* равно 3: замена *с* на *к* (получится *кобака*); замена *б* на *ш* (*кошака*); удаление первой *а* (*кошка*). Есть и другой путь длины 3: *собака* → *соака* → *сошка* → *кошка*. Но осуществить превращение меньше чем за 3 шага не удастся.

Такое расстояние между словами обладает всеми привычными свойствами расстояния между точками на плоскости: неотрицательность, симметричность (расстояние от *собака* до *кошка* равно расстоянию от *кошка* до *собака*), справедливо неравенство треугольника. Теперь можно формализовать ощущение, что слово *руква* легко получается из слова *рука*, но не из слова *локоть*: расстояние Дамерау–Левенштейна от *рука* до *руква* равно 1, а от *локоть* до *руква* – 5.

Опечаток в одном слове обычно немного, чаще всего одна. Найдем в словаре все слова, которые отстоят от подозрительного слова *руква* на расстояние 1. Слова-кандидатов не так много: *рука* (удаление *в*), *рукав* (перестановка *а* и *в*), *буква* (замена *р* на *б*) и *рукава* (добавление *а*). На этом можно остановиться и предложить пользователю список кандидатов – пусть выбирает сам. Именно так работает, например, проверка орфографии в Microsoft Word.

Но компьютер может пойти дальше и попробовать исправить опечатку, т.е. выбрать самого вероятного кандидата и предложить его пользователю (так поступает Google Docs), а может и сам подставить его в предложение (так обычно работают модули в смартфонах, «помогающие» набирать текст). Этот выбор единственного кандидата – следующий этап алгоритма, который можно реализовывать по-разному.

Простейшее, но неплохо работающее решение – выбрать самое частотное слово. Частоты слов-кандидатов в корпусе таковы: *рука* – 350883, *рукава* – 126817, *буква* – 107262, *рукав* – 66094. Как видно, в примере *Его рукава немного болит* такой автоматический выбор совпадает с человеческим.

А вот во фразах

Здесь написана неправильная рукава

и

У меня рукава порвался

простейшее решение – заменить *рукава* на *рука* – будет ошибочным. Чтобы алгоритм работал более «разумно», надо каким-то образом учитывать слова в контексте фразы. И здесь на помощь снова приходят марковские цепи.

Воспользуемся идеей, которая применялась в анализе по буквам, и попробуем предсказать следующее слово по последнему из виденных. Например, слово *неправильная* встречается в корпусе 50267 раз; пары *неправильная рукава* и *неправильная рукав* в корпусе отсутствуют, *неправильная рука* встречается 4 раза, *неправильная буква* – 53 раза. На примере фразы *Здесь написана неправильная рукава* видно, что метод выбора самой частотной пары соседних слов более эффективен, чем простейший алгоритм.

Дальнейшее улучшение алгоритма состоит в том, что учитываются и слово, идущее перед подозрительным словом, и слово, идущее после него. Определяются частоты обеих пар, найденные вероятности перемножаются. На примере фразы *У меня рукава порвался* даже без статистических данных видно, что после сравнения произведений вероятностей пар выбор наибольшего выглядит достоверным решением:

(*меня рука*) · (*рука порвался*);
 (*меня рукава*) · (*рукава порвался*);
 (*меня буква*) · (*буква порвался*);
 (*меня рукав*) · (*рукав порвался*).

Получается хорошо работающее исправление печаток.

Разумеется, и этот алгоритм можно и нужно совершенствовать. Во-первых, ве-

роятности одношаговых печаток отличаются: например, перестановка соседних букв в слове значительно вероятнее, чем замена буквы на удаленную от нее на клавиатуре (скажем, заменить *б* на *р* не так-то просто). Во-вторых, можно встретиться с правильным, имеющим смысл словосочетанием, которое отсутствует в корпусе, и тогда произведение вероятностей будет равно нулю (пример: словосочетание *работающее исправление*, которое мы использовали в конце предыдущего абзаца, в корпусе пока отсутствует). В-третьих, рассмотренный вариант марковской цепи связывает слово только с ближайшими соседями, хотя в языке встречаются зависимости и на далеких расстояниях. Например, во фразе *Рукава у рубашки, которую Вася купил в аэропорту, оказались слишком короткими*, выбирая на замену *рукав* или *рукава*, придется опираться не на соседние, а на далекие слова *оказались* и *короткими*. В-четвертых, сделав печатки, можно получить фразу со словами из словаря, но ошибочную: например, *У меня лукав порвался*. Алгоритм такую фразу ни в чем не заподозрит. Впрочем, усложнение алгоритма позволяет справиться с подобными затруднениями.

Компьютерная лингвистика. Лингвистические корпуса – фундамент компьютерной лингвистики, неисчерпаемый источник сведений о языке. Их анализируют и профессионалы – лингвисты и компьютерные специалисты, и начинающие исследователи. Даже школьник может самостоятельно написать программу для поиска и проверки закономерностей в языковых массивах.

Самый известный ресурс для русского языка – это Национальный корпус русского языка (НКРЯ, <http://www.ruscorpora.ru>), в основной части которого содержится 283 миллиона слов, а всего – около 600 миллионов слов. Корпус Araneum Russicum Maximum (<http://unesco.uniba.sk>), объемом 16 миллионов слов, мы использовали для определения частоты слов при исправлении печаток. Он состоит из текстов, собранных

Частотность важна в реальной деятельности, например в прикладной лингвистике и криптологии (в ней две ветви: криптография и криптоанализ), встречается и в беллетристике.

Рассказ Эдгара По «Золотой жук» (1843) – одно из первых популярных (и художественных!) изложений как реального способа шифрования методом подстановки, замены букв какими-то знаками, так и метода его расшифровки – частотного анализа. А в 1903 году Артур Конан Дойл в серии историй о Шерлоке Холмсе опубликовал рассказ «Пляшущие человечки», математически весьма схожий с «Золотым жуком».

из интернета, а это очень важный способ создания современных лингвистических ресурсов: ведь в сети лежит множество доступных текстов. К сожалению, эти корпуса нельзя сохранить на своем компьютере, и возможности пользователя ограничены веб-интерфейсом. На помощь приходят другие источники: так, определение языка проводилось на основе свободно распространяемых корпусов из проекта Universal Dependencies (<http://universaldependencies.org>), где в едином формате представлены данные 70 языков.

Понятно, что частота отдельных слов и их сочетаний существенно зависит от набора текстов, включенных в корпус. У корпуса художественных текстов и корпуса текстов новостных – разный «словарный запас». Универсального, правильного корпуса для языка не существует, но надо научиться даже из отдельных, так или иначе «окрашенных» корпусов извлекать общие свойства, черты, особенности данного языка. Это желание вызывает в памяти восклицание основателя палеонтологии Жоржа Кювье: «Дайте мне одну кость, и я восстановлю животное!» По сути – это те задачи, из которых и родилась математическая статистика: как получить представление о ненаблюдаемом целом по некоторой выборке. И для их решения были созданы методы, более продвинутые, чем простой подсчет частот.

Один из приемов – усреднение, согласование значений частот по разным фраг-

ментам корпуса, чтобы уменьшить влияние отдельных текстов. Например, частотность слова *якорь* в текстах НКРЯ, распределенных по десятилетиям, с 1970 года до наших дней, выглядит странно: 1970-е – встречается 160 раз на миллион; 1980-е – 6,8; 1990-е – 8,4; 2000-е – 6,6; 2010-е – 6,7. Причина аномалии – включенная в НКРЯ «Книга о якорях», изданная в 1973 году. В ней одно слово *якорь* встречается 1769 раз, а в остальном корпусе – только 2896. Полученная простым подсчетом частотность слова *якорь* по всему массиву – 21,9 на миллион – явно завышенная. Но если упорядочить значения частот по десятилетиям и взять число из середины списка (медиану), то получится более реальный результат: 6,8 на миллион. Можно учитывать и дисперсию, т.е. оценивать разбросанность значений: как часто и на сколько они отклоняются от среднего значения. Такой метод применял еще А.А.Марков, работая с текстом «Евгения Онегина»: он проверял устойчивость, независимость своих результатов от способов подсчета. Более сложные методы используются для предсказания «настоящих», истинных частот сочетаний слов: надо уметь отличать те, что в корпусе не встретились, но в принципе вполне возможны, от тех, что не встретились, потому что практически невозможны.

В заключение отметим, что автоматическая обработка языка начала активно развиваться в 1950-е годы. В частности, первое время машинный перевод основывался на созданных вручную правилах, предписывавших, как именно переводить то или иное словосочетание при определенных условиях. Постепенно выяснилось, что сочинение правил требует огромных затрат человеческого труда, а работают они все равно плохо.

Поэтому в конце 1980-х годов на первый план в автоматической обработке естественного языка вышел статистический подход: посмотрим, как похожие задачи решались до нас человеком, и найдем решение, комбинируя его из готовых частей. Это стало возможным после появления лингвистических корпусов. Методы,

рассмотренные нами на примерах, прежде всего частотность букв, слов и сочетаний, стали основой решения задач компьютерной лингвистики, перечисленных в начале статьи. Интересно, но временами создается впечатление, что алгоритмы и программы, основанные на статистическом подходе, в какой-то мере освоили язык.

Например, эффективность применения марковских цепей неявно связана с грамматикой и структурой языка. В примере со словосочетанием *Математическая составляющая* при выборе одного из трех языков помогла, в частности, высокая частотность сочетания *ая* в русском языке. Дело в том, что в русском языке в женском роде встречается окончание *-ая*, причем часто, а в болгарском и украинском в такой форме было бы просто *-а*.

В XXI веке математика предложила но-

вые подходы к автоматической обработке языка. Бурное развитие искусственных нейронных сетей, обучаемых на огромных массивах входных данных, дало возможность решать самые разные задачи компьютерной лингвистики. А принципы работы нейронных сетей еще больше приближают компьютер к тому, что можно назвать пониманием естественных языков. На данном этапе компьютерная лингвистика все больше превращается в одну из разновидностей машинного обучения. Но если мы хотим разобраться с тем, что же происходит при обработке текстов искусственными нейронными сетями, нужен именно лингвистический взгляд. Лингвистика как наука необходима и для более полного использования возможностей уже существующих инструментов, и для построения новых математических моделей.

«Математические этюды» выпустили второе, расширенное и дополненное издание книги «Математическая составляющая». Редакторы-составители книги Н.Н.Андреев, С.П.Коновалов, Н.М.Панюнин; художник-оформитель Р.А.Кокшаров.

В сюжетах, собранных в книге, рассказывается как о математической «составляющей» крупнейших достижений цивилизации, так и о математической «начинке» привычных, повседневных вещей. Все авторы — известные ученые. Увлекательный, популярно-описательный стиль изложения делает материалы книги доступными для широкого круга читателей. Сборник богато иллюстрирован.

Первое издание стало лауреатом премии «Просветитель» (2015), отмечено Золотой медалью РАН за выдающиеся достижения в области пропаганды научных знаний (2017).

Во втором издании представлены новые авторы и новые сюжеты. Объем книги вырос более чем вдвое. По сути — это новая книга, выполненная в зарекомендовавшем себя стиле. Основные части книги дополнены разделами «Книжная полка», «Дополнения, комментарии, литература», «Указатель». На «Книжной полке» представлены проверенные временем книги, дающие возможность читателю получить более глубокое и всестороннее представление о мире математики. В разделе «Дополнения, комментарии, литература» развиваются и обсуждаются темы, рассмотренные в основных частях книги. Раздел «Указатель» предметно классифицирует сюжеты книги; в нем отражены и области математики, и используемые термины.

Книга издается по решению Ученого совета Математического института имени В.А.Стеклова Российской академии наук.



Рис. 2

ростью 10 м/с, а машина B — с постоянной скоростью 8 м/с.

1) Найдите время, спустя которое произойдет первая встреча. Ответ выразите в секундах и округлите до целого числа.

2) Какое расстояние проедет машина A к этому моменту? Ответ выразите в километрах и округлите до целого числа.

А.Бычков

Ф2590. Две жидкости A и B смешали между собой так, что объем получившегося раствора оказался равным 1 л, а массовая доля жидкости B в смеси при этом была равна 34%. Суммарный объем раствора составил 94% от суммарного объема жидкостей A и B до смешивания. Плотность жидкости A равна 1000 кг/м^3 , плотность жидкости B равна 800 кг/м^3 .

1) Найдите отношение масс m_B/m_A . Ответ округлите до тысячных долей.

2) Найдите массу жидкости B . Ответ выразите в граммах и округлите до целого числа.

3) Найдите среднюю плотность смеси. Ответ выразите в кг/м^3 и округлите до целого числа.

А.Бычков

Ф2591. На горизонтальной полке лежит стопка из семи одинаковых книг (рис.3).

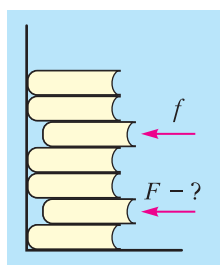


Рис. 3

Третья сверху и вторая снизу немного выдвинуты из стопки, остальные книги прижаты корешками к вертикальной стенке. Наименьшая горизонтальная сила, необходимая для того, чтобы придвинуть к стенке третью сверху книгу, равна $f = 25 \text{ Н}$. Какую наименьшую силу F нужно приложить для того, чтобы придвинуть к стенке вторую снизу книгу? Ответ выра-

зите в ньютонах и округлите до целого числа.

И.Воробьев

Ф2592. На поверхности воды, температура которой 0°C , плавает ледяной шарик, внутри которого находится вмерзшая в лед медная монета. Масса льда вместе с монетой $m = 30 \text{ г}$. Этот композитный шарик перемещают в теплоизолированный сосуд с водой, объем которой $V = 200 \text{ мл}$, а температура 5°C . Теплоемкостью стенок сосуда можно пренебречь. После установления теплового равновесия шарик оказался целиком под водой и «висит» в воде, не опускаясь на дно. Плотность воды $\rho_1 = 1,0 \text{ г/см}^3$, плотность льда $\rho_2 = 0,9 \text{ г/см}^3$, плотность меди $\rho_3 = 9,0 \text{ г/см}^3$, удельная теплоемкость воды $c_1 = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, удельная теплоемкость меди $c_3 = 390 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Чему равна масса монеты, когда она не покрыта льдом? Ответ выразите в граммах и округлите до десятых долей.

А.Бычков

Решения задач М2570–М2573, Ф2577–Ф2580

М2570. Паша расставил числа от 1 до 100 в клетках квадрата 10×10 , каждое по одному разу. После этого Дима рассмотрел всевозможные квадраты площади, большей 1, со сторонами, идущими по линиям сетки, и в каждом покрасил в зеленый цвет наибольшее число (при этом одно число могло быть покрашено несколько раз). Могло ли оказаться, что все двузначные числа покрашены в зеленый цвет?

Ответ: нет, не могло.

Рассмотрим клетку с зеленым числом n и соответствующий ему квадрат, в котором это зеленое число наибольшее. Заметим, что можно расположить квадрат 2×2 внутри этого квадрата, содержащий эту клетку. В расположенном квадрате 2×2 число n тоже наибольшее. Тем самым, каждое

зеленое число является наибольшим в каком-то квадрате 2×2 . Но квадратов 2×2 всего 81 (левый нижний угол квадрата 2×2 однозначно определяет положение, и этот угол в свою очередь не может примыкать к верхней или правой стороне квадрата 10×10), а двузначных чисел — 90, поэтому всем двузначным числам квадратов 2×2 не хватит, значит, все они не могут быть зелеными.

Задача решена.

Заметим также, что доказанная в решении оценка точна: несложно привести пример расстановки чисел, для которого количество зеленых чисел будет равно 81.

В.Брагин

M2571. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть E и F — точки на сторонах AB и CD соответственно (рис.1). Описанная окружность треугольника AEF вторично пересекает отрезок

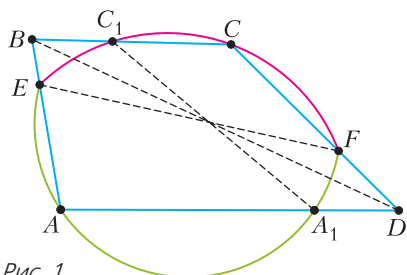


Рис. 1

зок AD в точке A_1 , а описанная окружность треугольника CEF пересекает отрезок BC в точке C_1 . Докажите, что прямые A_1C_1 , BD и EF пересекаются в одной точке.

Обозначим через T вторую точку пересечения описанной окружности треугольника C_1BE с прямой EF (рис.2). Тогда имеем равенства углов $\angle TC_1B = \angle TEA =$

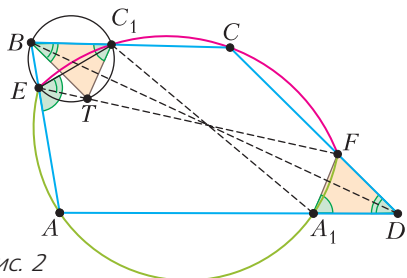


Рис. 2

$= \angle FEA = \angle FA_1D$. Таким образом, $TC_1 \parallel FA_1$ (поскольку $C_1B \parallel A_1A$). Аналогично,

$$\begin{aligned} \angle TBC_1 &= \angle TEC_1 = \angle FEC_1 = \\ &= 180^\circ - \angle FCC_1 = \angle FDA_1, \end{aligned}$$

поэтому $TB \parallel FD$. Получается, что соответствующие стороны треугольников C_1BT и A_1DF параллельны, и эти треугольники гомотетичны (с отрицательным коэффициентом). Центр гомотетии, переводящей один из этих треугольников в другой, лежит на прямых BD , A_1C_1 и TF , которая совпадает с прямой EF . Таким образом, нужное утверждение установлено.

Имеются и другие решения этой задачи, в том числе с использованием теоремы Дезарга, теоремы Чебы и т.д.

И.Богданов, А.Кузнецов

M2572. Пусть k — фиксированное натуральное число. Докажите, что все члены последовательности биномиальных коэффициентов $C_2^1, C_4^2, C_8^4, \dots, C_{2^{n+1}}^{2^n}, \dots$, начиная с некоторого члена, дают один и тот же остаток при делении на 2^k .

Докажем, что при $n \geq k$ все числа $a_n = C_{2^{n+1}}^{2^n}$ имеют равные остатки при делении на 2^k .

Запишем число a_n в виде

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2^n + 1)(2^n + 2) \dots 2^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2^n} = \\ &= \frac{2^n + 1}{1} \cdot \frac{2^n + 2}{2} \cdot \frac{2^n + 3}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} \cdot 2. \end{aligned}$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выделим произведение P_i дробей, знаменатели которых делятся на 2^{n-i} , но не делятся на 2^{n-i+1} . Так как каждая такая дробь имеет вид $\frac{2^n + 2^{n-i}m}{2^{n-i}m}$, где m — нечетное, $1 \leq m < 2^i$, то

$$\frac{2^n + 2^{n-i}m}{2^{n-i}m} = \frac{2^i + m}{m}$$

и

$$P_i = \frac{2^i + 1}{1} \cdot \frac{2^i + 3}{3} \cdot \frac{2^i + 5}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2^i + 2^i - 1}{2^i - 1}.$$

Мы видим, что это P_i не зависит от n .

Для каждого нечетного числа x подберем целое x^* такое, что $xx^* \equiv 1 \pmod{2^k}$ (т.е.

x^* – обратный вычет для вычета x по модулю 2^k). Положим

$$Q_i = \left((2^i + 1) \cdot 1^* \right) \cdot \left((2^i + 3) \cdot 3^* \right) \times \\ \times \left((2^i + 5) \cdot 5^* \right) \cdot \dots \cdot \left((2^i + 2^i - 1) \cdot (2^i - 1)^* \right).$$

Тогда, домножая равенство $a_n = 2P_1P_2 \dots P_n$ на выражения вида tt^* , мы не меняем остаток при делении на 2^k . Поэтому $a_n \equiv 2Q_1Q_2 \dots Q_n \pmod{2^k}$. Но при $i \geq k$ каждое выражение вида $(2^i + t) \cdot t^*$ равно $2^i t^* + tt^* \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod{2^k}$. Поэтому при $i \geq k$ имеем $Q_i \equiv 1 \pmod{2^k}$. Таким образом, a_n вне зависимости от $n \geq k$ таково, что $a_n \equiv 2Q_1Q_2 \dots Q_{k-1} \pmod{2^k}$, что завершает решение.

Подобными методами можно ответить на ряд схожих вопросов. Скажем, можно изучить остатки членов последовательности $C_{3^n}^{2^n}$ при делении на заданную степень тройки.

А.Зиманов, В.Расторгуев

M2573*. Два муравья ползут по ребрам выпуклого многогранника. Маршрут каждого муравья заканчивается в той же вершине, что и начинается, при этом муравей не проходит ни одну точку дважды, пока не возвратится в начальную точку маршрута. На каждой грани F данного многогранника записывают количество ребер грани F , принадлежащих маршруту первого муравья, и количество ребер грани F , принадлежащих маршруту второго муравья. Существуют ли многогранник и пара определенных выше маршрутов такие, что ровно на одной грани два записанных числа различаются?

Ответ: нет, не существуют.

Пусть E – некоторая грань данного многогранника H . Покажем, что если на каждой грани многогранника H , отличной от E , записаны два равных числа, то и на грани E – тоже.

Обозначим через R_1 и R_2 множества ребер, принадлежащих маршруту первого и второго муравья соответственно.

Пусть D – множество ребер, принадлежащих ровно одному из множеств R_1 и R_2 . Покрасим все ребра из множества D : те ребра, которые принадлежат R_1 , покрасим красным, а те, которые принадлежат R_2 , – синим. Легко видеть, что из каждой вершины v многогранника H выходит четное количество покрашенных ребер (т.е. ребер из множества D), обозначим это количество $d(v)$. На границе каждой грани многогранника H , отличной от грани E , поровну красных и синих отрезков. Нам требуется доказать, что и на грани E поровну красных и синих отрезков.

Далее на поверхности H нарисуем вспомогательный граф G следующим образом. Вершинами графа G объявим середины покрашенных ребер, таким образом, в графе G вершины оказываются покрашенными в красный или синий цвет. Далее определим ребра в графе G так: для каждой грани F , отличной от E , разобьем все вершины графа G , лежащие в грани F , на пары и соединим отрезком вершины в каждой паре таким образом, чтобы в каждой паре были вершины разных цветов и отрезки не пересекались друг с другом. (Нетрудно видеть, что такое разбиение всегда возможно.)

Таким образом, в графе G все вершины, лежащие на грани E , имеют степень 1 (т.е. из каждой такой вершины выходит ровно один отрезок), а все остальные вершины графа G имеют степень 2. Это означает, что G – это объединение нескольких компонент связности, каждая из которых представляет собой либо простой путь, либо цикл. Достаточно доказать, что в каждой компоненте, являющейся путем, четное количество вершин. Действительно, поскольку красные и синие вершины чередуются в каждом пути, концевые вершины каждого пути покрашены в разные цвета; тем самым, компоненты графа G , являющиеся путями, определяют взаимно однозначное соответствие между красными и синими вершинами степени 1 графа G . Отсюда следует равенство количеств красных и синих отрезков в грани E .

Пусть в графе G некоторая компонента представляет собой путь P . Соединив концы пути P дополнительным отрезком, мы получим на поверхности L замкнутую (не-самопересекающуюся) ломаную Q . Тогда Q разбивает поверхность H на две области, одну из которых назовем L .

Возьмем сумму S чисел $d(v)$ по всем вершинам v области L . Так как каждое $d(v)$ четно, сумма S четна. С другой стороны, каждое покрашенное ребро многогранника, соединяющее две вершины из области L , считается дважды в сумме S . Отсюда следует, что четно также количество покрашенных ребер, имеющих ровно один конец, лежащий в области L , т.е. покрашенных ребер, пересекающих ломаную Q .

Однако количество покрашенных ребер, которые пересекают Q , равно количеству вершин в замкнутой ломаной Q , которое также является количеством вершин в пути P . Тем самым доказано, что в пути P четное количество вершин, что завершает решение задачи.

Приведем еще одно решение, которое придумал Палмер Мебэйн (Palmer Mebane). Сохраним обозначения E , R_1 и R_2 из первого решения.

Маршрут R_1 делит поверхность многогранника H на две области. Обозначим ту из областей, которая содержит грань E , через O_1 , а другую область – через I_1 . Аналогично определим области I_2 , O_2 , на которые делит поверхность многогранника H маршрут R_2 .

Пусть F – любая грань H , отличная от E . Каждое из (равных) чисел, записанных на грани F , мы будем называть *муравьиным числом* грани F . На грани E написаны два муравьиных числа, и мы хотим доказать равенство этих двух чисел.

Обозначим через S^{II} сумму всех муравьиных чисел с граней множества $I_1 \cap I_2$. Аналогично обозначим через S^{IO} , S^{OI} суммы всех муравьиных чисел с граней множеств $O_2 \cap I_1$ и $O_1 \cap I_2$ соответственно. Наконец, пусть S_1^{OO} и S_2^{OO} – суммы, соответственно, первых и вторых муравьиных чисел для всех граней из множества

$O_1 \cap O_2$. Достаточно показать, что $S_1^{OO} = S_2^{OO}$, тогда мы получим, что два муравьиных числа грани E равны.

Имеем

$$S^{II} + S^{IO} = S^{OI} + S_1^{OO}, \quad (1)$$

поскольку в обеих частях равенства стоит количество ребер в R_1 .

Аналогично,

$$S^{II} + S^{OI} = S^{IO} + S_2^{OO}. \quad (2)$$

Далее, пусть X – это общее количество ребер $e \in R_1 \cap R_2$ многогранника H таких, что e – общее ребро грани из $I_1 \cap I_2$ и грани из $O_1 \cap O_2$. Также пусть Y – это общее количество ребер $e \in R_1 \cap R_2$ многогранника H таких, что e – общее ребро грани из $I_1 \cap O_2$ и грани из $O_1 \cap I_2$.

Тогда

$$S^{II} - X = S^{IO} - Y, \quad (3)$$

поскольку в обеих частях равенства записано количество ребер из R_2 , которые лежат внутри области I_1 .

Аналогично,

$$S^{II} - X = S^{OI} - Y, \quad (4)$$

поскольку в обеих частях равенства записано количество ребер из R_1 , которые лежат внутри области I_2 .

Из (3) и (4) следует, что

$$S^{IO} = S^{OI}.$$

Отсюда, с учетом (1) и (2), получаем требуемое равенство

$$S_1^{OO} = S_2^{OO}.$$

Замечание. Вопрос задачи был изначально поставлен профессором Дональдом Кнутом в октябре 2018 года (в личной переписке с автором). Для более глубокого ознакомления с сюжетами по тематике данной задачи читатель может обратиться к упражнениям 410–420 части 7.2.2.1 книги Д.Кнута «Искусство программирования» (см. <https://cs.stanford.edu/~knuth/fasc5c.ps.gz>).

Н.Белухов

Ф2577.¹ Плоская сетка с большим количеством ячеек в виде одинаковых ромбов сделана из жестких легких прямых длинных проволочек, скрепленных в узлах сетки шарнирами. Ребро каждой ячейки-ромба имеет длину a . Один узел-шарнир с координатами $(0,0)$ удерживают неподвижным, а шарнир с координатами (n,m) начинают перемещать с постоянной скоростью вдоль параллельных проволочек (n и m – это целочисленные не равные нулю значения с единицей расстояния a). В некий момент времени все ячейки сетки становятся квадратами. В этот момент скорость шарнира с координатами (n,m) имеет проекции на взаимно перпендикулярные проволочки v и u . С какой скоростью и с каким ускорением движется в этот момент шарнир с координатами (k,l) ?

Согласно условию задачи проволочки остаются прямыми. Поэтому проволочка, проходящая через узел $(0,0)$ и узел $(n,0)$, вращается вокруг оси, проходящей через узел $(0,0)$, с угловой скоростью $u/(na)$. А проволочка, проходящая через узел $(0,0)$ и узел $(0,m)$, вращается вокруг оси, проходящей через узел $(0,0)$, с угловой скоростью $-v/(ma)$ соответственно. Чем дальше от оси вращения находится узел на проволочке, проходящей через узлы $(0,0)$ и $(n,0)$, тем больше его скорость в поперечном к этой проволочке направлении. То же самое утверждение относится и к проволочке, проходящей через узлы $(0,0)$ и $(0,m)$. Скорость узла (k,l) равна поэтому $(vl/m; uk/n)$.

Проекция ускорений узлов $(0,l)$ и $(k,0)$ на оси y и x в указанный момент времени равны, соответственно,

$$-(v/(ma))^2 la \text{ и } -(u/(na))^2 ka.$$

Если выполняется соотношение $k/l = n/m$, то, очевидно, ускорение такого узла (k,l) равно нулю. Поэтому проекции ускорения узла (k,l) на оси x и y в этот момент

времени будут такими:

$$a_x = \frac{(u/n)^2 k((nl/(mk)) - 1)}{a} = \frac{u^2}{a} (l/(mn) - k/n^2);$$

$$a_y = \frac{v^2}{a} (k/(mn) - l/m^2),$$

или

$$a_x = \frac{u^2}{na} \left(\frac{l}{m} - \frac{k}{n} \right); \quad a_y = \frac{v^2}{ma} \left(\frac{k}{n} - \frac{l}{m} \right).$$

Ф2578. Пористый материал имеет внутри себя множество пор – каналов-отверстий. Все эти каналы параллельны друг другу. Диаметр пор много меньше длины свободного пробега молекул. Таким материалом заполнены трубки тройника симметричной формы с непроницаемыми стенками. В центре тройника имеется свободное от пористого материала небольшое пространство, в которое выходит каждый канал одним из своих концов. Попадание молекулы в канал с какой-либо стороны означает, что у молекулы имеется определенная вероятность $\alpha > 0,5$ вылететь из этого канала через то же отверстие, в которое она влетела, и вероятность $(1 - \alpha)$ вылететь из другого отверстия этого канала. Эти вероятности не зависят от температуры. Тройник соединяет три одинаковых сосуда с разреженным гелием. Сначала гелий во всех трех сосудах имел одинаковую температуру T_0 и одинаковое начальное давление p_0 . Затем в одном из сосудов температуру оставили прежней, во втором подняли в два раза, а в третьем подняли в три раза. Температура внутри тройника не изменилась. Какие давления установятся в этих сосудах и в свободном пространстве внутри тройника через большое время? Считайте, что суммарный объем всех каналов и свободного пространства внутри тройника мал в сравнении с объемом любого из сосудов.

Давление в сосуде с разреженным газом определяется концентрацией молекул и температурой: $p = nkT$ (здесь k – постоянная Больцмана). Следовательно, концентрации молекул в сосудах равны

¹ Автор решений задач Ф2577–Ф2580 – С.Варламов.

$n_i = p_i / (kT_i)$. Согласно условию задачи в середине тройника имеется свободное от пористого материала пространство, а в силу симметрии тройника из этого свободного пространства атомы гелия попадают в каналы, соединяющие тройник с сосудами, с одинаковой частотой. Частоты попадания атомов в каналы тройника из сосудов пропорциональны средним скоростям движения молекул в соответствующих сосудах $v_{i\text{ср}} \sim T_i^{0,5}$ и концентрации молекул в этих сосудах n_i .

Суммарное количество молекул остается постоянным, поэтому выполняется соотношение

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3n_0.$$

Поскольку рассматривается установившееся состояние, то количество молекул, попадающих в каналы из любого сосуда, равно количеству молекул, которые из этих же каналов влетают в соответствующие сосуды. Иными словами, выполняется еще несколько соотношений, в которых индекс i может принимать значения 1, 2, 3:

$$n_i T_i^{0,5} B = \alpha n_i T_i^{0,5} B + (1 - \alpha) n_4 T_0^{0,5} B, \quad \text{или} \quad n_i = n_4 \frac{T_0^{0,5}}{T_i^{0,5}}.$$

Здесь B – константа, одинаковая для всех сосудов и свободного пространства внутри тройника, а n_4 – концентрация молекул в том самом небольшом свободном пространстве внутри тройника. В результате комбинации всех соотношений получаем

$$3n_0 = (1 + 2^{-0,5} + 3^{-0,5}) n_4$$

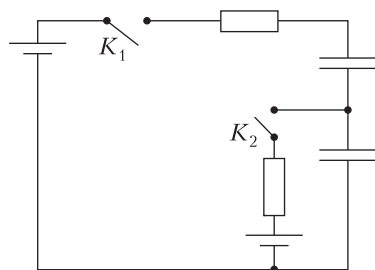
и, соответственно,

$$p_1 = p_4 = \frac{3n_0 k T_0}{1 + 2^{-0,5} + 3^{-0,5}} = p_0 \frac{3}{1 + 2^{-0,5} + 3^{-0,5}} \approx 0,72 p_0,$$

$$p_2 = \frac{3n_0 k T_0 \cdot 2^{0,5}}{1 + 2^{-0,5} + 3^{-0,5}} = p_0 \frac{3 \cdot 2^{0,5}}{1 + 2^{-0,5} + 3^{-0,5}} \approx 1,02 p_0,$$

$$p_3 = \frac{3n_0 k T_0 \cdot 3^{0,5}}{1 + 2^{-0,5} + 3^{-0,5}} = p_0 \frac{3^{1,5}}{1 + 2^{-0,5} + 3^{-0,5}} \approx 1,25 p_0.$$

Ф2579. В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, резисторы



имеют одинаковые сопротивления R , а конденсаторы – одинаковые емкости C . Батареи имеют ЭДС 3ε слева сверху и ε справа внизу. В начальный момент конденсаторы разряжены. В какой последовательности и с какой временной задержкой τ нужно замкнуть ключи K_1 и K_2 , чтобы в электрической цепи выделилось как можно меньше тепла?

Пусть первым будет замкнут ключ K_2 , а в момент, когда на нижнем конденсаторе будет напряжение U , замыкают ключ K_1 . На первом этапе выделится количество теплоты, равное

$$Q_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

На втором этапе выделится такое количество теплоты Q_2 , что выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \frac{CU^2}{2} + 3\varepsilon \cdot 2C\varepsilon - \varepsilon(2C\varepsilon - (\varepsilon - U)C) = \\ = \frac{CU^2}{2} + 5\varepsilon^2 C - C\varepsilon U = 2,5\varepsilon^2 C + Q_2. \end{aligned}$$

Общее количество теплоты на двух этапах равно

$$Q_1 + Q_2 = CU^2 + 2,5\varepsilon^2 C - C\varepsilon U.$$

Максимальное количество теплоты будет при $U = 0$ или при $U = \varepsilon$. И оно равно $Q_{\text{max}} = 2,5\varepsilon^2 C$. Минимальное количество теплоты выделится, если $U = \varepsilon/2$. Это минимальное количество равно

$$Q_{\text{min}} = 2,25\varepsilon^2 C = \frac{18}{8} \varepsilon^2 C.$$

Пусть теперь первым будет включен ключ K_1 . Выберем такой момент времени после замыкания этого ключа, что на каждом

конденсаторе будет напряжение U . К этому моменту выделится количество теплоты, равное

$$Q_3 = U^2 C.$$

Теперь замыкается ключ K_2 , и через большое время будет выполнено соотношение $3\varepsilon(2\varepsilon - U)C -$

$$-(U - \varepsilon)\varepsilon C - \varepsilon(2\varepsilon - U)C + U^2 C = \\ = 5C\varepsilon^2 - 3\varepsilon UC + U^2 C = 2,5\varepsilon^2 C + Q_4.$$

Общее количество теплоты, выделившееся при такой последовательности и с таким временем задержки, равно

$$Q_3 + Q_4 = 2,5\varepsilon^2 C - 3\varepsilon UC + 2U^2 C.$$

Максимальное значение $Q_{\max} = 2,5\varepsilon^2 C$ будет достигнуто либо при $U = 0$, либо при максимально возможном значении $U = 1,5\varepsilon$. Минимальное значение суммарного количества теплоты достигается при $U = 3\varepsilon/4$, и оно равно

$$Q_{\min} = \frac{11}{8}\varepsilon^2 C.$$

Видно, что это значение $Q_{\min}$ меньше, чем в первом случае. А временная задержка τ такова, что справедливо равенство

$$3\varepsilon(1 - e^{-2\tau/(RC)}) = \frac{3}{2}\varepsilon, \text{ откуда } \tau = \frac{RC}{2} \ln 2.$$

Ф2580. *Неподвижная пластина из золота малой толщины ($d \approx 1$ мкм), имеющая температуру $T = 200$ К, подвергается облучению потоком нейтронов. Каждый нейтрон имеет кинетическую энергию $E_0 = 0,8$ кэВ. Иногда из пластины выбиваются атомы золота. Оцените максимальную скорость, которую может иметь выбитый нейтроном из пластины атом золота. Известны термодинамические параметры золота: молярная масса $M = 197$ г/моль; плотность (при н.у.) $\rho = 19,3 - 19,32$ г/см³; температура плавления $T_{\text{пл}} = 1337,33$ К; молярная теплота плавления $L_{\text{пл}} = 12,68$ кДж/моль; температура кипения $T_{\text{кип}} = 3129$ К; молярная теплота испарения $L_{\text{исп}} = 340$ кДж/моль; температура Дебая 170 К. При температурах выше температуры Дебая молярная*

теплоемкость золота равна примерно $C = 3R = 25$ Дж/(моль · К). Кристаллическая решетка золота – кубическая гранецентрированная типа Си.

Сначала вычислим максимальную кинетическую энергию, которую от нейтрона может получить ядро атома золота после лобового удара. Если ядро до столкновения покоилось, то после столкновения оно получит скорость, равную удвоенной скорости центра масс системы из движущегося нейтрона и покоившегося ядра золота. Соответственно, ядру атома золота достанется некая доля кинетической энергии E_0 , которую до удара имел нейтрон. Эта доля равна $2 \cdot 197 / (197 + 1)^2 \approx 10^{-2}$. Таким образом, максимальная кинетическая энергия, которую может получить в результате удара ядро атома золота, равна $E_1 = 8$ эВ $= 12,8 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Каждый атом в составе конденсированного вещества (в том числе и золота) взаимодействует со своими соседями так, что они (взаимно) обеспечивают друг другу пребывание в потенциальной яме определенной глубины. В гранецентрированной кубической решетке у каждого атома внутри объема вещества есть $Z = 12$ ближайших соседей. Если считать, что каждый атом взаимодействует только с ближайшими соседями и глубина одной (для пары атомов) потенциальной ямы равна U_0 , то для перевода одного моля вещества из конденсированного состояния при температуре 0 К в газообразное состояние требуется энергия, равная $L_0 = N_A Z U_0 / 2$. Из приведенных в условии задачи термодинамических характеристик золота можно вычислить величину L_0 . Зная эту величину, можно оценить энергию, которая требуется, чтобы один атом с поверхности золотой пленки оторвался от своих ближайших соседей. Вероятность того, что на поверхности золотой пластины имеется один атом, не находящийся в плоскости поверхности, а выступающий наружу из пластины, не равна нулю. Для такого атома число ближайших соседей равно $Z_1 = 3$. Если такой атом получит от нейтрона после удара кинетическую энергию E_1 , то он, вырвав-

шись из потенциальных ям, которые ему обеспечивали три ближайших соседа, сохранит кинетическую энергию $E_1 - Z_1 U_0$. Температура Дебая (170 К) для золота значительно меньше, чем температура плавления (1337,33 К), поэтому не будет большой ошибкой считать, что от 0 К до температуры плавления и далее вплоть до температуры кипения молярная теплоемкость золота постоянна и равна $3R = 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. Тогда

$$CT_{\text{кип}} + L_{\text{пл}} + L_{\text{исп}} - \frac{3}{2}RT_{\text{кип}} = L_0 = \frac{N_A Z U_0}{2},$$

откуда

$$Z_1 U_0 = \frac{2Z_1 L_0}{N_A Z} = \frac{2Z_1 (3RT_{\text{кип}} + L_{\text{пл}} + L_{\text{исп}} - (3/2)RT_{\text{кип}})}{N_A Z} \approx 6,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Теперь найдем оценку для максимальной кинетической энергии выбитого нейтроном атома золота:

$$(12,8 - 6,5) \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 6,3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж},$$

а также оценку для максимальной скорости выбитых атомов золота:

$$v_{\text{max}} \approx 2 \text{ км/с}.$$

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

9. Петя и Вася тренируются на кольцевом велотреке: одновременно стартовали из одной и той же точки и едут с постоянными скоростями. Петя едет быстрее Васи. Когда Петя прошел 16 кругов, он встретил в точке старта Васю. А когда Вася прошел 16 кругов, он встретил в точке старта Петю. Верно ли, что Вася после каждого круга встречал в точке старта Петю?

Б.Френкин

10. У Саши есть два клетчатых квадрата 7×7 . Ему нужно разрезать их по линиям сетки на части так, чтобы частей получилось не более пяти и их можно было уложить в один слой в коробку 10×10 . Есть ли способ выполнить это задание?

А.Грибалко

11. Даны отрезок AB и окружность. Постройте на окружности точки C и D так, чтобы четырехугольник $ABCD$ был равнобокой трапецией с основанием AD .

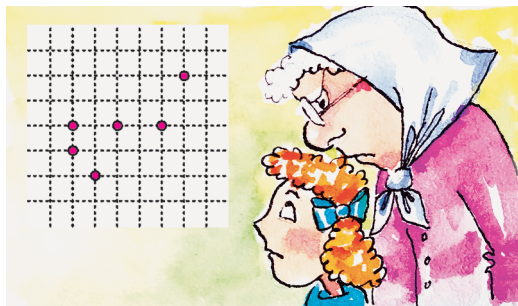
Е.Бакаев

12. По кругу выписаны 2019 натуральных чисел. За одну операцию можно либо удвоить одно из этих чисел, либо прибавить к нему одного из его соседей. Всегда ли можно за несколько операций сделать все числа равными?

Н.Чернятьев

Задачи

1. На клетчатой бумаге отмечены 6 точек (см. рисунок). Проведите три



прямые так, чтобы одновременно выполнялись три условия:

- каждая отмеченная точка лежит хотя бы на одной из этих прямых;
- на каждой прямой лежат хотя бы две отмеченные точки;
- все три проведенные прямые пересекаются в одной точке (не обязательно отмеченной).

Д.Шноль, М.Раскин

2. На берегу реки Лимпопо растут пальма и баобаба. Надувной крокодил плывет от пальмы до баобаба 25 минут. Живой крокодил за это время может проплыть от баобаба до пальмы. Сколько времени потребуется



Задача 1 предлагалась на XLII Турнире имени М.В.Ломоносова; задачи 2—4 — на XXV Турнире математических боев имени А.П.Савина.

живому крокодилу, чтобы доплыть от пальмы до баобаба?

А.Хачатурян

3. Во двор жилого дома вышли шесть пенсионеров, и каждый сыграл в шашки ровно с двумя другими. На следующий день вышли пять пенсионеров,

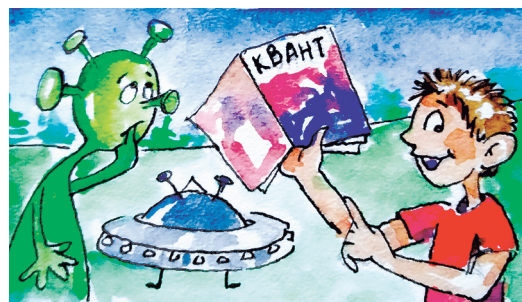


и опять каждый сыграл в шашки ровно с двумя другими. Оказалось, что никакие двое не играли дважды и что нет трех пенсионеров, которые сыграли каждый с каждым. Какое наименьшее число пенсионеров может быть в этом дворе?

С.Волчёнков

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны острые углы A и A_1 , равны высоты, проведенные из вершин B и B_1 , и равны медианы, проведенные из вершин C и C_1 . Известно, что треугольники не равны. Может ли хотя бы один из них быть остроугольным?

А.Блинков



Зачем плющить зерна, или О плотности потоков

А. СТАСЕНКО

«Геркулес монастырский»... в результате плющения зерна овса становятся мягче, а каша из них получается более плотной и сытной.

Надпись на коробке

А ЗАЧЕМ ИХ ПЛЮЩИТЬ? – ПОДУМАЛ Способный Ученик и тут же вспомнил о потоках массы, концентрации вещества, энергии, импульса... Раз уж речь идет о потоке *чего-либо*, то этот поток должен измеряться в единицах *этого самого* на единицу времени, и если это плотность потока, то он должен протекать через единицу площади. Значит, плотности потоков должны иметь такие размерности, например:

$$[q_{\text{кв}}] = \frac{1}{\text{с} \cdot \text{м}^2}, \quad [q_s] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2},$$

$$[q_n] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{с} \cdot \text{м}^2}.$$

Заметим, что концентрация частиц вещества – безразмерная величина, она стоит в выражении для $q_{\text{кв}}$ в числителе в виде единицы.

Пусть первоначально зерно было шариком радиусом R и объемом $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; при плющении его превратили в диск (сохраняя объем) радиусом b и толщиной $h = \frac{V}{\pi b^2}$; а кто-то ухитрился раскатать его в цилиндр (макаронину) длиной l и радиусом $r = \sqrt{\frac{V}{\pi l}}$ (рис.1).

Но что же приводит к возникновению упомянутых потоков? Конечно, пространственная неоднородность так называемых

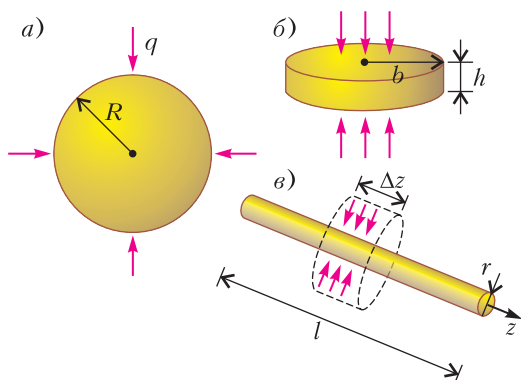


Рис. 1. Модели формы зерна: а) сферического; б) расплющенного в диск; в) раскатанного в цилиндр (макаронину). Цветные стрелки – это векторы плотности потоков любой физической природы: концентрации вещества, теплоты, количества электрического тока (в случае отрицательно заряженных тел)...

потенциалов. Например, хорошо известно, что тепло течет из области повышенной температуры в область пониженной. Причем очевидно, что тут должна играть роль не просто разность температур ΔT , но и пространственная крутизна, т.е. отношение этой разности к расстоянию, на котором она реализуется: $\frac{\Delta T}{\Delta r}$. Это отношение называют градиентом температуры. Здесь r измеряется вдоль вектора потока. Точно так же плотность потока массы вызывается градиентом концентрации вещества, плотность потока импульса – поперечным градиентом скорости потока жидкости или газа вдоль твердой поверхности. А также есть (тут Способному Ученику пришла в голову еще одна мысль) плотность потока электрического тока – градиент электрического потенциала. Так что можно написать, например,

$$q_T \sim \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

и аналогичные выражения плотностей потока для других физических величин. А коэффициенты, при помощи которых это отношение пропорциональности заменяется равенством, называются коэффициентами диффузии, теплопроводности, вязкости, электропроводности... Их общее название – коэффициенты переноса, и можно надеяться, вы понимаете, почему.

Но тогда уж и величины, градиенты которых вызывают соответствующие потоки, можно назвать потенциалами – и концентрацию диффундирующего вещества, и температуру, и продольную (вдоль обтекаемого тела) скорость течения газа или жидкости, и, конечно, электрический потенциал, и... А значит, теплопроводность можно назвать диффузией тепла; трение в пограничном слое у тела, обтекаемого жидкостью или газом, – поперечной диффузией продольного импульса; электропроводность – диффузией электрического заряда ...

И тут внутренний голос подсказал нашему герою, что метр метру рознь. Особенно в случае потока импульса $q_{\parallel}$, когда тормозящая сила трения, действующая на газ или жидкость, направлена вдоль обтекаемой стенки, а продольная скорость $v(y)$ изменяется в поперечном направлении (рис.2). Тут мож-

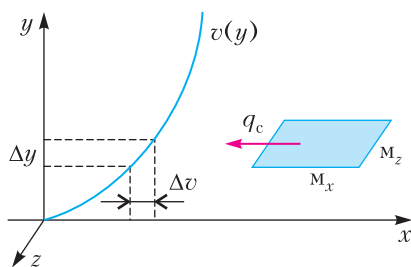


Рис. 2. Схема пограничного слоя газа или жидкости у плоской стенки. Показано формирование поперечного градиента продольной скорости $\Delta v/\Delta y$; q_c — плотность потока тормозящей силы, действующей на площадку, стороны которой измеряются в «разных метрах»

но заметить, что напряжение трения (сила, приходящаяся на единицу площади) имеет размерность $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}_x}{\text{с}^2 \cdot \text{м}_x \cdot \text{м}_z}$.

После этих размышлений уже можно получить размерности соответствующих коэффициентов переноса, разделив плотность потока некоей физической величины на градиент соответствующего потенциала, поддерживающий этот поток. В результате получим

$$[\lambda_T] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}_\perp^2 \cdot \text{с}} \cdot \frac{1}{\text{К}/\text{м}_\parallel} \quad ([\lambda_T] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}})$$

– для коэффициента теплопроводности;

$$[D] = \frac{1}{\text{с} \cdot \text{м}_\perp^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\text{м}_\perp^2 \cdot \text{м}_\parallel} \cdot \frac{1}{\text{м}_\parallel}} \quad ([D] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}})$$

– для коэффициента диффузии или «мас-сопроводности»;

$$[\mu] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}_x}{\text{с} \cdot \text{м}_x \cdot \text{м}_z} \quad ([\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}})$$

– для коэффициента вязкости или «импульс-сопроводности»;

$$[\lambda_\circ] = \frac{\text{Кл}}{\text{с} \cdot \text{м}_\perp^2 \cdot (\text{В}/\text{м}_\parallel)} \quad ([\lambda_\circ] = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}})$$

– для коэффициента электропроводности.

Здесь в каждой строке в скобках выписаны также и обычно приводимые размерности, но мы-то с вами теперь уже знаем, что метр метру рознь. В частности, в выражении для D учтено, что концентрация вещества имеет размерность «единица на кубический метр».

Уже из рисунка 1 видно, что теплу или диффундирующему веществу тем легче добраться до середины расплющенного зерна, чем меньше расстояние от поверхности диска или цилиндра-макаронины. На основании сказанного выше можно даже предложить оценку характерных масштабов процесса. Видно, например, что размерность коэффициента диффузии D самая простая – она содержит только размерности площади и времени. Значит, разделив на этот коэффициент площадь поверхности тела, пропорциональную квадрату характерного размера a ($a = R, h$ или r), получим характерное время, за которое произойдет существенное изменение концентрации диффундирующего вещества:

$$\tau_D \sim \frac{a^2}{D}.$$

Аналогичные выражения можно получить и для других физических величин. Так, в случае теплопроводности

$$\tau_T \sim \frac{a^2}{\lambda_T}.$$

Из этого соотношения понятно, почему малых детей кутают в теплые одежды: если их характерный размер, например, вдвое меньше, чем у взрослого, их характерное время остывания будет меньше в 9 раз. И понятно, наконец, зачем деформировать зерна: толщину диска h и радиус макароны r можно сделать гораздо меньше R (см. рис.1,б,в).

Конечно, здесь не рассмотрены так называемые конвективные потоки – например, перенос тепла вместе с массой. Значит, речь идет о варке каши на спутнике или в падающем лифте, что, правда, не очень удобно.

Итак, в течение характерного времени τ и цельные зерна, и расплюснутые или раскатынные в цилиндр прогреются до температуры кипения воды. Но что же происходит дальше? Ведь кипение продолжается, следовательно, что-то продолжает течь внутрь зерна. А там происходят сложные физико-химические процессы. Прежде всего, увлажнение, т.е. диффузия молекул воды, разрушение прежней бимолекулярной структуры, нежелательной для потребителя. Но раз что-то разрушается, значит, с точки зрения исходного зерна, растет «мера беспорядка» – так называемая энтропия. Физик при этом скажет, что имеет место поток энтропии. Тут вспоминается, что в научно-фантастических

романах энтропия часто называется «черной», чтобы подчеркнуть ее разрушительный нрав. А в одной из пародий на такие романы при описании ситуации в космическом корабле сказано нечто такое:

Напряженно гудели слухофоны и смотроскопы. Сквозь заклепки сочились кванты. Черная энтропия росла. «Ба, – вдруг воскликнул штурман, – да ведь мы на краю обыкновенной гиперплоскости!»

Но вернемся к нашей каше. В кипящей воде в зерне подготавливаются новые вещества; можно сказать, что в результате перестройки они забрасываются на новый (более высокий) потенциальный уровень, «падая» с которого, выделяют в нужное время необходимую организму энергию.

Итак, всюду потоки массы, энергии, импульса, энтропии. А плющенное зерно продолжает вариться...

Приятного аппетита!

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Что такое фазовый портрет

В.СОЛОВЬЕВ, С.ДВОРЯНИНОВ

Бросаем мяч вверх

Рассмотрим простой эксперимент, который каждый из нас проводил в детстве много раз. Пусть тело, например мяч, масса которого равна m , брошено с поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Пусть высота h , на которой находится тело в каждый момент времени t , определяется функцией $h = h(t)$. Тогда первая производная этой функции $h'(t) = v(t)$ – это скорость, вторая производная $h''(t) = v'(t) = a(t)$ – это ускорение. Согласно второму

закону Ньютона,

$$a(t) = \frac{F}{m},$$

где F – действующая на тело сила. Если высота подъема невелика и можно пренебречь сопротивлением воздуха, то единственная сила, действующая на тело, это сила тяжести, равная mg . Тогда уравнение движения тела принимает вид

$$h''(t) = -g.$$

Знак «минус» в правой части уравнения отражает тот факт, что сила направлена в сторону уменьшения величины h . Интегрируя это уравнение, получаем общий закон движения тела:

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0.$$

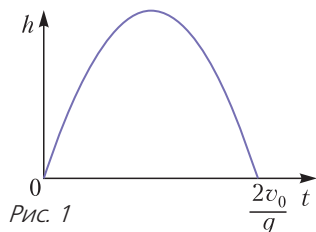
(Результат интегрирования легко проверить дифференцированием: $h''(t) = \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0\right)'' = (-gt + v_0)' = -g$.)

В нашем уравнении v_0 – начальная скорость тела, т.е. скорость при $t = 0$; h_0 –

начальная высота, у нас $h_0 = 0$. Следовательно, получаем

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t.$$

Ясно, что область определения квадратичной функции $h(t)$ – отрезок $0 \leq t \leq \frac{2v_0}{g}$, на котором эта функция неотрицательна. Гра-



фик этой функции на плоскости с координатами $(t; h)$ показан на рисунке 1.

Наблюдаем за энергией

Будем теперь следить не только за высотой h , но и за скоростью движения нашего тела, т.е. за величиной $h'(t) = v(t) = -gt + v_0$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} h = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t, \\ v = -gt + v_0. \end{cases}$$

При каждом допустимом значении величины t , которую теперь можно считать параметром, мы имеем точку на плоскости с координатами $(h; v)$. Можно сказать, что эта система параметрическим образом задает кривую линию. Легко получить и явное задание этой кривой. Из второго уравнения системы находим $t = \frac{v_0 - v}{g}$ и подставляем в первое уравнение. В итоге получаем

$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}.$$

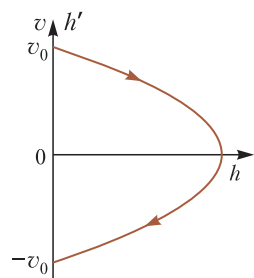


Рис. 2

Это уравнение на отрезке $-v_0 \leq v \leq v_0$ задает дугу параболы (рис.2). Стрелка на параболе указывает направление возрастания параметра t , т.е. ход времени.

После умножения обеих частей нашего уравнения на mg за-

пишем его в виде

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Полученное равенство выражает закон сохранения энергии: первое слагаемое в левой части – это потенциальная энергия, второе – кинетическая энергия брошенного вверх тела. Их сумма – полная энергия – неизменна, в каждый момент времени она равна начальной кинетической энергии тела.

При движении нашего тела вверх действующая на него сила тяжести постоянна. Работа этой силы «съедает» любую начальную энергию тела, и поэтому при любой начальной скорости тело в определенный момент времени остановится и затем начнет падать обратно на землю.

Рисуем фазовый портрет

Ясно, что при разных значениях начальной скорости будут получаться дуги разных парабол (рис.3). Каждая дуга называется

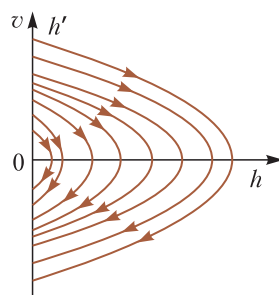


Рис. 3

фазовой траекторией рассматриваемой нами механической системы (т.е. брошенного вверх тела). Совокупность всех фазовых траекторий называется *фазовым портретом* динамической системы на фазовой плоскости. Заметим, что точка $(0;0)$ также является фазовой траекторией, она описывает состояние неподвижно находящегося на поверхности земли тела.

В верхней полуплоскости скорость положительна, фазовая точка движется вдоль фазовой траектории вправо, в сторону увеличения координаты h . В нижней полуплоскости – наоборот, фазовая точка движется влево, в сторону уменьшения фазовой координаты h . (Это хорошо согласуется с известным признаком монотонности функции: если производная положительна, то функция возрастает.)

Итак, первый урок по технике рисования фазовых портретов динамических систем состоялся. Поздравляем наших читателей, которые могут испытывать чувство гордости от знакомства с важным научным понятием, ибо о фазовых портретах и фазовых траекториях студенты университета узнают обычно только на втором курсе.

**Учитываем гравитационное
взаимодействие с Землей
и летим в космос**

Вспомним теперь, что в действительности на тело массой m , находящееся на расстоянии R от центра Земли, масса которой M , со стороны Земли действует сила притяжения, равная $G \frac{mM}{R^2}$. Тогда ускорение этого тела равно

$$a = -G \frac{M}{R^2}.$$

Знак «минус» опять говорит о том, что сила направлена в сторону уменьшения R . Пусть по-прежнему тело с некоторой начальной скоростью брошено с поверхности Земли вверх вдоль ее радиуса, т.е. в начальный момент времени при $t = 0$ расстояние R равно радиусу Земли: $R(0) = R_3$.

А каким может быть движение этого тела? Обязательно ли оно вернется на Землю? Если нет, то как будет меняться его скорость с течением времени?

Ответы на эти вопросы мы дадим чуть позже. А пока обратим внимание на то, что по мере удаления от Земли сила притяжения убывает, ее работа теперь не пропорциональна длине пути и поэтому, возможно, эта сила не сможет «забрать» всю энергию брошенного вверх тела.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее изменение величины $R = R(t)$ в зависимости от времени:

$$R'' = -G \frac{M}{R^2}.$$

Это равенство выражает второй закон Ньютона. Мы помним, что для построения фазового портрета важна зависимость между координатой и скоростью, в данном случае – зависимость между величинами $R(t)$ и $R'(t)$. Эта зависимость такова:

$$\frac{R'^2}{2} = G \frac{M}{R} + c,$$

где c – произвольная постоянная. (Это соотношение получается интегрированием предыдущего равенства.) Положим $t = 0$ и получим

$$\frac{v_0^2}{2} = G \frac{M}{R_3} + c, \text{ откуда } c = \frac{v_0^2}{2} - G \frac{M}{R_3}.$$

Теперь закон движения тела можно записать в виде

$$\frac{(R'(t))^2}{2} - G \frac{M}{R(t)} = \frac{v_0^2}{2} - G \frac{M}{R_3}.$$

Для понимания физического смысла последнего равенства обе его части умножим на m – массу брошенного тела, на которое действует сила тяготения:

$$\frac{m(R'(t))^2}{2} - G \frac{mM}{R(t)} = \frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM}{R_3}.$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии. Первое слагаемое в левой части – это переменная кинетическая энергия, она связана со скоростью, второе слагаемое – переменная потенциальная энергия, правая часть – это полная энергия тела при $t = 0$.

Поясним, почему потенциальная энергия оказывается отрицательной. Потенциальная энергия считается всегда относительно какого-либо уровня. Так, кирпич, лежащий на балконе второго этажа, относительно этого балкона обладает нулевой потенциальной энергией, а относительно уровня тротуара – ненулевой. Мы вольны в выборе уровня отсчета. В нашем случае выбор таков, что при бесконечном удалении тела от Земли (т.е. при неограниченном увеличении R) его потенциальная энергия становится равной нулю. При произвольном значении $R = R^*$ потенциальная энергия отрицательна и равна $-G \frac{mM}{R^*}$. При перемещении тела из этой точки в бесконечность его потенциальная энергия, очевидно, увеличивается.

Рисуем фазовые траектории

Допустим, что $c = 0$, т.е. $v_0 = \sqrt{2G \frac{M}{R_3}} = v_2$.

Эта скорость называется второй космической скоростью. Соответствующая фазовая траектория показана на рисунке 4 красным цветом. Начав движение со скоростью v_2 , тело бесконечно долго удаляется от Земли.

(Продолжение на с. 34)

...как раз при устройстве автоматов для различных их деталей приходится применять все отделы механики.

Герон Александрийский

...не щадя ни труда, ни издержек, я дошел до того, что построил себе прибор, до такой степени превосходный, что с его помощью предметы казались почти в тысячу раз больше и более чем в тридцать раз ближе, чем при наблюдении простым глазом.

Галилео Галилей

...ход часов стал чрезвычайно правильным и надежным, как показали испытания на суше и на море. Великая польза этих часов для астрономии и мореплавания может считаться установленной.

Христиан Гюйгенс

Что бы ни попадало в мои руки — машинка для взбалтывания яиц или электромотор, я прежде всего думаю о том, как это усовершенствовать.

Томас Эдисон

...могу выразить надежду, что мой прибор... может быть применен к передаче сигналов на расстояния при помощи быстрых электрических колебаний...

Александр Попов

...миллиарды долларов уходят на строительство гигантских умных машин. Они ускоряют частицы до таких высоких энергий, что мы бессильны предположить, что может случиться при их столкновении.

Стивен Хокинг

А так ли хорошо знакомы вам физика+техника?

Какие только ПРИБОРЫ нас ни окружают! Они измеряют, сигнализируют, информируют, а самое главное — практически мгновенно связывают нас друг с другом. Мир стал немислим без этих порой незаметных помощников, но стоит им выйти из строя, как мы сразу ощущаем непривычный дискомфорт.

Отдадим должное поколениям изобретателей и инженеров, ученых и техников, кропотливый труд которых привел цивилизацию к нынешнему уровню. Судя по всему, темп инновационного марафона снижаться не собирается, а вам предстоит стать его неперемными участниками.

Что нужно, чтобы не отстать в этом забеге? Ответ так же прост, как нелегко в исполнении, — учиться! Надеемся, наша физико-техническая серия, пусть немного, но помогла вам в этом трудном деле. А сегодня, как и раньше, навигатором в «океане» приборов нам послужит курс физики и старые знакомые из домашнего обихода и школьной лаборатории.

Вопросы и задачи

1. Как определить массу груза на неравноплечих весах?
2. Вес тела на Марсе примерно в 2,6 раза

меньше, чем на Земле. Какими весами будущий космонавт сможет обнаружить это уменьшение веса?

3. У вас имеется фиксированная горизонтальная ось и однородный стержень с отверстием в середине. Что необходимо сделать, чтобы устроить из этого рычажные весы?

4. Как изменится период колебаний часов с железным шариком на конце маятника, если под ним поместить электромагнит?

5. Античные источники описывают маятниковые часы, сделанные в виде тонкой трубки, заканчивающейся резервуаром со ртутью. В чем смысл такого устройства?

6. Теплопроводность металла значительно больше теплопроводности стекла. Отчего же тогда калориметры делают из металла, а не из стекла?

7. Почему в медицинских термометрах используют ртуть, а не спирт или эфир?

8. Температура кипения ртути 357°C . Как же объяснить применение ртутных термометров для измерения температур до 600°C ?

9. Трубку ртутного барометра подвесили к динамометру. Как будут изменяться уровень ртути в трубке и показания динамометра при изменении атмосферного давления?



10. Почему плавкий предохранитель выходит из строя раньше, чем какой-либо другой участок электрической цепи?

11. Какое минимальное число резисторов сопротивлением по 20 Ом каждый следует взять и как их соединить, чтобы получить сопротивление цепи 12 Ом?

12. Как составить схему из трех одинаковых ламп и двух выключателей, чтобы включались и горели полным накалом одна (при замыкании одного выключателя), две (при замыкании второго) или все три лампы (при замыкании обоих выключателей)?

13. Как построить сильный электромагнит, если конструктору поставлено условие, чтобы ток в нем был сравнительно малым?

14. Можно ли микроскоп использовать вместо телескопа?

15. Почему в оптических приборах, предназначенных для работы в широком диапазоне длин волн, стараются использовать отражающие поверхности, а не преломляющие?

Микроопыт

Сможете ли вы измерить объем ванны, пользуясь часами? Не понадобятся ли вам еще какие-то приборы?

Любопытно, что...

...история применения свойства ориентации магнитной иглы уходит в глубь веков, находя свидетельства в китайских и арабских источниках. Первое же упоминание о ее использовании в качестве морского компаса датируется 1180-м годом.

...секстант – прибор для измерения широты точки наблюдения в открытом море даже при сильном волнении – основан на законе отражения в двух зеркалах. Идею его устройства высказал еще Ньютон, а первые приборы были сконструированы в 30-х годах XVIII века.

...развитие мореплавания действительно требовало для нахождения долгот определения точного времени. 16 июня 1657 года Генеральные штаты Нидерландов (высший законодательный орган Нидерландов) закрепляют за Христианом Гюйгенсом приоритет изобретения часов, в которых для равномерности хода ученый использовал маятник.

...во второй половине XIX века архитектура потребовала много большого по размерам

и дешевого оконного стекла. Фирмы по его производству спонсировали создание необходимых для этого приборов по измерению высоких температур, работающих дистанционно. С их помощью оказались открыты новые физические законы, позже приведшие к развитию квантовых представлений.

...многие новации, предназначавшиеся сначала для военных нужд, «переселились» в гражданские отрасли – как электронно-вычислительная техника, именуемая ныне компьютерами, или система глобального позиционирования. А вот такие бытовые новинки, как, например, антипригарный тефлон, начинали «работать» в Манхэттенском атомном проекте.

...GPS-навигация, спутниковые телевидение и связь вобрала в себя современнейшие физические идеи и технологии. Так, на них используются атомные часы и резервуары с жидким гелием, а поправки на замедление времени производятся в согласии с предсказаниями теории относительности.

...зеркало строящегося Гигантского Магелланова телескопа, вращающаяся часть которого весит больше 1500 тонн, образует отражающую поверхность площадью 368 м², что позволит ему вести наблюдения неба с чувствительностью, на порядок превосходящую возможности космического телескопа «Хаббл».

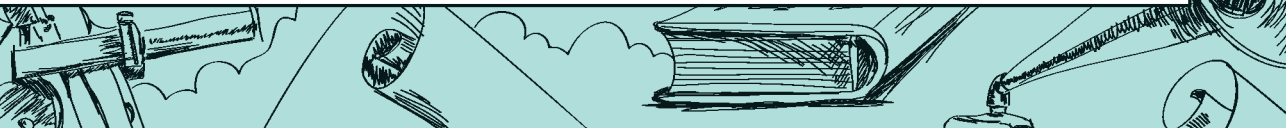
...сфера применения роботов давно вышла за пределы производства и обслуживания – ныне они еще и развлекают нас и участвуют в спортивных соревнованиях. Например, на ринг «Лиги боевых роботов» выходит 340-килограммовый Scorpio, вооруженный острыми лезвиями и защищенный легкой углепластиковой броней.

Что читать в «Кванте» о приборах

(публикации последних лет)

1. «Простой мини-робот» – 2013, №1, с.37;
2. «Электрические цепи с измерительными приборами» – 2014, №4, с.39;
3. «Про волчок и гироскоп» – 2015, №1, с.28;
4. «Чудо стеклянной линзы» – 2017, №6, с.25;
5. «Астрономия вернулась в школу» – 2017, №12, с.2;
6. «ИТЭР» – земная звезда – 2018, №8, с.2; №10, с.2.
7. «Лазерная локация» – 2018, №9, с.34.

Материал подготовил А.Леонovich



(Начало на с. 29)

При этом его скорость убывает, стремясь к нулю. Допуская вольность речи, говорят, что тело остановится в бесконечности. Вто-

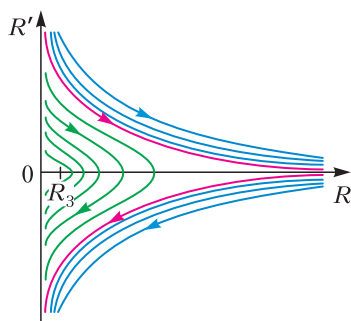


Рис. 4

рая космическая скорость – это минимальная скорость, позволяющая телу преодолеть влияние гравитационного поля Земли.

Ясно, что эта скорость своя для каждой планеты, ибо зависит от ее массы и радиуса.

Пусть теперь $c > 0$, т.е. начальная скорость больше второй космической. Тогда для любого положительного значения R существуют два значения скорости R' . Соответствующие точки $(R; R')$ лежат на двух ветвях фазовой траектории, которые на рисунке 4 показаны синим цветом – цветом бездонного неба. Нижняя ветвь описывает падение тела из бесконечности. Каждая ветвь имеет свою горизонтальную асимптоту. Опять говоря образно, скажем, что всякое тело, стартовавшее со скоростью $v_0 > v_2$, уйдет в бесконечность и будет там двигаться с некоторой скоростью.

Если же $c < 0$ (и $v_0 < v_2$), то значения R находятся в некотором конечном промежутке. Это означает, что запущенное с Земли тело сможет удалиться от нее лишь на конечное расстояние, на мгновение остановится и затем вернется на Землю. Вырваться из гравитационного поля Земли со столь малой скоростью невозможно. Соответствующие фазовые траектории показаны на рисунке 4 зеленым цветом – цветом зеленой травы. Траектории следует рассматривать в полуплоскости $R \geq R_3$.

Все траектории трех цветов и составляют фазовый портрет. Название красной траектории – сепаратриса. Она отделяет траектории одного типа от траекторий другого типа.

Взяв любую точку $(R; R')$ в правой полуплоскости и рассмотрев проходящую через нее траекторию, можно легко увидеть эволюцию нашей динамической системы.

Заметим, что каждую траекторию легко построить элементарными методами, считая, что уравнение движения задает при каждом значении параметра c функцию R , зависящую от аргумента R' . Дело сводится к «делению единицы на квадратичную функцию».

О фазовой скорости и фазовом портрете можно прочесть в «Кванте» в статьях В. Арнольда «Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения» («Квант», 1986, №2) и А. Веселова «О математике гармонических колебаний» («Квант», 1986, №5).

В заключение – фазовый портрет математического маятника

Рассмотрим жесткий невесомый стержень, на конце которого укреплен точечная масса m . Пусть такой маятник совершает колебания в вертикальной плоскости, $x(t)$ – угол отклонения стержня от вертикали, $x'(t)$ – скорость точки. Фазовый портрет такого маятника представлен на рисунке 5. На

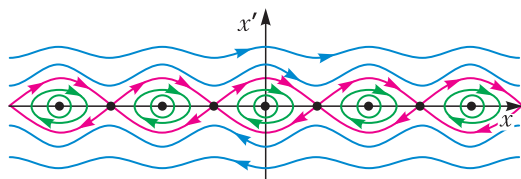


Рис. 5

фазовой плоскости $(x; x')$ точку $(0; 0)$ окружают замкнутые траектории, они соответствуют малым колебаниям маятника. Через точки $(0; x'_0)$ для больших значений начальной скорости проходят траектории, соответствующие вращательному движению маятника, при этом маятник совершает круговые колебания против или по часовой стрелке. Каждая точка $(\pi k; 0)$ также является фазовой траекторией, соответствующей положению равновесия маятника. Нижнее положение устойчиво, верхнее – неустойчиво. Траектории красного цвета – это сепаратрисы, они отделяют вращательные траектории от колебательных. Отметим, что движение по сепаратрисе (которая имеет конечную длину!) длится бесконечно долго...

(Продолжение следует)

Что не так с угадыванием шляп?

К. КОХАСЬ

— ПРИВЕТ, ДРУЗЬЯ, Я РАД ЧТО ВЫ СНОВА у экранов телевизоров! Впрочем, отсюда мне вас совершенно не видно. С вами Горгулий, научный обозреватель «Самого первого канала». Очередная программа «Что не так?», посвященная ломке стереотипов и ниспровержению стандартов научного мировоззрения, готова порадовать зрителей незабываемым феерическим выпуском.

По традиции мы выбираем тему программы среди вопросов, присланных телезрителями. «Что не так с угадыванием шляп?» — спрашивает нас телезритель Пинок Тухх. Отвечает на вопрос наш замечательный эксперт по вопросам адекватности — дятел Спятел! Прошу вас, маэстро.

— Добрый вечер, уважаемые телезрители. Прежде всего, для правильной расстановки акцентов, мне хотелось бы уточнить, что я являюсь экспертом по вопросам *адекватности*. Если наш ведущий будет продолжать путаницу, то в следующем выпуске нам придется обсудить вопрос «Что не так с нашим ведущим?» Ясно?

— Извините, извините, дорогой маэстро. Я надеюсь загладить свою вину, смотрите: в этой коробке лежат несколько черных и белых шляп, они могут существенно повысить адекватность нашего разбирательства.

— Тогда приступим к конкурсу «Угадывание». Я попрошу оператора показать крупным планом насекомое *Musca domestica*.

— Это же обычная домашняя муха!

— Совершенно верно. Итак, уважаемые телезрители, пока вы любовались мухой, ассистенты надели на меня и на Горгулия по шляпе. Вам прекрасно видны цвета обеих шляп, а вот я хорошо вижу шляпу Горгулия,

но, увы, не могу понять, какого цвета шляпа на мне.

— Я тоже не знаю цвета своей шляпы, — подхватил Горгулий, — но при этом прекрасно вижу шляпу дятла Спятла. И что же мы будем угадывать?

— По правилам конкурса мы должны, не разговаривая и не подавая друг другу никаких сигналов, попытаться угадать цвет своей шляпы. У каждого из нас есть пульт с кнопками «черная» и «белая», мы должны незаметно нажать на одну из кнопок!

— Но маэстро, вряд ли нам обоим удастся угадать цвет своей шляпы. Ведь о цвете своей шляпы у нас нет никакой информации!

— Правильно. Но если хоть один из нас угадает, это будет считаться нашей победой в конкурсе!

— Что-то тут не так. Каждый из нас вообще ничего не знает о цвете своей шляпы. Как же мы сможем хоть что-нибудь угадать?

— Вы забываете, что один из нас является выдающимся экспертом по вопросам адекватности! Конечно, мы сможем преодолеть этот конкурс! И дело тут вовсе не в том большом зеркале, которое не видно телезрителям, но прекрасно видно нам. Мы сможем выиграть этот конкурс... с помощью интеллекта!

В самом деле, дорогие телезрители, согласитесь, что имеется всего лишь две возможности — либо наши шляпы одинакового цвета, либо разного. Сейчас мы будем нажимать на кнопки, причем я буду нажимать на кнопку, исходя из предположения, что наши шляпы одинакового цвета, а мой коллега будет исходить из того, что цвета разные! Мы не знаем, какая из этих гипотез осуществилась на самом деле, но одна из гипотез точно осуществилась, и тот, кто придерживался этой гипотезы, угадает цвет!

— Маэстро, это потрясающе. Но что мы будем делать, если наш телезритель Пинок Тухх попросит провести конкурс, в котором шляпы будут не двух, а, скажем, восьми цветов?

— Мы позовем еще 6 друзей и проведем аналогичный конкурс! На каждого из восьми участников помощники наденут шляпу одного из 8 цветов, каждый будет видеть шляпы у остальных, но не свою собственную. И точно так же нужно, чтобы хотя бы один участник угадал цвет своей шляпы!

– Пультики приготовить с восемью кнопками?

– Да. А чтобы не путаться с цветами, лучше просто поместить на каждой шляпе число от 0 до 7 и говорить не об угадывании цвета, а об угадывании числа на шляпе.

– Неужели мы справимся?

– Элементарно. Мы разобьем все возможные расклады шляп на 8 взаимоисключающих случаев: сумма чисел на всех шляпах либо делится на 8, либо дает остаток 1, либо остаток 2 и так далее. Последняя, восьмая, возможность – сумма дает остаток 7. Каждый из нас выберет по одной гипотезе и будет ее придерживаться. Например, если мне досталась гипотеза «сумма дает остаток 2», то я складываю все числа, которые вижу у остальных, и называю число, которое нужно добавить к этой сумме, чтобы получился остаток 2.

– Кажется, мы действительно выиграем этот конкурс. Если я правильно догадался, по вашему алгоритму всегда угадывает ровно один участник. Таким образом, каждый участник «берет на себя» $1/8$ от числа всех возможных раскладов шляп и угадывает только на них. А если мы увеличим число цветов шляп, не изменив число участников, например будем давать участникам шляпы девяти цветов, баланс нарушится, они смогут победить лишь в $8/9$ всех случаев. Но все же я думаю, что мы просто обязаны удовлетворить любопытство нашего телезрителя, Пинока нашего Тухха, и объяснить, нельзя ли хоть немного увеличить число шляп, оставив количество участников конкурса прежним?

– Да вы просто маньяк с этим вашим Пиноком Туххом. Можно! Но при условии, что одним участникам вы будете давать шляпы существенно большего количества цветов, а другим – шляпы меньшего числа цветов.

– Отличная сделка! Согласен. Это будет впечатляющее зрелище. Сейчас же закажу для этого подходящий комплект шляп, и мы продемонстрируем это зрителям. Давайте позовем автора нашего вопроса Пинока Тухха в студию и наибольшее число шляп дадим ему! Сколько это будет? Сто? Двести?

– Хе-хе, боюсь, ответ может вам показаться неприемлемым. Во всяком случае, он больше.

– Сколько же? Тысяча? Миллион? Миллиард?

– Видите ли, дорогой Горгулий, ваши приемы работы, несомненно, производят впечатление. Но подозреваю, что Пиноку Тухху ваш энтузиазм... не придется по душе. Все дело в том, что вы наивно полагаете, что сумеете прочесть число, являющееся ответом на ваш вопрос. Но так ли это? Первый участник нашего конкурса будет получать шляпы всего двух цветов. Пожалуй, это буду я. Второму участнику – не возражаю, если это будете вы – будут давать шляпы трех цветов.

– Не нагнетайте, маэстро, я вполне готов нести ответственность за свои слова и займу почетное предпоследнее место.

– Хорошо. Третий участник должен осилить шляпы 7 цветов, четвертый – шляпы 43 цветов...

– Ой.

– Пятый – шляпы 1807 цветов, шестой – шляпы 3 263 443 цветов...

– Ой, ой, ой...

– Седьмому участнику, то есть вам, мой самоуверенный друг, придется иметь дело со шляпами 10 650 056 950 807 цветов...

– Десять триллионов с хвостиком...

– Это сущая мелочь по сравнению с тем, что мы приготовили восьмому участнику – Пиноку вашему, незабвенному Тухху, количество его цветов равно 27-значному числу, вот оно:

113 423 713 055 421 844 361 000 442.

– Мама...

– И обратите внимание, как виртуозно у нас все подобрано: при любом раскладе шляп будет угадывать ровно один участник, при этом первый участник будет угадывать ровно на половине всех раскладов, второй – на одной трети, третий – на одной седьмой и так далее. Стоит ли говорить, что сумма обратных величин указанных чисел в точности равна 1! Есть только один подвох...

– Еще один? Какой же?

– Алгоритм, с помощью которого мы можем выиграть. Он... не совсем очевиден.

– Аааааа! Уважаемые телезрители, мы опять испытываем проблемы с адекватным завершением нашей программы. Безобиднейшая игра с двумя шляпами довела нас до умопомрачительного количества цветов! Мы

не можем ничего сделать с этим числом, мы даже затрудняемся прочесть его вслух. Кажется, вопрос нашего телезрителя опять остается без ответа! Постойте, я сказал «нашего телезрителя»? Маэстро, признавайтесь, это опять ваши происки? Вы опять, скрываясь под псевдонимом, прислали воп-

рос, чтобы нарушить спокойное течение нашей передачи?

– Нет-нет, я не имею никакого отношения к случившемуся сегодня. Хотя, вы знаете... Недавно я рассказал Бусеньке о том, как легко и приятно вводить вас в ступор с помощью безобидного на вид вопроса...

Принесите еще шляп!

К. КОХАСЬ

РАССМОТРИМ СЛЕДУЮЩУЮ ИЗВЕСТНУЮ ЗАДАЧУ О МУДРЕЦАХ.

Происходит следующий конкурс. По кругу стоят n мудрецов. Судья надевает каждому мудрецу шляпу одного из n цветов. Каждый мудрец видит шляпы, надетые на других мудрецов, но не видит своей собственной. По сигналу мудрецы (одновременно) должны высказать гипотезу о цвете своей шляпы. Если хотя бы один мудрец угадал цвет своей шляпы, считается, что мудрецы выиграли конкурс. Перед проведением конкурса мудрецы имели возможность посоветоваться, а во время конкурса никакая передача информации не разрешена. Могли ли они на этом совещании придумать стратегию, позволяющую им выиграть в любом случае?

Под стратегией понимается набор инструкций (свой для каждого мудреца), которыми должны руководствоваться мудрецы при выдвижении своих гипотез. Каждая такая инструкция – это набор правил вида «если вижу на таких-то мудрецах такие-то цвета шляп, то выдвигаю такую-то гипотезу». В частности, стратегия должна быть детерминированной, т. е. не содержать действий, совершаемых с некоторой вероятностью. Это значит, что при повторении конкурса с тем же самым набором шляп мудрецы дадут те же самые ответы.

Решение этой задачи весьма красиво. Мудрецы нумеруют себя числами от 0 до $n - 1$

и обозначают цвета также числами от 0 до $n - 1$. Каждый мудрец видит все шляпы, кроме своей. Значит, он знает сумму всех чисел, кроме одного (своего). Тогда пусть k -й мудрец называет свой цвет, исходя из предположения, что сумма всех чисел дает при делении на n остаток k .

Например, пусть $n = 8$ и третий мудрец увидел, что сумма чисел у остальных мудрецов равна 20. Тогда он должен назвать число 7, потому что только в случае, когда у него шляпа 7-го цвета, сумма всех чисел (она в этом случае равна 27) дает остаток 3 при делении на 8.

Заметим, что описанная стратегия весьма «экономна» в том смысле, что для каждого расклада шляп лишь один мудрец угадывает цвет шляпы. Номер этого мудреца совпадает с остатком суммы всех цветов при делении на n .

Взглянем на эту экономность с другой точки зрения. Пусть судья заранее составит список из всех возможных способов выдать мудрецам шляпы разных цветов. Каждый такой способ будем называть *раскладом шляп*. Работа немаленькая, ведь количество всех раскладов равно n^n (потому что каждому из n мудрецов можно дать шляпу любого из n цветов). После этого пусть судья подслушает, о чем договорились мудрецы на совещании, и возле каждого расклада шляп в своем списке запишет, какие мудрецы угадывают цвет шляпы для этого расклада.

Лемма 1. *Для каждого k пометка «угадывает k -й мудрец» будет стоять в точности возле n^{n-1} раскладов. Иными словами, каждый мудрец выигрывает в точности на $1/n$ от общего числа раскладов.*

Доказательство. Допустим, что судья перебирает все варианты расклада шляп следующим образом: сначала он фиксирует цвета всех шляп, кроме шляпы k -го мудреца, а после этого размышляет, какую из n шляп выдать k -му мудрецу. Так как цвета всех

шляп, которые увидит k -й мудрец, уже заданы, ответ, который даст k -й мудрец в этой ситуации, уже определен. Поэтому k -й мудрец угадает цвет лишь в одном из n вариантов, о которых размышляет судья. Таким образом, каждый мудрец выигрывает в точности на $1/n$ от общего числа раскладов.

Получается, что в нашем конкурсе мудрецы как бы поделили между собой все возможные расклады шляп и каждый мудрец «отвечает» за угадывание на раскладах из «своей доли». Тут, однако, стоит уточнить: в момент угадывания ни один из мудрецов не знает, принадлежит ли текущий расклад шляп его доле или нет.

Зададимся вопросом: нельзя ли увеличить количество шляп в таком конкурсе? Кто выиграет, если, скажем, одному из n мудрецов – Косте – надевают шляпу одного из $n + 1$ цветов, а остальным мудрецам – шляпы n цветов? Напомним, что слова «мудрецы выигрывают» означает «выигрывают на всех возможных раскладах шляп». Если же судья может подобрать расклад шляп, для которого ни один из мудрецов не угадает цвет, мудрецы проигрывают.

Нетрудно сообразить, что при таком «бесхитростном» увеличении числа цветов мудрецы не смогут выиграть конкурс. Действительно, рассуждая, как в лемме 1, мы установим, что Костя угадывает лишь на $\frac{1}{n+1}$ -й доле всех раскладов, а остальные мудрецы угадывают не больше чем для $\frac{n-1}{n}$ от числа всех раскладов. Тем самым, суммарное количество раскладов, для которых мудрецы выигрывают, строго меньше числа всех раскладов. Хорошо. Тогда изменим вопрос.

Существует ли конкурс, где участвуют n мудрецов, которым выдают шляпы разного количества цветов – кому-то больше n , кому-то меньше, причем мудрецы в этом конкурсе всегда выигрывают?

Сразу отметим, что есть совершенно очевидный способ произвольно увеличивать число шляп. Например, в конкурсе с тремя мудрецами дадим двум из них шляпы двух цветов¹, а третьему – шляпы 100 500 цветов.

Мудрецы выиграют! В этом нет ничего удивительного: на самом деле, угадывать цвет будут лишь первые два мудреца, причем они будут это делать, не глядя на третьего. Они просто будут поступать так, словно участвуют в конкурсе для двух мудрецов с шляпами двух цветов! Поэтому внесем в наш вопрос дополнительное требование «отсутствия лентяев», запрещающее этот случай: потребуем, чтобы *при удалении из компании любого мудреца оставшиеся мудрецы не могли бы выиграть*.

Даже с этим ограничением ответ на вопрос утвердительный.

Лемма 2. *В конкурсе для трех мудрецов, которым дают шляпы 2, 4 и 4 цветов, мудрецы выигрывают.*

Доказательство. Введем обозначения для мудрецов и цветов шляп: пусть мудрец A получает шляпы цвета 0 или 1, а мудрецы B и C получают шляпы цветов 00, 01, 10 или 11 (можно думать, что это просто обозначения цветов, а желающие могут считать, что это номера цветов, записанные в двоичной системе счисления). Цифры в обозначениях цветов у мудрецов B и C будем называть *битами*. Пусть мудрецы пользуются следующей стратегией. Мудрец A говорит «0», если младшие биты (т.е. биты в правом разряде) цветов B и C одинаковы, а в противном случае он говорит «1». Стратегия двух других мудрецов такая: они смотрят, какая шляпа надета на A , сразу понижают, при каком соотношении их младших битов («равны» или «не равны») мудрец A угадает свой цвет, и начинают поддерживать противоположной гипотезы. Далее мудрец B смотрит на старший бит мудреца C и говорит свой ответ, исходя из гипотезы, что у него такой же старший бит. А мудрец C смотрит на старший бит мудреца B и говорит ответ, исходя из гипотезы, что у него противоположный старший бит. Лемма доказана.

Например, пусть мудрецы получают шляпы A : 0, B : 01, C : 10. Мудрец A смотрит на младшие биты – у мудреца B это 1, у мудреца C – 0. Так как биты не совпадают, мудрец A говорит «1». Мудрецы B и C видят у A цвет 0 и принимают предположение, что их младшие биты различны. Далее, мудрец B видит, что у мудреца C старший бит равен 1, и предполагает, что у него старший бит тоже

¹ Совершенно вырожденный случай – дать кому-то из мудрецов *одну* шляпу – мы даже не упоминаем.

равен 1 (а младший бит не такой, как у C). В результате B говорит «11». Мудрец C видит, что у мудреца B старший бит равен 0, и предполагает, что у него старший бит другой, т.е. 1 (а младший бит не такой, как у B). В результате C говорит «10».

Из рассуждений леммы 2 видно, что каждый раз угадывает ровно один мудрец. Это подтверждается соотношением

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Задача. Обобщите лемму 2 на случай $n = 8$, когда мудрецы получают шляпы 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 цветов.

Итак, по сравнению с исходным конкурсом количество шляп может быть сильно увеличено. Для доказательного разговора о возможном числе шляп нам потребуется **теорема Холла** о паросочетаниях (лемма о свадьбах)². Напомним ее формулировку:

Пусть имеется n юношей и несколько девушек, некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Известно, что для любого $t \leq n$ любая группа из t юношей знакома в сумме не менее чем с t девушками. Тогда можно каждому юноше поставить в пару одну знакомую девушку (разным юношам будут сопоставлены разные девушки).

Вернемся к мудрецам. Следующая теорема³ полностью решает вопрос о том, сколько шляп можно дать мудрецам, чтобы они смогли выиграть.

Теорема. Пусть n мудрецов получают шляпы $a_1, a_2, \dots, a_n$ цветов. Тогда мудрецы выигрывают в том и только том случае, если

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1. \quad (*)$$

Доказательство. Как и в лемме 1, k -й мудрец угадывает на $\frac{1}{a_k}$ -й доле всех раскладов шляп. Поэтому если сумма меньше 1, то найдется расклад, на котором никто не угадает.

² См. например, статью А.Эвнина «Задачи о фокусниках и теоремы Холла и Шпернера» («Квант» №2 за 2019 г.).

³ К.П.Кохась, А.С.Латышев. Игра Hats с произвольным распределением цветов. – Записки научных семинаров ПОМИ, 2019. (Статья находится в печати.)

Докажем теперь, что если выполнено неравенство (*), то мудрецы выигрывают. Зафиксируем k и разобьем множество всех раскладов шляп на подмножества по a_k элементов аналогично тому, как это происходило в лемме 1. В одно множество раскладов поместим расклады, отличающиеся только шляпой, выдаваемой k -му мудрецу. Более формально: пусть $c = (c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_n)$ – это способ выдать шляпы всем мудрецам, кроме k -го (здесь c_i – это цвет шляпы, которую дадут i -му мудрецу). Этому способу c поставим в соответствие множество

$$A_c^k = \{(c_1, \dots, c_{k-1}, x, c_{k+1}, \dots, c_n) : 0 \leq x \leq a_k - 1\},$$

которое состоит из a_k раскладов шляп.

Имея в виду применение теоремы Холла о паросочетаниях, назовем множества A_c^k «девушками», а сами расклады шляп – «юношами». Будем говорить, что юноша и девушка знакомы, если расклад шляп является элементом множества A_c^k . При этом для каждого k каждый юноша $(c_1, \dots, c_{k-1}, c_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ знаком ровно с одной девушкой A_c^k . Каждая девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами.

Докажем, что существует паросочетание, сопоставляющее каждому юноше девушку. Для этого достаточно проверить условие теоремы Холла. Рассмотрим произвольный набор из m юношей. Так как при каждом i девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами, то m юношей для каждого k знакомы в сумме не менее чем с m/a_k девушками вида A_c^k . Суммируя по k , получаем, что общее число знакомых девушек не меньше $\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \dots + \frac{m}{a_n} \geq m$. Условие теоремы Холла выполнено.

Итак, существует паросочетание, которое каждому раскладу шляп ставит в соответствие множество вида A_c^k . Отметим, что при выполнении равенства $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$ это паросочетание фактически отмечает один элемент в каждом множестве A_c^k . Если же выполняется неравенство $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} > 1$, то «останутся одинокие девушки», т.е. в некоторых множествах A_c^k может не оказаться ни одного отмеченного элемента.

Построенное паросочетание позволяет задать стратегию мудрецов. Пусть j -й мудрец действует по правилу: увидев шляпы других мудрецов, т.е. набор цветов $c = (c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k)$, он однозначно восстанавливает множество A_c^j . Текущий расклад шляп является одним из элементов этого множества. Стратегия состоит в том, что j -й мудрец должен назвать тот цвет, который в множестве A_c^j отмечен нашим паросочетанием (а если отмеченного элемента нет, называет цвет произвольно).

Поскольку каждый расклад шляп отображается нашим паросочетанием как отмеченный элемент одного из множеств A_c^j , для этого расклада шляп j -й мудрец угадает цвет. Теорема доказана.

Итак, мы можем варьировать количества шляп у мудрецов, лишь бы выполнялось соотношение (*). Какое же наибольшее число шляп можно дать мудрецу в нашем конкурсе? Например, для $n = 8$ задача после леммы 2 утверждает, что можно довести количество шляп у одного мудреца до 128. А больше можно? Это чисто арифметический вопрос. Благодаря теореме, его можно сформулировать так:

Для каждого n среди всевозможных наборов натуральных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1,$$

требуется найти набор, в котором число a_n наибольшее.

Мы рассматриваем здесь лишь вариант равенства, потому что, как оказывается, ответ не изменится, если рассматривать наборы, где вместо равенства выполняется неравенство (*) и опять добавлено требование «отсутствия лентяев», состоящее в выполнении неравенства $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} < 1$. (Это неравенство означает, что даже без n -го мудреца, который угадывает на наименьшем числе раскладов, остальные проиграют.)

Чтобы найти кандидата на роль ответа, воспользуемся трюком: если для набора с «очень большим» числом a_n заменить дробь $\frac{1}{a_n}$ на сумму двух дробей $\frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{a_n(a_n + 1)}$, или, что то же самое, заменить число a_n на

два числа $a_n + 1$ и $a_n(a_n + 1)$, то мы получим набор $n + 1$ чисел, в котором наибольшее число — $a_n(a_n + 1)$ — «совсем огромное». Действуя таким образом, мы из единственного при $n = 2$ набора (2, 2) последовательно получим наборы: (2, 3, 6), (2, 3, 7, 42), (2, 3, 7, 43, 1806) и т.д. Последовательность чисел 2, 3, 7, 43, 1807, ... называется последовательностью Сильвестра, обозначим ее через s_n . Она удовлетворяет несложному рекуррентному соотношению

$$s_{n+1} = (s_n - 1)s_n + 1 = s_n^2 - s_n + 1.$$

Последовательность Сильвестра дает ответ на наш арифметический вопрос:

Утверждение. Набор чисел $(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n - 1)$ и есть тот набор, который содержит максимально возможное число $a_n = s_n - 1$. Кроме того, на этом наборе достигают максимального (по всем наборам) значения сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и произведение $a_1 a_2 \dots a_n$.

Хотя действия, с помощью которых построен наш набор, кажутся весьма разумными, доказать это утверждение не так-то просто. Мы не будем его доказывать: в «Кванте» на эту тему уже была публикация — см. статью О.Ижболдина, Л.Курляндчика «Разбиение единицы» («Квант» № 7 за 1987 г.).

Возвращаясь к шляпам и применяя рекуррентное соотношение для последовательности Сильвестра, мы с некоторыми усилиями можем найти, что $s_5 = 1807$, $s_6 = 3263443$, $s_7 = 10\,650\,056\,950\,807$. Наконец, при $n = 8$ наибольшее число шляп, для которого мудрецы выигрывают, равно

$$s_8 - 1 = 113\,423\,713\,055\,421\,844\,361\,000\,442.$$

Число $n = 8$ и слова «большие числа» вызывают ассоциацию с задачей о числе зерен на шахматной доске. Помните, какую награду попросил себе изобретатель шахмат: «на первую клетку положи 1 зерно, на вторую 2 зерна, на третью 4 зерна»? Общее число зерен на шахматной доске оказалось равно

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Но по сравнению с числом шляп это такие мелочи...

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

1. Человек может бежать, ускоряясь и замедляясь с максимальным по абсолютной величине ускорением a . Какое минимальное время ему понадобится, чтобы стартуя с нулевой начальной скоростью добежать до стенки, находящейся от него на расстоянии L , развернуться и добежать до начальной точки? У стены его скорость должна быть нулевой (чтобы не удариться).

2. На дне очень глубокого озера глубиной H находится открытая бутылка, которая за горлышко привязана веревкой к камню, лежащему на дне. В бутылке остался воздух, и она плавает, натягивая веревку с силой F . Температура T . Универсальная газовая постоянная R . Найдите количество молей воздуха в бутылке. Объемом и массой стенок бутылки пренебречь.

3. Треугольный клин с углом α у основания лежит на гладком столе и упирается в вертикальную стенку, как показано на рисунке 1. Если на клин положить шайбу и

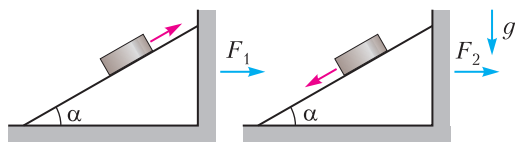


Рис. 1

ударом придать ей некоторую скорость вверх вдоль клина, то сила давления клина на вертикальную стенку будет равна F_1 . А если придать шайбе некоторую скорость вниз вдоль клина, то сила давления клина на вертикальную стенку будет равна F_2 . Найдите коэффициент трения шайбы о клин.

4. На RC-цепочку, состоящую из последовательно соединенных резистора и конденсатора, подают импульсы напряжения с амплитудой U_0 малой длительности τ каждые T секунд (рис.2). (За время импульса и в промежутках между ними заряд на конденсаторе меняется слабо: $T \ll RC$.) В началь-

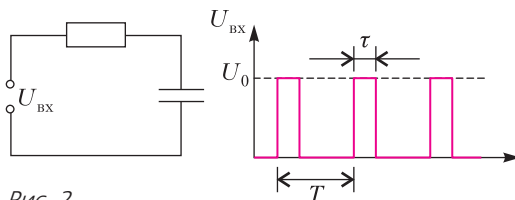


Рис. 2

ный момент конденсатор не заряжен. Во сколько раз средняя мощность тепловыделения в цепи в начале процесса подачи импульсов больше средней мощности тепловыделения через большое время?

5. Оцените, какую силу нужно приложить, чтобы удержать окно, на которое дует ветер средней силы. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

Внимание! Задача считается решенной, если помимо правильного ответа приведены необходимые объяснения.

Открытая межвузовская олимпиада «Будущее Сибири»

ПЕРВЫЙ (ОТБОРОЧНЫЙ) ЭТАП

Интернет-тур

8 класс

1. Боря и Света решили заняться спортивной ходьбой. Они стартуют из одной точки дорожки стадиона в одном направлении и двигаются с одинаковым темпом, т.е. совершают одинаковое количество шагов в единицу времени. Длина шага Бори $l_B = 70$ см, а Светы $l_C = 50$ см. К моменту, когда они вновь оказались в одной точке, Света прошла путь $s = 1000$ м. Чему равна длина L дорожки стадиона?

2. Боря положил кусочек льда при $T = 0^\circ\text{C}$ на чашечные весы. Затем он стал капать на него из капельницы горячей водой и записывать результаты измерения темпе-

ратуры и массы содержимого в чашке весов от времени. Экспериментальные точки Боря нанес на графики и соединил их плавными линиями (рис.3). Найдите температуру воды

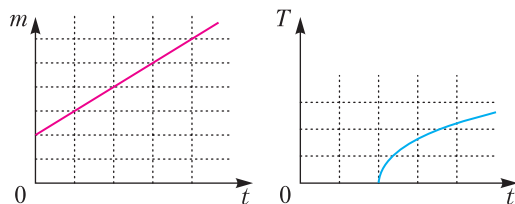


Рис. 3

в капельнице, зная, что удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 336000 \text{ Дж}/\text{кг}$. Чаша весов теплоизолирована.

3. В первом теплоизолированном сосуде находятся в равновесии вода и кусочек льда общей массой 500 г. Воду из этого сосуда перелили во второй такой же сосуд, оставив кусочек льда в первом. Затем в оба сосуда налили одинаковое количество горячей воды одинаковой температуры. После наступления равновесия температура воды в обоих сосудах оказалась одинаковой и равной 10°C . Сосуды поставили на чаши весов, первый – на левую, второй – на правую. Груз какой массы и на какую чашу весов нужно положить, чтобы весы пришли в равновесие? Удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 336000 \text{ Дж}/\text{кг}$.

4. Прямоугольный брусок, основание которого – квадрат со стороной a , подвешен к динамометру так, что нижняя его часть погружена в воду плотностью ρ , налитую в прямоугольный аквариум, основание которого – квадрат со стороной b (рис.4). Динамометр показывает значение силы F_1 . Динамометр опустили немного вниз так, что его показания уменьшились до значения F_2 . На какую высоту при этом опустился брусок?

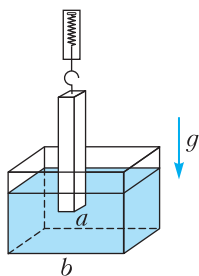


Рис. 4

Динамометр показывает значение силы F_1 . Динамометр опустили немного вниз так, что его показания уменьшились до значения F_2 . На какую высоту при этом опустился брусок?

9 класс

1. См. задачу 1 письменного экзамена.
2. В первом теплоизолированном сосуде находятся в равновесии вода и кусочек льда

общей массой 2 кг. Воду из этого сосуда перелили во второй такой же сосуд, оставив кусочек льда в первом. Затем в оба сосуда налили по 720 г горячей воды неизвестной температуры. После наступления равновесия температура воды в обоих сосудах оказалась одинаковой и равной 20°C . Найдите температуру горячей воды. Удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 336000 \text{ Дж}/\text{кг}$.

3. Внутри запаянной банки находится твердый предмет. Боря решил измерить его массу. Для этого он измерил общую массу m банки с предметом. Затем он на ровной гладкой поверхности разогнал банку до скорости v и привел ее в столкновение с горизонтальным динамометром, показания которого как функция времени приведены на рисунке 5. Боря не помнит единицы измерения силы и времени на графике. По-

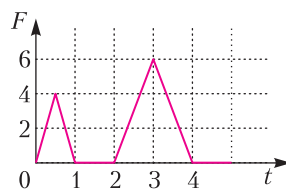


Рис. 5

могите ему найти массу $m_{\text{п}}$ предмета, исходя из имеющихся данных. Трением пренебречь.

4. В двух спаянных непроводящих трубках с площадью сечения S и $4S$ находится проводящая жидкость с удельным сопротивлением ρ , зажата между двумя проводящими невесомыми поршнями (рис.6). Под-

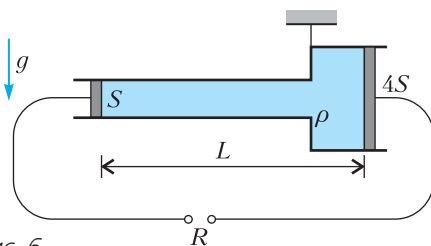


Рис. 6

вешенная за место спая трубка, в равновесии занимает горизонтальное положение. Расстояние между поршнями L . Чему будет равно сопротивление R , измеренное между ними? Массой самих трубок пренебречь.

10 класс

1. В двух спаянных непроводящих трубках с площадью сечения S и $4S$ находится проводящая жидкость объемом V с удельным сопротивлением ρ , зажатая между двумя проводящими невесомыми поршнями (см. рис.6). Подвешенная за место спая трубка в равновесии занимает горизонтальное положение. Чему будет равно сопротивление, измеренное между поршнями? Массой самих трубок пренебречь.

2. Автомобиль движется в безветренную погоду по горизонтальному шоссе. При движении с той же скоростью, но при наличии постоянного попутного ветра мощность силы тяги автомобиля уменьшилась в $16/9$ раз. Во сколько раз возросла бы мощность силы тяги автомобиля, если бы тот же ветер был встречным? Считайте, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.

3. См. задачу 3 письменного экзамена.

4. Автомобиль, имеющий все ведущие колеса (4WD), поднимается по горному шоссе («серпантину»), постоянный угол наклона которого α . Автомобиль подъезжает к повороту такому, что прямоугольная проекция этого поворота на горизонтальную плоскость представляет собой дугу радиусом R . Какую максимальную скорость может иметь автомобиль на таком повороте, чтобы не свалиться в пропасть? Коэффициент трения колес о шоссе μ , ускорение свободного падения g . Влиянием воздуха пренебречь.

11 класс

1. См. задачу 2 письменного экзамена.

2. Боря и Света вдалеке друг от друга собирают буквы «Б» и «С» соответственно из одинаковых непроводящих палочек, находящихся изначально на большом расстоянии друг от друга. Палочки заряжены одинаково и равномерно (чтобы палочки не разлетались, ребята закрепляют их непроводящими булавками). На сколько большую работу совершил Боря по сравнению со Светой, если известно, что для сближения двух палочек так, чтобы они расположились по противоположным сторонам квадрата, нужно совершить работу $A_{\parallel}$, а чтобы они расположились по смежным сторонам квадрата – работу $A_{\perp}$?

3. См. задачу 4 письменного экзамена.

4. В космосе образовалась однородная сферическая оболочка радиусом R и массой M малой толщины. Небольшой кусок оболочки, имеющий форму диска радиусом a (диск можно считать практически плоским), откололся, летит к центру и в настоящий момент находится на расстоянии $R/2$ от центра (рис.7). Какая сила действует на небольшое тело массой m , находящееся в центре оболочки? Гравитационная постоянная равна G .

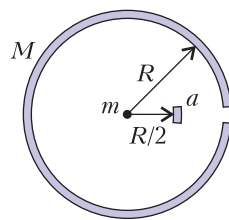


Рис. 7

Вариант 1

8 класс

1. Школа находится между двумя автобусными остановками A_1 и A_2 (рис.8).

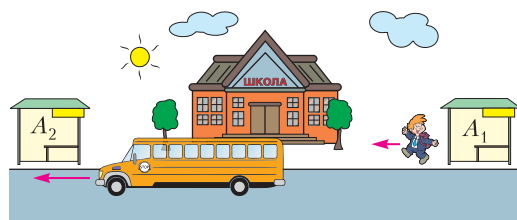


Рис. 8

Школьник заметил, что на какой бы остановке он ни выходил, он всегда приходит в школу в одно и то же время. Найдите, во сколько раз расстояние от первой остановки до школы больше расстояния от второй остановки до школы. Считайте, что скорости автобуса и школьника постоянны и равны $v = 40$ км/ч и $u = 5$ км/ч соответственно, а автобус ходит строго по расписанию. Временем остановки можно пренебречь.

2. Школьник обратил внимание, что подъем на эскалаторе в метро, если стоять на нем неподвижно, занимает $t_1 = 90$ с. Если пройти вперед $n = 10$ ступеней, то подъем займет $t_2 = 70$ с. Сколько ступеней N успел пройти вперед школьник за время подъема эскалатора, если время подъема составило $t_3 = 30$ с?

3. Деревянный брусок плотностью ρ в виде кубика со стороной a плавает в воде плотностью ρ_0 , как показано на рисунке 9. Через некоторое время брусок разбух так, что каждая его сторона увеличилась в k раз,

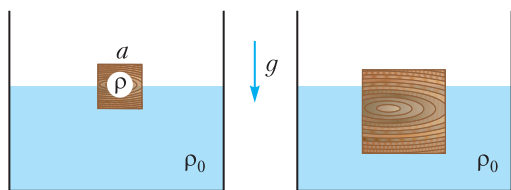


Рис. 9

а глубина, на которую он погружен в воду, увеличилась на Δh . Найдите, какой объем воды впитал брусок.

4. Сплошной прямоугольный брусок размерами $a \times b \times c = 10 \times 5 \times 3$ см лежит на дне прямоугольного сосуда с водой на самой большой по площади грани (рис.10). При этом высота уровня воды в сосуде составляет

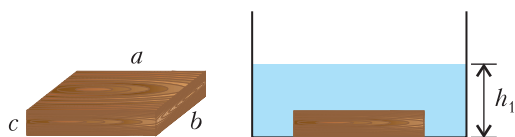


Рис. 10

$h_1 = 4$ см. Если брусок поставить на среднюю по площади грань, то высота уровня воды в сосуде станет равной $h_2 = 3$ см. Найдите высоту уровня воды в сосуде h_3 , если брусок поставить на самую маленькую грань.

9 класс

1. См. аналогичную задачу 1 для 8 класса.

2. В вертикальной закрытой снизу трубке расположены на одинаковом расстоянии друг от друга 6 одинаковых металлических шаров диаметром D (рис.11). Центр нижнего шара находится на высоте $2D$ над дном трубки, следующего — на высоте $4D$ и т.д. На месте шары удерживаются тонкими палочками, вставленными в стенки трубки. Палочку под верхним шаром резко убирают, он падает и ударяется о второй, при этом ломается вторая палочка. Далее при ударах следующие палочки также ломаются и перестают удерживать шары. Найдите, через какое время после выдергивания палочки нижний шар ударится о дно трубки. Ускорение свободного падения равно g . Соударения шаров упругие. Потерями энергии при разруше-

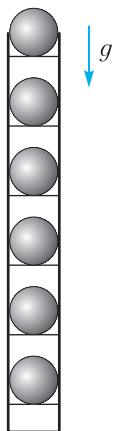


Рис. 11

нии палочек, влиянием воздуха, трением между шаром и стенками пренебречь.

3. Прямоугольник $ABCD$ сделан

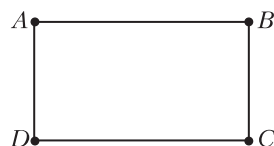


Рис. 12

из однородной проволоки (рис.12). Если измерить сопротивление между точками A и B , то оно окажется в k раз больше, чем сопротивление, измеренное между точками B и C . Определите, во сколько раз отличаются длины сторон прямоугольника.

4. Два сферических поплавка массой m и радиусом R связаны легкой веревкой длиной L и плавают, наполовину погруженные в жидкость (рис.13). К середине веревки цепляют груз, и вся система тонет. Какое натяжение имеет веревка в затонувшей системе, когда груз покоится на дне? Ускорение свободного падения равно g .

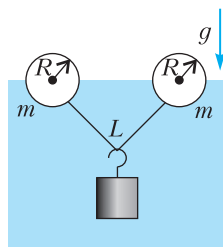


Рис. 13

10 класс

1. См. аналогичную задачу 2 для 8 класса.

2. Три бруска одинаковой массы M положили друг на друга. Бруски попарно соединили нерастяжимыми нитями, которые перекинуты через блоки, как показано на рисунке 14. Определите минимальную силу, которую надо приложить к верхнему бруску для

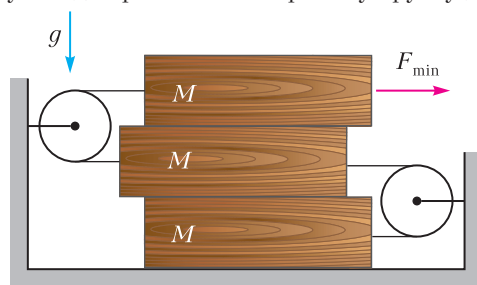


Рис. 14

того, чтобы сдвинуть его с места. Нити не провисают, коэффициент трения между поверхностью любого бруска и касающейся его поверхностью равен μ . Ускорение свободного падения равно g .

3. К одной точке прикреплены два маятника, представляющие собой маленькие шары-

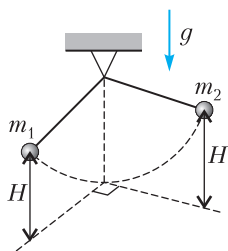


Рис. 15

и одновременно отпускают. Двигаясь вниз, шарики сталкиваются и слипаются. На какую максимальную высоту h поднимутся слипшиеся шарики в процессе последующего движения? Влиянием воздуха пренебречь.

4. В высокий металлический цилиндрический сосуд соосно вставлен металлический цилиндрический стержень, диаметр которого немного меньше внутреннего диаметра внешнего цилиндра (рис.16). Пространство между цилиндром и стенкой частично заполнили проводящей жидкостью так, что зазор оказался заполненным на высоту, много большую, чем диаметр стержня. Измерили сопротивление между стержнем и стенкой. Оно оказалось равным R_1 . В зазор долили жидкость так, что высота столба жидкости удвоилась. При этом сопротивление оказалось равным R_2 . Каким будет сопротивление между стержнем и цилиндром, если опять долить жидкость так, чтобы высота столба жидкости удвоилась относительно предыдущего шага?

Рис. 16

11 класс

1. Прямоугольный параллелепипед сделан из проводящего материала и имеет объем V . Школьник измерял сопротивление между противоположными гранями этого параллелепипеда и получил три разных значения R_1 , R_2 и R_3 . Найдите, чему равно удельное сопротивление материала, из которого изготовлен параллелепипед.

2. Открытая стекляннная маленькая баночка с некоторым количеством воздуха внутри ориентирована вверх дном и находится в равновесии в бассейне на некоторой глубине в воде плотностью ρ (рис.17). В этом месте давление воды p_0 . Температура воды в

бассейне T_0 . Воду в бассейне нагрели, при этом баночка медленно переместилась (без изменения ее ориентации) на величину H вниз и снова оказалась в равновесии. На какую величину ΔT повысили температуру воды в бассейне? Ускорение свободного падения равно g . Температурной зависимостью плотности воды пренебречь.

3. См. аналогичную задачу 2 для 10 класса.

4. На горизонтальной поверхности вплотную к стене стоит тележка массой M (рис.18). В центре тележки закреплен вертикальный стержень, к которому одним концом привязана нерастяжимая нить. К другому концу нити привязан маленький грузик массой m . Грузик отклонили вправо в сторону стены на угол 90° и отпустили. На какой максимальный угол α отклонится нить влево в процессе движения системы? Считайте, что в процессе движения тележка не наклоняется. Трением и влиянием воздуха можно пренебречь.

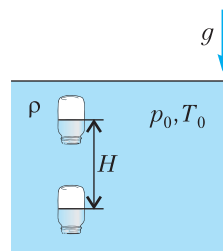


Рис. 17

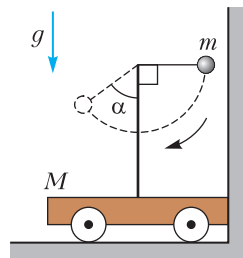


Рис. 18

Вариант 2

8 класс

1. Боря и Света бегают по стадиону с постоянными скоростями, Боря в $4/3$ раза быстрее Светы. Стартуя одновременно из центра стадиона, они бегут 7 секунд под прямым углом друг к другу, а затем, повернувшись, бегут навстречу друг другу. Через какое время после поворота они встретятся?

2. В тонкостенную кастрюлю, плавающую в жидкости плотностью ρ_0 , налили другую жидкость плотностью ρ и объемом V (рис. 19). Уровень жидкостей внутри и снаружи кастрюли совпал. Найдите массу кастрюли.

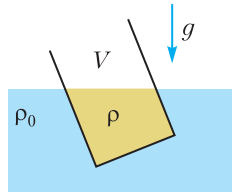


Рис. 19

3. Школьнику захотелось узнать, из какого материала сделан старинный игрушечный солдатик, подаренный ему дедушкой. Для этого он решил измерить его плотность. На воду в прямоугольном прозрачном пластиковом контейнере он опустил игрушечную лодочку и маркером отметил уровень воды. Затем посадил солдатика в лодочку и заметил, что уровень воды поднялся на $h_1 = 29$ мм выше метки. После чего, не убирая лодочки из контейнера, он бросил солдатика в воду. При этом солдатик оказался полностью погруженным в воду, а уровень воды стал на $h_2 = 4$ мм выше метки. Найдите плотность материала, из которого сделан солдатик. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³.

4. К одному плечу разноплечих рычажных весов подвесили тело неизвестной плотностью ρ , к другому плечу на расстоянии l_1 подвесили грузик, и система оказалась в равновесии (рис.20). Затем тело полностью

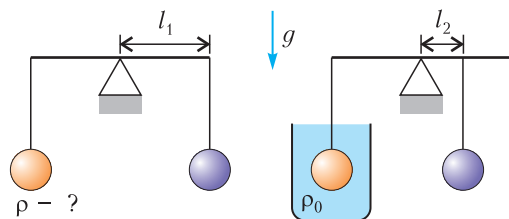


Рис. 20

погрузили в жидкость плотностью ρ_0 , а грузик перевесили так, что теперь он оказался на расстоянии l_2 . При этом система снова оказалась в равновесии. Найдите плотность тела ρ . Плечи весов считать невесомыми.

9 класс

1. Равнобедренный треугольник ABC , у которого стороны AB и BC равны, сделан из однородной проволоки. Если измерить сопротивление между точками A и B , то оно окажется в k раз больше, чем сопротивление, измеренное между точками A и C . Найдите, во сколько раз отличаются длины сторон AB и AC .

2. Пустотелый тонкостенный цилиндр катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости со скоростью v (рис.21). Горизонтально летящая пуля попадает в маленькое отверстие, проделанное в цилиндре в точке A . Радиус цилиндра, проведенный через точку A , образует угол 30° с вертикалью. При дальнейшем движении пуля

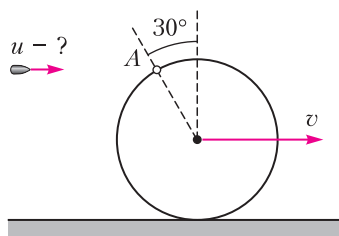


Рис. 21

вылетает через то же отверстие, при этом цилиндр не успевает сделать полный оборот. Найдите скорость пули. Силы тяжести нет.

3. Однородный цилиндр массой M покоится в желобе, образованном двумя плоскостями, наклоненными под углами α и β к горизонту (рис.22). Найдите разность сил

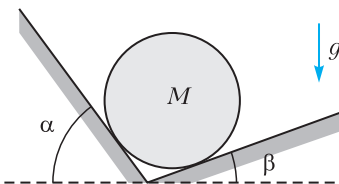


Рис. 22

реакции опор, действующих на цилиндр. Ускорение свободного падения равно g . Трения нет.

4. Конструкция (рис.23) состоит из трех одинаковых рычагов, шарнирно закреплен-

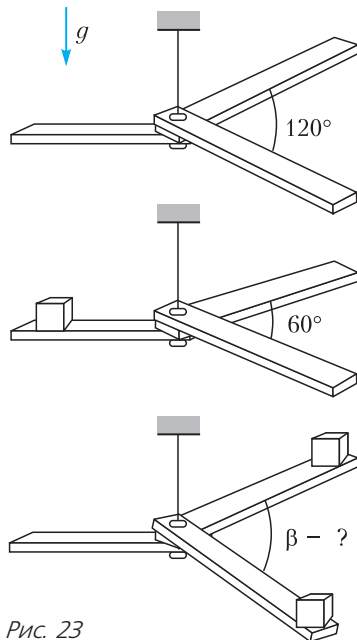


Рис. 23

ных между собой таким образом, что их можно поворачивать в горизонтальной плоскости относительно общей оси крепления. Конструкция подвешена с помощью нити за шарнир. В равновесии угол между любыми двумя рычагами равен 120° . Если положить на конец одного из рычагов игрушечный кубик, то для уравнивания конструкции необходимо повернуть два других рычага так, чтобы угол между ними стал равным $\alpha = 60^\circ$. Определите, какой угол β нужно установить между двумя рычагами, чтобы конструкция оказалась в равновесии, если положить два таких же кубика на концы двух рычагов.

10 класс

1. Окно расположено на высоте H от земли. На расстоянии L от окна по горизонтали стоит сосна, у основания которой на земле сидит белка. Белка увидела, что из окна горизонтально бросают орех в сторону сосны со скоростью v , и побежала вертикально вверх по сосне. С какой постоянной скоростью нужно бежать белке, чтобы поймать орех? Ускорение свободного падения равно g , влиянием воздуха пренебречь.

2. См. задачу 3 для 8 класса.

3. Школьнику на 17-летие подарили 17 воздушных шаров, наполненных гелием. Он решил узнать, сколько карандашей можно поднять в воздух с их помощью. Он стал привязывать шары к концу карандаша невесомой нитью. Когда он привязал 3 шара, карандаш все еще лежал на столе. Когда он привязал 4 шара, конец карандаша, к которому были привязаны нити, поднялся над столом. При этом, карандаш опирался на стол противоположным концом (рис.24). Какое максимальное количество карандашей можно поднять в воздух, чтобы они не касались стола, с помощью 17 воздушных шаров? Все шары и карандаши одинаковые.

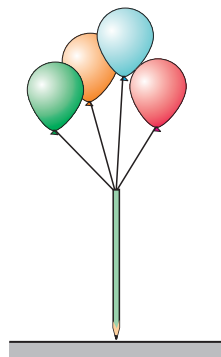


Рис. 24

4. Два автомобиля имеют все ведущие колеса и достаточную мощность двигателя, чтобы обеспечить максимальную силу тяги,

которую позволяет дорога. Минимальное время разгона со старта автомобиля массой M_1 до скорости v равно t_1 , а минимальное время разгона до той же скорости автомобиля массой M_2 равно t_2 . Автомобили соединили «жесткой сцепкой» (рис.25), и этот tandem стартовал одновременно. За какое



Рис. 25

время сцепленные автомобили достигнут скорости v ? Сопротивлением воздуха пренебречь.

11 класс

1. Три одинаковые непроводящие палочки массой m каждая, равномерно и одинаково заряженные, удерживаются совмещенными и прижатыми друг к другу (рис.26). Одну из палочек отпускают, продолжая удерживать оставшиеся.

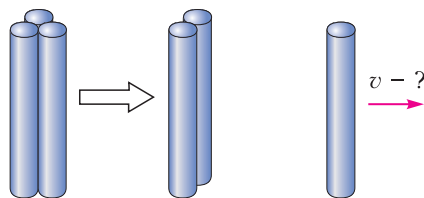


Рис. 26

Найдите ее скорость на большом расстоянии, если известно, что для совмещения двух палочек, изначально находящихся на большом расстоянии, необходимо совершить работу A .

2. Закрытая снизу и открытая сверху труба стоит вертикально (рис.27). Ее заполнили идеальным газом и прикрыли невесомым герметичным поршнем площади сечения S так, что поршень зафиксировался на высоте

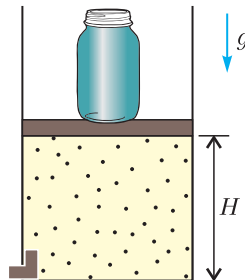


Рис. 27

Н. Внизу трубы имеется «сравливающий» клапан, который выпускает газ, если давление превышает некоторое неизвестное значение. Если давление становится ниже этого значения, то клапан закрывается. На поршень поставили груз массой M и отпустили. Сколько молей газа вышло из трубы, если в результате поршень после того, как температура газа стала снова равной температуре атмосферы T_0 , остановился на высоте $H/4$? Трением между поршнем и стенкой трубы пренебречь. Ускорение свободного падения g , универсальная газовая постоянная R , атмосферное давление p_0 известны.

3. Из тонкой бумажной ленты длиной L и двух цилиндрических валиков радиусом R соорудили транспортер, как показано на рисунке 28. С высоты H падает маленький

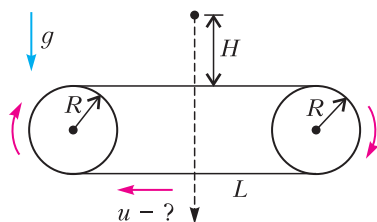


Рис. 28

камень в середину транспортера и пробивает отверстие в бумажной ленте. Найдите, с какой минимальной постоянной скоростью двигалась лента транспортера, если известно, что камень при дальнейшем падении еще раз попал в это же отверстие. Ускорение свободного падения равно g . Потерями энергии на разрыв камнем бумаги, а также влиянием воздуха пренебречь.

4. Автомобиль движется с постоянной скоростью v по окружности радиусом R на наклонной плоскости с углом α у основания (рис.29). При каком минимальном коэффи-

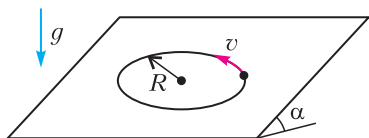


Рис. 29

циенте трения колес о плоскость это возможно? Ускорение свободного падения равно g . Влиянием воздуха пренебречь.

ВТОРОЙ (ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ) ЭТАП

8 класс

1. Старик добирался на моторной лодке на свою дачу, которая находилась на острове ниже по течению. Время t он шел на моторе, который затем заглох. Через время τ после этого его снесло течением к даче. Весь обратный путь домой старик шел на моторе. До места, где у него заглох мотор по пути на дачу, он шел время T . Сколько времени ему еще потребуется, чтобы добраться до дома?

2. В термос с горячей водой по очереди бросили два одинаковых кубика льда. График зависимости температуры в термосе T от времени t представлен на рисунке 30.

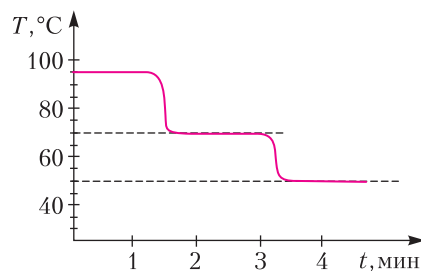


Рис. 30

Определите температуру льда. Удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг·град), удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 336000$ Дж/кг. Термос теплоизолирован, теплоемкостью его стенок, а также теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

3. Линейка лежит одним концом на опоре, другим – на весах (рис.31). Вторую

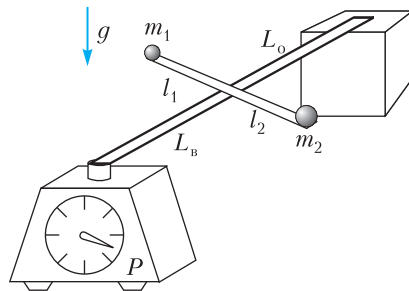


Рис. 31

линейку, на концах которой лежат два груза, положили крест-накрест на первую так, что вся система находится в равновесии.

При этом расстояния от перекрестия до грузов оказались равными l_1 и l_2 , а от перекрестия до опоры и весов L_0 и $L_в$ соответственно. Весы показывают вес P . Чему равны массы каждого из грузов? Линейки узкие и невесомые, ускорение свободного падения равно g .

4. В аэропорту для перехода пассажиров между терминалами работает многополосный траволатор – постоянно движущийся ленточный тротуар (рис.32). Скорость 1-й

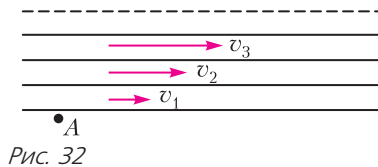


Рис. 32

ленты $v_1 = 1$ м/с, 2-й ленты $v_2 = 2$ м/с и т.д. Скорость самой скоростной 10-й ленты $v_{10} = 10$ м/с. Пассажир заходит на траволатор (через его 1-ю ленту) и через $T = 30$ с сходит с него (с его первой ленты). На каком максимальном расстоянии от первоначальной точки A он может при этом оказаться, если ему разрешено двигаться только перпендикулярно движению лент (в том числе и переходя с ленты на ленту) со скоростью, не превышающей по абсолютной величине $u = 1,5$ м/с? Ширина каждой ленты траволатора $L = 3$ м.

9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. У Пети имеется большое количество маленьких пластиковых шариков, и он хочет найти плотность ρ материала, из которого они изготовлены. Для этого он поставил на весы пустой цилиндрический сосуд объемом V и измерил его вес, равный P_1 . Затем он доверху насыпал в стакан шарики и начал медленно наливать в стакан некоторую жидкость. В момент, когда шарики начали всплывать, вес оказался равным P_2 . Найдите плотность ρ . Ускорение свободного падения равно g .

3. У школьника имеются три электрических прибора: батарейка, вольтметр и амперметр. Все приборы идеальные, т.е. обладают конечным сопротивлением. Школьник соединил все приборы последовательно, при этом вольтметр показывал $U_1 = 10$ В, а амперметр – $I_1 = 0,1$ А. За-

тем школьник соединил все приборы параллельно. В этом случае вольтметр показывал $U_2 = 1$ В, а амперметр – $I_2 = 1$ А. Определите ЭДС батарейки.

4. Длинную однородную массивную цепочку медленно перетягивают через неподвижную наклонную горку с помощью легкой нерастяжимой нити, привязанной к концу цепочки (рис.33). Нить перекинута че-

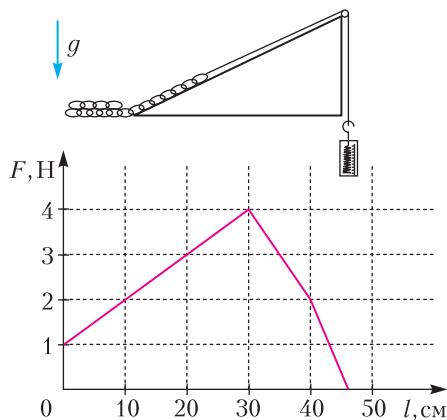


Рис. 33

рез блок, и к ее концу привязан динамометр. График зависимости показаний динамометра от перемещения конца нити показан на рисунке. Определите массу цепочки. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Трения нет.

5. Две старинные пушки нацелены так, чтобы попасть друг в друга. Левая пушка выстреливает ядро массой $m_1 = 10$ кг, а правая стреляет ядром массой $m_2 = 2$ кг. Пушки стреляют одновременно, ядра сталкиваются лоб в лоб и слипаются. На каком расстоянии от левой пушки упадут слипшиеся ядра, если расстояние между пушками $L = 600$ м? Влиянием воздуха пренебречь.

10 класс

1. Горка представляет собой наклонную плоскость, внизу плавно сопряженную с

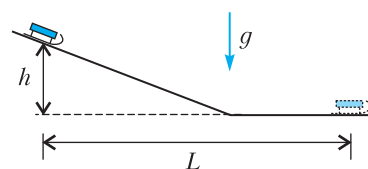


Рис. 34

горизонтальной плоскостью (рис.34). Санки, находящиеся на горке на высоте h , толкнули вниз, сообщив им некоторую начальную скорость вдоль горки. После этого санки остановились на горизонтальной плоскости, преодолев по горизонтали расстояние L . На какое еще расстояние x проедут санки, если им опять сообщить ту же начальную скорость? Коэффициент трения между санками и горкой (а также горизонтальной плоскостью) равен μ . Участок закругления горки короткий.

2. Вертикальная трубка сечением S погружена на глубину H в жидкость плотностью ρ (рис.35). В трубку вставлен легкий

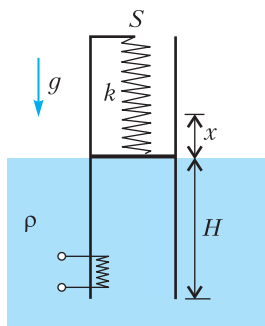


Рис. 35

поршень, подпертый недеформированной пружиной жесткостью k . Жидкость под поршнем начинают нагревать при помощи спирали, расположенной у нижнего конца трубки. В результате плотность жидкости в трубке уменьшается до ρ_0 . На какую высоту x поднимется поршень? Оба конца трубки открыты. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .

3. Электрическая цепь собрана из идеального источника ЭДС, идеальных вольтметра и амперметра и трех резисторов. Сопротивления резисторов равны $R_1 = 6$ кОм, $R_2 = 3$ кОм и $R_3 = 2$ кОм соответственно. ЭДС источника $\mathcal{E} = 9$ В, вольтметр показывает $U = 6$ В, а амперметр — $I = 0,5$ мА. Нарисуйте описанную электрическую цепь, обозначив на рисунке все элементы.

4. Длинная доска массой M покоится в горизонтальном положении на валиках (рис.36). У самого края доски ее сверху с силой F придавливают вращающимся с угловой скоростью ω валиком радиусом R .

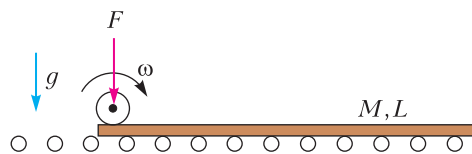


Рис. 36

Сколько оборотов совершит верхний валик к моменту, когда скорость доски станет максимальной? Трением между доской и нижними валиками пренебречь. Длина доски L . Коэффициент трения между поверхностями верхнего валика и доски равен μ .

5. Система состоит из двух шариков одинакового объема и массой m_1 и m_2 и двух блоков — подвижного и неподвижного (рис.37). Шарик массой m_1 прикреплен к

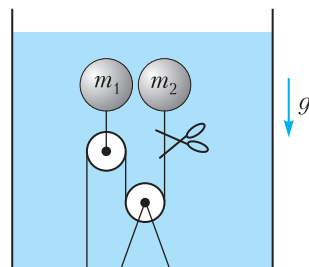


Рис. 37

подвижному блоку, а массой m_2 — к нити, перекинутой через два блока и закрепленной на дне. Система погружена в жидкость и находится в равновесии. На сколько изменится сила давления жидкости на дно сосуда, если перерезать нить? Массой блоков и нити, а также их объемом пренебречь. Трения нет. Ускорение свободного падения равно g .

11 класс

1. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится воздух (рис.38).

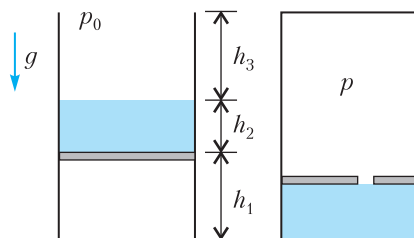


Рис. 38

На поршень налита вода плотностью ρ слоем высотой h_2 . В равновесии высота поршня над дном сосуда равна h_1 . Цилиндр закрывают герметичной крышкой, расположенной на высоте h_3 над поверхностью воды. Через некоторое время поршень прохудился, и вся вода оказалась внизу. Чему равно давление воздуха в сосуде? Атмосферное давление равно p_0 , ускорение свободного падения равно g , трения нет. Температура постоянна.

2. Два одинаковых шарика массой m каждый соединены непроводящей пружинкой жесткостью k . В начальном положении шарики неподвижны, пружинка не растянута, а ее длина равна l . Шарики зарядили одинаковыми зарядами q , и они начали разлетаться в разные стороны. При какой минимальной величине q пружинка порвется, если известно, что она выдерживает максимальную силу F ?

3. На гладкой горизонтальной плоскости неподвижно лежат два маленьких шарика. Они соединены невесомой нерастяжимой нитью, которая вначале была распрямлена (рис.39; вид сверху). Центр нити начина-

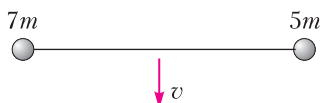


Рис. 39

ют перемещать вдоль плоскости с некоторой постоянной скоростью, направленной перпендикулярно начальной ориентации нити. Шарики сталкиваются первый раз под углом к начальной ориентации нити, равным, очевидно, 90° . Под каким углом к начальной ориентации нити они столкнутся во второй раз, если их массы равны $7m$ и $5m$, а столкновения абсолютно упругие?

4. В двух противоположных квадрантах плоскости xu (заштрихованы на рисунке

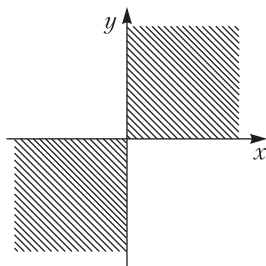


Рис. 40

40) имеется однородное магнитное поле с индукцией B , направленное вдоль оси z . Частицу с зарядом e и массой m запустили так, что она движется в плоскости xu по замкнутой траектории. Найдите период движения частицы по этой траектории.

5. Оцените, какое максимальное статическое напряжение относительно земли может быть на человеке, окруженном заземленными предметами (деревьями, бетонными стенами, батареями отопления и т.д.), если известно, что электрическая прочность воздуха на пробой $E = 30$ кВ/см. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать недостающие в условии задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

6. **Задача-демонстрация** (демонстрируется видеоролик). Луч лазерной указки направлен под углом к горизонтальной поверхности стола (рис.41). Если на пути

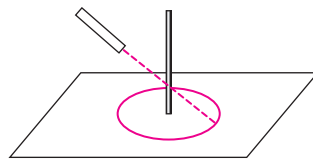


Рис. 41

лазерного луча разместить тонкий вертикальный металлический стержень круглого сечения, на столе образуется светящаяся окружность с центром в месте нахождения стержня. Если заменить стержень круглого сечения на вертикальный стержень с неправильной (не круглой) формой сечения, светящаяся линия на столе все равно имеет форму окружности. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили В.Боровков, Е.Жданов, А.Киприянов, С.Лежнин, М.Махмудиан, А.Ненашев, Е.Пальчиков, А.Погосов, Д.Похабов, Г.Федотович

Инженерная олимпиада ШКОЛЬНИКОВ

В течение нескольких лет ряд ведущих технических университетов России — Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Российский университет транспорта (МИИТ), Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е.Алексеева и Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королева — проводят необычную олимпиаду, посвященную физике в технике, физике вокруг нас, физике в жизни человека.

Эту олимпиаду организаторы называли Инженерной олимпиадой школьников, чтобы подчеркнуть, что она больше, чем по физике. В заданиях олимпиады встречались задачи, посвященные работе многих инженерных устройств — прокатного стана, дифференциала автомобиля, механизма Липкина—Посселе, подвесного моста, жидкостного насоса, углового отражателя и той физике, на основе которой они работают. Нам кажется, что задание Инженерной олимпиады школьников не только сокращает интервал между школьной физикой и физикой, помогающей жить человеку, и показывает, какой интересной может быть профессия инженера.

В 2018/19 учебном году отборочные туры Инженерной олимпиады школьников прошли более чем на 30 площадках в нашей стране, а также в Армении, Казахстане, Киргизии, Узбекистане.

Инженерная олимпиада школьников входит в Перечень олимпиад школьников, поэтому ее победители и призеры получают особые права при поступлении в любые вузы РФ, а граждане иностранных государств могут претендовать на обучение в российских вузах за счет средств государственного бюджета РФ (в рамках квот Россотрудничества РФ).

Ниже приводятся избранные задачи заключительного тура Инженерной олимпиады 2018/19 учебного года. (Невошедшие сюда задачи были опубликованы в «Задачнике «Кванта» в №5 за 2019 год.)

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ

1. Имеются две лампочки. Одна, мощностью $P_1 = 110$ Вт, рассчитана на работу в бытовой электрической сети напряжением $U_1 = 220$ В. Вторая лампочка, от карманного фонарика, рассчитана на напряжение $U_2 = 3,5$ В и силу тока $I_2 = 0,28$ А. Лампочки соединяют последовательно и подключают к бытовой электрической сети. Перегорит ли какая-нибудь из лампочек? Считать, что нити накала лампочек в любой момент времени имеют сопротивление рабочего режима.

2. Инженеры-взрывотехники, изучая взрыв экспериментального субъядерного заряда, установили, что сразу после взрыва заряд превращается в шарообразное однородное облако мельчайшей пыли радиусом R и плотностью ρ_0 . Начальная скорость v каждой пылинки облака направлена от его центра и пропорциональна расстоянию r до него: $v = Hr$, где H — известный коэффициент. Считая, что в дальнейшем скорости пылинок не меняются, определите плотность пыли на расстоянии x от центра облака через время t после взрыва.

3. В распоряжении инженера имеются пять электрических лампочек: три с номинальной мощностью $P_1 = 40$ Вт и две с номинальной мощностью $P_2 = 60$ Вт. Все лампочки рассчитаны на напряжение $U = 110$ В. Как следует подключить эти лампочки к бытовой электрической сети напряжением $U_1 = 220$ В, чтобы все они горели нормальным накалом?

4. В конце 19 века в связи с развитием машиностроения велись интенсивные работы по преобразованию одного движения в другое. Например, вращательного в движение по прямой или в s -образное. Тогда математики вспомнили о лемме, доказанной много лет назад (в 13 веке) известным персидским математиком Насиром ад-Дином Туси. Условие этой леммы сводится к следующему. Пусть по внутренней поверхности поло-

го цилиндра с внутренним радиусом R катится без проскальзывания диск радиусом $R/2$. Вопрос: какой будет траектория движения

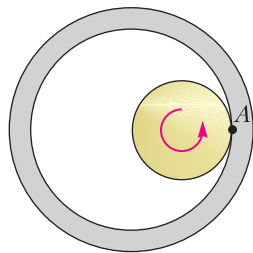


Рис. 1

точки на поверхности диска, например точки A на рисунке 1? Получите ответ и обоснуйте его. Найдите зависимость величины скорости точки A от времени, если диск вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω , а в начальный момент точка A касалась поверхности цилиндра в самой правой ее точке.

Рис. 1

5. Элемент X обладает следующей вольт-амперной характеристикой (зависимостью тока через него от приложенного электрического напряжения): $I = \alpha U^2$, где α – из-

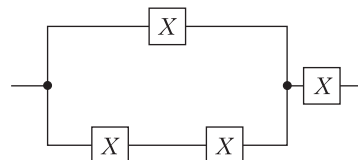


Рис. 2

стное число. Из четырех одинаковых элементов X собрали цепь, схема которой приведена на рисунке 2. Найдите ее вольт-амперную характеристику.

Публикацию подготовил С.Муравьев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №10)

1. $(-2) \times (-3) + (-4) \times (-4) =$
 $= -2 \times ((-3) + (-4) + (-4)) = -2 + (-3) \times (-4 + (-4))$
 (можно выбрать любые два способа из трех).

2. 8.

У креста 12 углов, а у квадрата 4. Угол может пропасть, только если его разрежут по вершине. Значит, нужно не менее $12 - 4 = 8$ разрезов. А количество разрезов равно количеству частей. Пример на 8 частей привести нетрудно.

3. Поместим один из пончиков во все три прибора по очереди. Два из них дадут одинаковые ответы, а третий – противоположный. Этот прибор не может быть тем, который выдает случайные ответы. Осталось поместить в него оставшиеся два пончика и по его ответам определить «качество» этого прибора, а тогда уже легко увидеть, какой из пончиков искомым.

4. 8 часов.

Разобьем сутки на 22 промежутка между встречами часовой и минутной стрелок и рассмотрим отдельно каждый промежуток. Так как стрелки движутся равномерно, угол между ними с постоянной скоростью меняется сначала от 0° до 180° , а потом от 180° до нуля. На отрезке от 0° до 60° угол находится треть времени в каждом промежутке, а следовательно, и треть суток, т.е. 8 часов.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. На одну чашу весов, например левую, надо поместить гирию массой, большей массы взвешиваемого груза, на другую – разновески и добиться наиболее точного равновесия весов. Затем на правую чашу поместить взвешиваемый груз и снимать разновески, пока равновесие весов не восстановится. Масса снятых гирь будет равна массе груза.

2. Пружинными. Рычажные весы не позволяют обнаружить уменьшения силы тяжести и веса тела.

3. Прикрепить в середине стержня стрелку. Иначе наш «прибор» при равных моментах действующих на стержень сил будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

4. Уменьшится, так как действие магнита на шарик подобно увеличению силы тяжести.

5. Период колебаний такого маятника не меняется в зависимости от температуры, поскольку тепловое расширение ртути приводит к подъему центра тяжести системы, что компенсирует тепловое удлинение стержня маятника.

6. Помимо большой теплопроводности металл обладает малой удельной теплоемкостью, благодаря чему температура внутри калориметра быстро выравнивается, а на нагревание его затрачивается мало тепла. Кроме того, тепловое излучение металла значительно меньше, чем стекла, что уменьшает тепловые потери.

7. Большая теплопроводность и меньшая теплоемкость ртути по сравнению с эфиром и спиртом сокращают время измерения температуры.

8. У таких термометров пространство капилляра над ртутью заполняется азотом под большим давлением, что приводит к значительному повышению температуры кипения ртути по сравнению с температурой кипения при нормальном давлении.

9. Динамометр показывает общий вес трубки и ртути внутри трубки. При повышении атмосферного давления как уровень ртути в трубке, так и показания динамометра будут расти, при уменьшении давления – убывать.

10. Предохранитель делают из легкоплавкого провода и во много раз более тонкого, чем вся остальная цепь. Из-за большой плотности тока и малой поверхности охлаждения этот провод быстро нагревается и плавится.

11. Достаточно четырех резисторов (см. рис. 1).

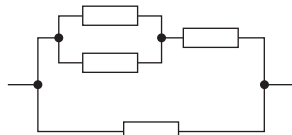


Рис. 1

12. См. рис. 2.

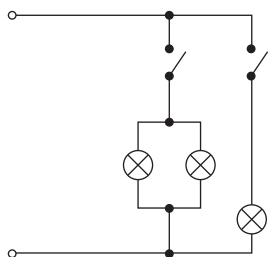


Рис. 2

13. Сделать большое число витков из тонкой проволоки.

14. Можно, если поменять местами окуляр и объектив.

15. Коэффициент преломления зависит от длины волны падающего света, а угол отражения не зависит.

Микроопыт

Необходимо пустить в ванну воду равномерной струей и отметить время заполнения водой сосуда известного объема. Затем надо измерить время наполнения ванны. Отношение этих промежутков времени равно отношению объемов сосуда и ванны.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №9)

1. а) 18; б) 171.

Добавим к Васиным числам еще два числа: -2 и 53 в пункте а) и -2 и 54 в пункте б). Упорядочим все числа по возрастанию и рассмотрим разности между соседними числами. Каждая из разностей не меньше 3 и сумма всех разностей равна разности между наибольшим и наименьшим числом набора, т.е. 55 в пункте а) и 56 в пункте б). Отсюда следует, что разностей не больше 18, и сначала у Васи было не больше 17 чисел (очевидно, столько чисел у него быть могло). Итак, у Васи изначально было 17 чисел и разностей теперь 18.

Когда все разности равны по 3, их сумма равна $18 \cdot 3 = 54$. В пункте а) одна из этих разностей увеличена на 1, в пункте б) – две разности увеличены на 1 (возможно, увеличена одна дважды). По набору разностей весь Васин набор восстанавливается однозначно. Так что ответ – количество способов осуществить эти увеличения. В пункте а) надо выбрать одну из 18 разностей для увеличения, так что способов 18. В пункте б) выбрать две разные разности есть

$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$ способа, а одинаковые – $C_{18}^1 = 18$ способов. Итого $153 + 18 = 171$ способ.

Либо же, воспользовавшись методом шаров и перегородок, можно получить ответ сразу:

$C_{19}^2 = \frac{19 \cdot 18}{2} = 171$. (Про этот метод можно прочитать, например, в книге Н.Я.Виленкина, А.Н.Виленкина, П.А.Виленкина «Комбинаторика» (М.: ФИМА, МЦНМО, 2010).)

2. 26.

Расположим числа в виде квадрата 10×10 и отметим клетки на каждой четвертой диагонали, начиная с диагонали 10–01, как на рисунке 3,а. Тогда любой ход Квантика затронет ровно одно отмеченное число. Отмеченных чисел 26, поэтому ходов тоже нужно хотя бы 26. Обойтись 26 ходами можно, например, как на рисунке 3,б (в каждом прямоугольнике – набор чисел, который можно назвать за один ход).

3. Пусть K – вершина меньшего треугольника, которую нужно построить внутри данного треугольника ABC . Построим O – центр описанной окружности ABC (рис.4). Далее можно действовать по-разному.

Первое решение. Построим описанную окружность треугольника AOC и окружность с центром O , равную описанной окружности правильного треугольника со стороной a (рис.5). Отметим на их пересечении точку K . Тогда

а)

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

б)

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Рис. 3

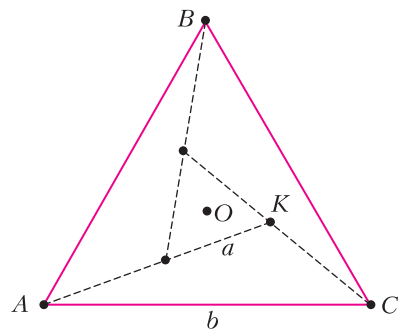


Рис. 4

$\angle AKC = \angle AOC = 120^\circ$. Построим правильный треугольник с центром O и вершиной K , он будет искомым.

Второе решение. Точку K можно получить также из следующих соображений: в треугольнике ACK нам известны $\angle K = 120^\circ$, сторона $AC = b$, разность сторон $AK - KC = a$ (если исходить из предположения, что мы строим конструкцию,

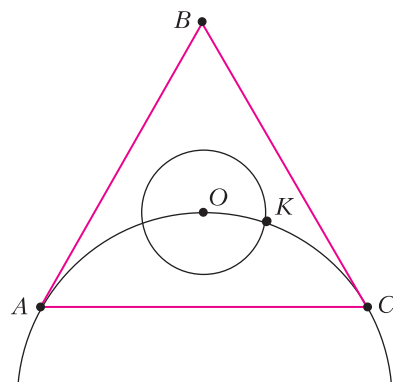


Рис. 5

переходящую в себя при повороте вокруг O на 120°). Задача построения треугольника по этим данным известна (см., например, №2495 на сайте zadachi.mccme.ru).

Третье решение. Построим окружность с центром O , равную вписанной окружности правильного треугольника со стороной a , проведем к ней касательные из A, B, C (рис.6). Так как они

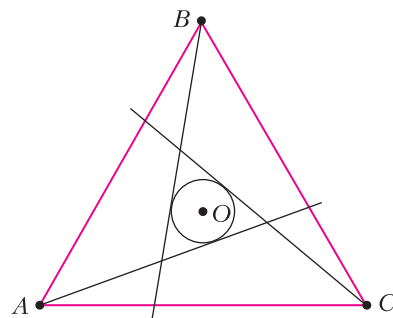


Рис. 6

переходят одна в другую при повороте треугольника вокруг O на 120° , то в пересечении они образуют правильный треугольник.

Четвертое решение. Построим где-то в стороне правильный треугольник со стороной a и его

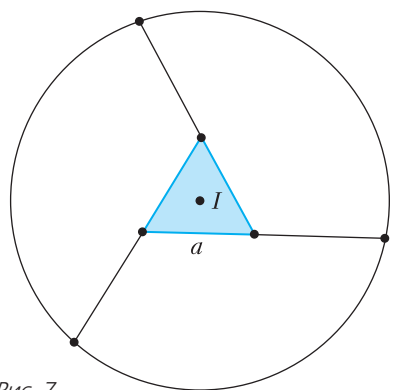


Рис. 7

центр I (рис.7). Построим окружность с центром I , равную описанной окружности треугольника ABC . Отметим ее пересечения с продолжениями сторон. Так как конструкция переходит в себя при повороте вокруг I на 120° , то эти точки будут вершинами правильного треугольника, причем равного ABC . Итак, мы построили то, что нужно, но не внутри треугольника ABC , а внутри треугольника, равного ABC . Теперь, откладывая уже известные углы и отрезки, можно построить то же самое внутри треугольника ABC .

4. Да.

Добавим к исходному выражению

$$x^2 + x^3 + \dots + x^{2016} = \\ = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{2010}).$$

Получим

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{2019} = \\ = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{2015}).$$

Оба этих выражения делятся на натуральное число $Y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, значит, и исходное выражение делится на Y . При этом $Y > 1$ и исходное выражение, очевидно, больше Y . Отсюда следует, что оно составное.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф И З И К А

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

1. Чтобы время в пути было минимальным, человеку необходимо все время двигаться с максимальным ускорением. Так как у стенки скорость должна быть равна нулю, то первую половину пути до стенки человек должен ускоряться, а вторую половину пути замедляться с ускорением a . На эти разгон и замедление он потратит одно и то же время t_1 , и $\frac{L}{2} = a \frac{t_1^2}{2}$. От стенки обратно человек может все время ускоряться с ускорением a , так как ограничений на скорость при движении обратно нет. Тогда на обратный путь он затратит время t_2 , и $L = a \frac{t_2^2}{2}$. Искомое время равно

$$t = 2t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{L}{a}}(2 + \sqrt{2}).$$

2. Количество молей воздуха в бутылке можно найти из уравнения состояния идеального газа: $v = \frac{pV}{RT}$, где p и V – давление и объем воздуха в бутылке соответственно. Поскольку озеро глубокое, атмосферным давлением можно пренебречь

по сравнению с гидростатическим, равным $p = \rho gH$, где ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения. Так как бутылка находится в равновесии, то сила Архимеда уравновешивается силой натяжения нити: $F = \rho gV$. Решая систему записанных уравнений, найдем

$$v = \frac{FH}{RT}.$$

3. На клин действуют сила давления $\vec{F}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ со стороны шайбы, а также сила тяжести клина $M\vec{g}$ (где M – масса клина) и сила реакции со стороны стенки $\vec{N}_1$ в первом и $\vec{N}_2$ во втором случаях. Условие равновесия клина имеет вид

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + M\vec{g} + \vec{N}_{1,2} = 0.$$

Сила давления шайбы направлена перпендикулярно поверхности клина и по модулю равна $F = mg \cos \alpha$, где m – масса шайбы. Сила трения равна $F_{\text{тр}} = \mu N$, где μ – искомый коэффициент трения шайбы о клин. Силы реакции стенки направлены горизонтально и равны по модулю $N_1 = F_1$ и $N_2 = F_2$ соответственно. Напишем условие равновесия клина в горизонтальных проекциях. В случае, когда шайбе придают скорость вверх вдоль клина, $N_1 = F \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha$. Когда шайбе придают скорость вниз вдоль клина, $N_2 = F \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha$. Отсюда получим

$$\mu = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \tan \alpha.$$

4. Выделяемая в цепи мощность равна U^2/R , где U – напряжение на резисторе, R – сопротивление резистора. По условию задачи за время T заряд на конденсаторе меняется слабо, поэтому напряжение на конденсаторе тоже можно считать постоянным в пределах одного цикла длительностью T . В начале процесса конденсатор не заряжен, а следовательно, напряжение на резисторе равно входному напряжению: $U = U_0$ во время импульса напряжения и $U = 0$ в промежутке между импульсами. Таким образом, выделяемая мощность во время импульса напряжения равна $P_1 = \frac{U_0^2}{R}$, а выделяемая мощность между импульсами равна нулю: $P_2 = 0$. Среднюю мощность в начале процесса $P_{\text{нач}}$ найдем, усредняя P_1 и P_2 с учетом длительности импульса τ и длительности промежутка между импульсами $T - \tau$:

$$P_{\text{нач}} = \frac{\tau P_1 + (T - \tau) P_2}{T}.$$

В установившемся режиме (через большое время после начала подачи импульсов) конденсатор зарядится до некоторого напряжения U_C . При

этом напряжение на резисторе U равно разности между входным напряжением и напряжением на конденсаторе: $U = U_0 - U_C$ во время импульса напряжения и $U = -U_C$ в промежутке между импульсами. Следовательно, в установившемся режиме выделяемая мощность P'_1 во время импульса напряжения равна $P'_1 = \frac{(U_0 - U_C)^2}{R}$, а выделяемая мощность P'_2 между импульсами равна $P'_2 = \frac{U_C^2}{R}$. Среднюю мощность в установившемся режиме $P_{\text{уст}}$ найдем, усредняя P'_1 и P'_2 :

$$P_{\text{уст}} = \frac{\tau P'_1 + (T - \tau) P'_2}{T}.$$

Осталось найти U_C . Для этого заметим, что в установившемся режиме заряд $\tau(U_0 - U_C)/R$, протекающий через резистор за время импульса τ , равен заряду $(T - \tau)U_C/R$, протекающему в обратную сторону за время между импульсами $T - \tau$:

$$\tau \frac{U_0 - U_C}{R} = (T - \tau) \frac{U_C}{R}.$$

Отсюда получаем

$$U_C = \frac{U_0 \tau}{T}, \quad P'_1 = \frac{U_0^2 (T - \tau)^2}{R T^2}, \quad P'_2 = \frac{U_0^2 \tau^2}{R T^2},$$

$$\frac{P_{\text{нач}}}{P_{\text{уст}}} = \frac{\tau P'_1}{\tau P'_1 + (T - \tau) P'_2} = \frac{T}{T - \tau}.$$

5. Обозначим скорость ветра через v . За время Δt на окно площадью S попадут молекулы, находившиеся в объеме $Sv\Delta t$ перед окном. Число молей воздуха в этом объеме равно $Sv\Delta t/V_0$, где V_0 — объем одного моля. Число же молекул равно $\Delta N = N_A Sv\Delta t/V_0$, где N_A — число Авогадро. Среднюю скорость молекул воздуха в проекции на нормаль к окну до взаимодействия с окном можно считать равной v , а после взаимодействия — нулевой. Значит, переданный окну импульс равен

$$\Delta p = \Delta N m v = \frac{N_A m}{V_0} S v^2 \Delta t,$$

где m — средняя масса молекул воздуха. Величина $N_A m$ есть средняя молярная масса молекул воздуха M . Таким образом,

$$\Delta p = \frac{M}{V_0} S v^2 \Delta t.$$

Изменение импульса в единицу времени равно искомой силе:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{M}{V_0} S v^2.$$

Подставив в эту формулу $M \approx 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $V_0 \approx 22,4 \cdot 10^{-3}$ м³/моль, $S \approx 1$ м², $v \approx 5$ м/с, получим $F \approx 30$ Н.

ОТКРЫТАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «БУДУЩЕЕ СИБИРИ»

Первый (отборочный) этап

ИНТЕРНЕТ-ТУР

8 класс

- $L = \left(\frac{l_B}{l_C} - 1 \right) s = 400$ м. 2. $T_B = T + \frac{\lambda}{c} = 80$ °C.
- На левую чашу весов нужно положить груз массой $\Delta m = M \frac{\lambda}{\lambda + 2c(T - T_0)} = 400$ г.
- $\Delta h = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{F_1 - F_2}{\rho g}.$

9 класс

- $T_B = T \left(1 + \frac{M(\lambda + cT)}{m(\lambda + 2cT)} \right) \approx 66,3$ °C.
- Сначала банка упруго сталкивается с динамометром, двигаясь к нему со скоростью v , и меняет скорость на противоположную. Изменение импульса банки определяется площадью под первым пиком графика. При смене скорости банки предмет начинает двигаться внутри банки и неупруго сталкивается со стенкой банки, которая движется ему навстречу. После этого банка вместе с предметом двигаются в сторону динамометра, но уже с другой скоростью. Изменение импульса системы при втором столкновении определяется площадью под вторым пиком. В результате найдем

$$m_{\text{п}} = \frac{4}{5} m.$$

- $R = \frac{3\rho L}{4S}$ (достаточно записать равенство моментов сил тяжести левой и правой частей трубки относительно точки подвеса).

10 класс

- $R = \frac{3\rho V}{8S^2}$. 2. В $\frac{25}{16}$ раз.
- $v = \frac{\sqrt{gR}}{\cos \alpha} (\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^{1/4}$ (на автомобиль действуют сила тяжести, направленная вертикально, сила реакции, направленная перпендикулярно плоскости движения, и сила трения, направленная вдоль этой плоскости).

11 класс

- $\Delta A = 2A_{\parallel} + 3A_{\perp}$ (разница работ равна работе, совершенной Борей на добавление средней горизонтальной палочки).
- $F = \frac{3GmMa^2}{4R^4}$ (можно представить, что в

оболочке образовалась «дырка» отрицательной массы $-m$, которая действует на тело массой m с отталкивающей силой, равной $Gmm_{\text{д}}/R^2$).

ВАРИАНТ 1**8 класс**

- $\frac{l_1}{l_2} = \frac{v-u}{v+u} = \frac{9}{7}$.
- $N = \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2} n = 30$.
- $V_B = a^3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} (k^2 - 1) + \frac{\Delta h}{a} k^2 \right)$.
- $h_3 = \frac{a(b-h_1)}{a(b-h_2) - b(h_1-h_2)} h_2 = 2 \text{ см}$.

9 класс

- $t = \sqrt{\frac{13D}{g}}$.
- $\frac{AB}{BC} = k - 1 + \sqrt{k^2 - k + 1}$.
- $F_H = mg \frac{L + 2R}{\sqrt{L^2 + 4RL}}$.

10 класс

- $F_{\min} = 9\mu Mg$.
- $h = H \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}$.
- $R_3 = \frac{R_1 R_2}{3R_1 - 2R_2}$.

11 класс

- $\rho = \sqrt[3]{R_1 R_2 R_3 V}$.
- $\Delta T = \frac{\rho g H}{\rho_0} T_0$.
- $\alpha = \arccos \frac{m}{M+m}$ (когда грузик прошел нижнюю точку траектории, тележка пришла в движение, а когда нить отклонилась влево на максимальный угол, скорость тележки стала равной скорости грузика).

ВАРИАНТ 2**8 класс**

- $t = t_0 \frac{\sqrt{1 + (v_B/v_C)^2}}{1 + v_B/v_C} = 5 \text{ с}$.
- $m = (\rho_0 - \rho) V$.

- $\rho = \rho_0 \frac{h_1}{h_2} = 7250 \text{ кг/м}^3$.
- $\rho = \frac{\rho_0}{1 - l_2/l_1}$.

9 класс

- $\frac{AB}{AC} = 2k - 1$.
- $u = v \left(1 + \frac{3}{\pi} \right)$.
- $\Delta F_p = Mg \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.
- $\beta = 2 \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 146^\circ$.

10 класс

- $u = v \left(\frac{H}{L} - \frac{gL}{2v^2} \right)$.
- $t = \frac{M_1 + M_2}{M_1 t_2 + M_2 t_1} t_1 t_2$.
- Два карандаша.

11 класс

- $v = 2\sqrt{\frac{A}{m}}$.
- $v = \frac{(3p_0 S - Mg)H}{4RT_0}$.
- $v = \frac{L\sqrt{g}}{2\sqrt{2}(\sqrt{H+2R} - \sqrt{H})}$.
- $\mu = \frac{v^2}{Rg \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$.

Второй (заключительный) этап

8 класс

- $\Delta t = \frac{2T + \tau}{\tau} t$.
- $T_{\text{л}} = -100^\circ \text{C}$.
- $m_1 = \frac{P(1 + L_b/L_o)}{g(1 + l_1/l_2)}$, $m_2 = \frac{P(1 + L_b/L_o)}{g(1 + l_2/l_1)}$.
- $l = 2L \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_7}{u} + L \frac{v_8}{u} = 128 \text{ м}$ (пассажир сумеет пересечь 7 лент и дойти до середины 8-й).

9 класс

- $\rho = \frac{P_2 - P_1}{Vg}$.
- $\varepsilon = \frac{(I_2 + I_1 U_2/U_1)(U_2/I_2 + U_1/I_1) - U_2}{U_2/U_1 + I_2/I_1 - 1} = 11,1 \text{ В}$.
- $m = 1 \text{ кг}$ (первый участок графика соответствует подъему цепочки на вершину горки, второй — тому, что часть цепочки перевалилась через горку, третий — тому, что левый край цепочки уже оказался на горке).
- $l = \frac{m_1}{m_1 + m_2} L = 500 \text{ м}$.

10 класс

- $x = L - \frac{h}{\mu}$.
- $x = \frac{(\rho - \rho_0)gH}{\rho_0 g + k/S}$.
- См. рис. 8.

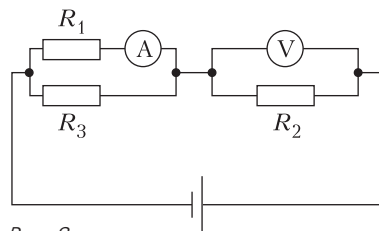


Рис. 8

4. $N = \frac{M\omega^2 R}{2\pi\mu F}$ при $\omega R \leq \sqrt{2\frac{\mu F}{M}} L$ (проскальзывание прекращается в процессе взаимодействия валика и доски); $N = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{2LM}{\mu F}}$ – в противном случае (проскальзывание не прекращается, и доска достигает максимальной скорости в момент выскальзывания из-под валика).
5. $\Delta F = 3(m_2 - m_1)g$.

11 класс

1. $p = p_0 + \frac{\rho g h_1 h_2}{h_1 + h_3}$.
2. $q = \sqrt{\frac{F l (l + F/\kappa)}{2k}}$ (здесь k – постоянная в законе Кулона).
3. В системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью v вместе с центром нити, шарики до первого столкновения движутся навстречу друг другу по окружности с одинаковыми скоростями, равными v . Записав законы сохранения импульса и энергии, найдем скорости шариков после первого столкновения: $v_1 = -2v/3$, $v_2 = 4v/3$. Обозначим через φ_1 и φ_2 углы, на которые повернутся половинки нити между первым и вторым столкновениями (рис.9). При этом

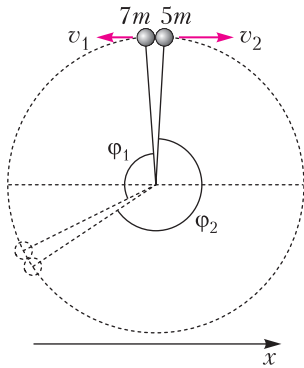


Рис. 9

$\varphi_1/\varphi_2 = |v_1|/|v_2|$ и $\varphi_1 + \varphi_2 = 360^\circ$. Отсюда находим, что второе столкновение произойдет под углом $\varphi_1 - 90^\circ = 30^\circ$ к первоначальной ориентации нити.

4. На участках, где нет магнитного поля, частица движется равномерно и прямолинейно, а там, где поле есть, она движется по окружности с постоянной скоростью.

Если траектория частицы не выходит за пределы одного заштрихованного квадранта, то это окружность радиусом $R = mv/(eB)$. Тогда период движения равен $T = 2\pi m/(eB)$.

Если же частица движется из одного заштрихованного квадранта в другой и обратно, то ее

траектория состоит из двух дуг окружностей радиусом R и двух соединяющих их прямолинейных участков (рис.10). При этом точки $A, B,$

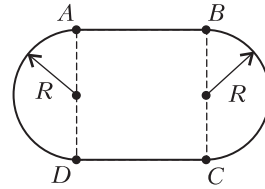


Рис. 10

C, D должны находиться на границах заштрихованных квадрантов. Это можно осуществить, когда прямоугольник $ABCD$ оказывается квадратом, повернутым на 45° относительно координатных осей (рис.11). В этом случае $T = 2(\pi + 2)m/(eB)$.

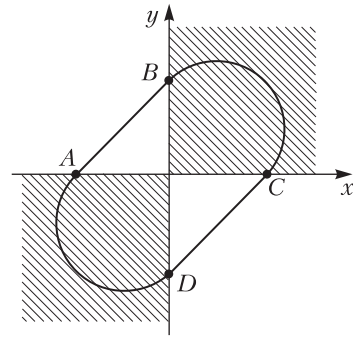


Рис. 11

5. Пусть у нас есть проводящий шар радиусом R . Напряжение шара относительно земли равно $U = kQ/R$, где Q – заряд шара. Напряженность электрического поля максимальна вблизи шара и равна $E = kQ/R^2$. У тела человека наименьший радиус кривизны порядка $0,7$ см (концы пальцев). Подставляя $R \approx 0,7$ см и $E_{\max} = 30$ кВ/см, найдем $U_{\max} \approx 20$ кВ.

6. В этой задаче нужно объяснить:

- 1) почему отраженные лучи образуют на столе замкнутую линию, обходящую вокруг стержня;
- 2) почему эта линия представляет собой окружность (даже при неправильной форме сечения стержня), центром которой является нижний край стержня.

1) Рассмотрим ход лучей в проекции на плоскость стола (рис.12; вид сверху). Лучи, попадающие на стержень в точках A, B, C, D, E, F , после отражения достигают поверхность стола в точках A', B', C', D', E', F' соответственно. Лучи, падающие на левую (правую) половину стержня, отражаются влево (вправо). Видно, что при движении падающего луча слева направо

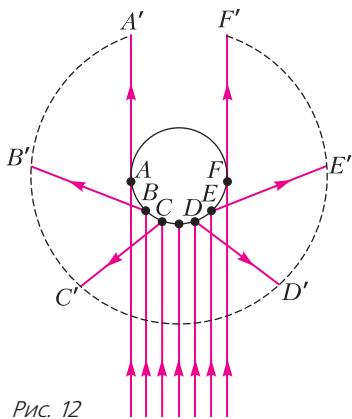


Рис. 12

во (от A до F) отраженный луч плавно поворачивается на 360° (в проекции сверху) от AA' до FF' . Поэтому точка падения луча на стол описывает непрерывную, почти замкнутую кривую (небольшой разрыв между A' и F' – это тень от стержня). В условиях данного опыта ширина лазерного луча больше ширины стержня, т.е. все точки A, B, C, D, E, F освещены одновременно. Поэтому вся кривая видна одновременно как светящаяся практически замкнутая линия.

2) Лучи лазерной указки, падая на стержень по линии AO (рис.13), отражаются от разных точек

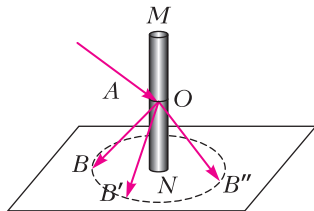


Рис. 13

стержня, в результате чего возникает набор отраженных лучей OB, OB', OB'' и т.д. Покажем, что все эти отраженные лучи распространяются под одним и тем же углом к вертикали ON . (Подчеркнем, что это утверждение отличается

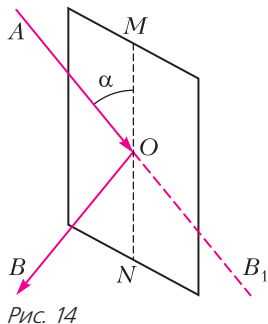


Рис. 14

от утверждения «угол падения равен углу отражения», так как углы между вертикалью и направлениями лучей – это не то же самое, что углы падения и отражения.) Проще всего убедиться в этом из соображений симметрии. Операция зеркального от-

ражения относительно плоскости α , касательной к стержню, переводит продолжение падающего луча OB_1 в отраженный луч OB (рис.14). Эта же операция оставляет вертикальную линию ON неизменной (так как эта линия принадлежит плоскости α). Поэтому угол B_1ON переходит при зеркальном отражении в угол BON , а значит, $\angle B_1ON = \angle BON$ (при зеркальном отражении расстояния и углы не изменяются). С другой стороны, $\angle B_1ON = \angle AOM$, так как это вертикальные углы. Следовательно, $\angle BON = \angle AOM$. Эти же рассуждения верны для других углов. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники $BON, B'ON, B''ON$ и т.д. (см. рис. 13) равны друг другу, а значит, $|BN| = |B'N| = |B''N| = \dots$, т.е. точки светящейся линии образуют окружность с центром в точке N – нижнем крае стержня.

Заметим, что в приведенных рассуждениях нигде не использовалась форма стержня, поэтому они одинаково верны и для круглых, и для некруглых стержней.

ИНЖЕНЕРНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1. Понятно, что лампочка, рассчитанная на работу в бытовой сети, перегореть не может, поскольку приложенное к ней напряжение будет заведомо меньше ее номинального напряжения. А вот лампочка от карманного фонарика может перегореть, если сила электрического тока, протекающего через нее, будет больше ее рабочего тока. Расчеты дают, что сила тока в цепи равна $I = 0,486$ А, что больше силы рабочего тока лампы карманного фонарика. Поэтому эта лампочка перегорит.

2. Покажем, что облако остается однородным в течение всего времени. Для этого рассмотрим все пылинки, которые находятся на расстояниях от r_1 до r_2 от центра облака. Масса этих пылинок равна

$$m = \rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi r_2^3 - \frac{4}{3} \pi r_1^3 \right) = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3).$$

Через время t после взрыва только эти пылинки окажутся на расстояниях от $r_1 + v(r_1)t = r_1(1 + Ht)$ до $r_2 + v(r_2)t = r_2(1 + Ht)$ от центра облака. Поэтому в сферическом слое с внутренним радиусом $r_1(1 + Ht)$ и внешним $r_2(1 + Ht)$ через время t после взрыва окажутся пылинки с суммарной массой m . И, следовательно, плотность пылинок в указанном слое будет равна

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3} \pi ((r_2(1 + Ht))^3 - (r_1(1 + Ht))^3)} = \frac{\rho_0}{(1 + Ht)^3}.$$

Таким образом, плотность облака осколков взрыва через время t после взрыва не зависит ни от r_1 , ни от r_2 , а значит, останется постоянной по всему облаку. Учитывая, что дальше расстояния $R(1+Ht)$ от центра облака частиц вообще не будет, получаем окончательный ответ:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{(1+Ht)^3} \text{ при } x < R(1+Ht),$$

$$\rho(t) = 0 \text{ при } x > R(1+Ht).$$

3. Чтобы лампочки горели нормальным накалом, к каждой должно быть приложено ее номинальное напряжение $U = 110$ В. Поэтому нужно соединить наши лампы в два блока с одинаковыми сопротивлениями. Найдём сопротивления наших ламп:

$$R_1 = \frac{110^2}{40} \text{ Ом}, \quad R_2 = \frac{110^2}{60} \text{ Ом}.$$

Видно, что сопротивление лампы с номинальной мощностью 40 ватт составляет $2/3$ от сопротивления лампы с номинальной мощностью 60 ватт. А это значит, что общее сопротивление трех параллельно соединенных ламп мощностью 40 ватт равно общему сопротивлению двух параллельно соединенных ламп мощностью 60 ватт. Если соединить два таких блока последовательно и подключить к ним напряжение $U_1 = 220$ В (рис.15), то на каждой лампе будет ее рабочее напряжение и все они будут гореть нормальным накалом.

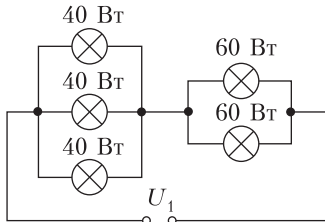


Рис. 15

4. Выберем систему координат xOy так, как показано на рисунке 16, и будем считать, что в начальный момент времени координаты точки A были такими: $x = R$, $y = 0$. Прежде чем найти

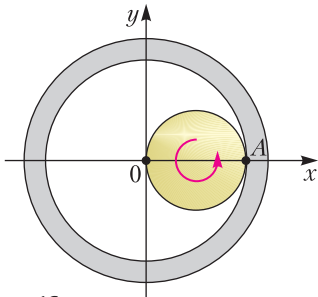


Рис. 16

зависимость координат точки A от времени, сделаем небольшую подготовительную работу. Покажем, что если центр диска вращается без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра удвоенного радиуса, то сам диск вращается вокруг своей оси с той же угловой скоростью, но в противоположном направлении. Что касается направлений вращения, то они очевидны. Например, из рисунка 17, на котором центр

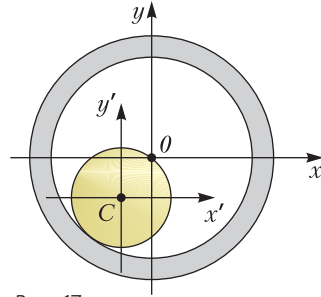


Рис. 17

диска C поворачивается по часовой стрелке вокруг оси цилиндра, а точка A вращается против часовой стрелки вокруг центра диска в системе отсчета $x'Cy'$. Величины угловых скоростей вращения диска вокруг своей оси и его центра вокруг оси цилиндра можно связать так. Пусть центр диска совершил четверть оборота вокруг оси цилиндра (рис.18). Тогда и точка A совер-

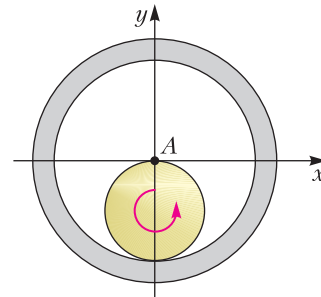


Рис. 18

шит ровно четверть оборота вокруг оси диска. Это связано с тем, что длина полуокружности диска и длина четверти окружности внутренней поверхности цилиндра (при двукратном отличии радиусов) совпадают, и, следовательно, точка A , начав движение из положения, в котором она касается поверхности полости цилиндра справа, через четверть оборота центра диска вокруг оси цилиндра окажется в центре полости (на оси цилиндра), т.е. также совершит четверть оборота вокруг центра диска. Поэтому зависимости от времени координат центра диска C и точки A в системе координат, начало которой связано с

центром диска, можно записать так:

$$x_C(t) = \frac{R}{2} \cos(-\omega t) = \frac{R}{2} \cos \omega t,$$

$$y_C(t) = \frac{R}{2} \sin(-\omega t) = -\frac{R}{2} \sin \omega t,$$

$$x'_A(t) = \frac{R}{2} \cos \omega t,$$

$$y'_A(t) = \frac{R}{2} \sin \omega t.$$

Отсюда находим координаты точки A в неподвижной системе координат:

$$x_A(t) = x_C(t) + x'_A(t) = R \cos \omega t,$$

$$y_A(t) = y_C(t) + y'_A(t) = 0.$$

Это означает, что точка A совершает движение вдоль горизонтальной прямой по гармоническому закону, а зависимость модуля ее скорости от времени определяется соотношением

$$v_A(t) = |R\omega \sin \omega t|.$$

5. Установим связь между током I через рассматриваемый участок цепи и приложенным к нему напряжением U . Для упрощения изложения пронумеруем элементы так, как это показано на рисунке 19. Тогда

$$I_4 = I, \quad U_4 = \left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2}.$$

Поскольку напряжение на элементе 1 в два раза

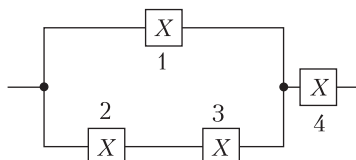


Рис. 19

больше напряжения на каждом из элементов 2 и 3, то сила тока, текущего через элемент 1 в 4 раза больше силы тока, текущего через элементы 2 и 3. А так как $I_1 + I_{2,3} = I_4$, то

$$I_1 = \frac{4}{5} I, \quad I_{2,3} = \frac{1}{5} I.$$

Отсюда находим напряжение на элементе 1 и на цепочке 2-3:

$$U_1 = U_{2-3} = \left(\frac{I_1}{\alpha}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2}.$$

Следовательно, напряжение на всем рассматриваемом участке цепи равно

$$U = U_1 + U_4 = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2} + \left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2} = \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2},$$

а вольт-амперная характеристика может быть записана уравнением

$$I = \frac{5\alpha}{(2 + \sqrt{5})^2} U^2.$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

(см. «Квант» №10)

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур

1. -1. 2. 7; 3. -2. 4. 5, 6, 7, 10. 5. 1. 6. 4. 7. 4.
8. 34. 9. 20. 10. 4.

Заключительный тур

1. 2.

Запишем остатки от деления $3, 3^2, 3^3, \dots$ на 26 – это 3, 9, 1, 3, далее остатки циклически повторяются. Если $n = 3k + 1$, то 3^n дает при делении на 26 остаток 3, для $n = 3k + 2$ получаем остаток 9, а для $n = 3k$ – остаток 1. Поскольку 105 делится на 3, то 3^{105} дает при делении на 26 остаток 1. Степени числа 5 дают остатки 5, 25, 21, 1, 5. Поскольку 100 делится на 4, то 5^{100} при делении на 26 дает остаток 1. Наконец, при делении данного числа на 26 получаем остаток $1 + 1 = 2$.

2. 10.

Пусть первый работник может выполнить работу за X часов, второй – за Y часов, третий – за Z часов. Первый за 1 час выполняет $1/X$ часть работы, второй – $1/Y$, третий – $1/Z$. По условию,

$$1/X + 1/Y = 1/20, \quad 1/Y + 1/Z = 1/12,$$

$$1/X + 1/Z = 1/15.$$

Сложение этих уравнений дает равенство

$$1/X + 1/Y + 1/Z = 1/10,$$

которое означает, что три работника при одновременной работе выполняют работу за 10 часов.

3. 3.

Заметим, что при всех допустимых x имеет место равенство

$$x = (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}).$$

Уравнение можно переписать в виде

$$(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}) = (\sqrt{2x+1} - 2)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}).$$

Делением на $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} \neq 0$ получаем $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1} = 2$, $x = 3$.

4. 216.

Поскольку числа a , 2 , b образуют арифметическую прогрессию, то $\frac{a+b}{2} = 2$, $a + 2 + b = 6$. Сумма коэффициентов многочлена равна его значению в точке $x = 1$, искомая сумма есть

$$(a + 2 + b)^3 = 6^3 = 216.$$

5. -18 .

Положим $f(x) = x^3 - 8x + 6$. Поскольку $f(0) > 0$, а $f(1) < 0$, то уравнение имеет три корня x_1, x_2, x_3 , причем $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (0; 1)$, $x_3 \in (1; +\infty)$. Выполнены равенства $x_1^3 = 8x_1 - 6$, $x_2^3 = 8x_2 - 6$, $x_3^3 = 8x_3 - 6$. Складывая эти равенства, получаем

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8(x_1 + x_2 + x_3) - 18 = -18,$$

так как по теореме Виета $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

6. 50%.

Пусть изначально мы имели X литров раствора, содержащего x литров кислоты. Условия задачи означают, что

$$\frac{x}{X+10} = \frac{1}{4}, \quad \frac{x}{X+15} = \frac{1}{5}.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{X}{x} = 3 \frac{X+10}{x} - 2 \frac{X+15}{x} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2,$$

т.е. начальная концентрация равна 50%.

7. 12.

При размещении предметов в коробки всегда можно поместить в каждую коробку строго больше 4 кг. Поэтому для полной упаковки груза в 50 кг вполне достаточно 13 коробок. Убедимся в том, что достаточно и 12 коробок. Сначала разместим в коробки предметы тяжелее $5/6$ кг. В каждую коробку можно положить 5 таких предметов (масса каждого не превосходит 1 кг), так что в каждой коробке мы разместим по крайней мере $25/6$ кг. Одна коробка может оказаться незаполненной. Оставшиеся коробки заполняем предметами массой менее $5/6$ кг. Заполнение коробки можно продолжать до тех пор, пока свободное пространство позволяет вместить больше $5/6$ кг, поэтому и эти коробки вместят по крайней мере по $25/6$ кг. В 12 коробок удастся положить $12 \cdot 25/6 = 2 \cdot 25 = 50$ кг груза. Осталось показать, что наши предметы невозможно уложить в 11 коробок. Если представить себе, что все изделия одинаковы и в каждую коробку можно положить не более 5 предметов (т.е. каждый предмет имеет массу больше $5/6$ кг), то в 11 коробок удастся положить не более 55 предметов. Разобьем 50 кг на 56 частей, каждая часть массой $50/56 = 25/28 > 25/30 = 5/6$ кг. Уложить эти предметы в 11 коробок невозможно.

8. 3.

Поскольку в описанной трапеции суммы длин противоположных сторон равны, трапеция, подобная нашей, имеет основания длины 8 и 2, а боковые стороны равны 5. Такая трапеция имеет вписанную окружность радиуса 2. Выполним преобразование подобия с коэффициентом $3/2$, мы получаем искомую трапецию с основаниями 12 и 3.

9. $16\sqrt{2}$.

Положим $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$, через φ обозначим величину угла между сторонами. Тогда

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{BD_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

$$|\overrightarrow{AC_1}|^2 = (\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AC_1}) = 3|\vec{a}|^2 + 6(\vec{a}, \vec{b}) = 3|\vec{a}|^2(1 + 2\cos\varphi),$$

$$|\overrightarrow{BD_1}|^2 = (\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BD_1}) = 3|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2(3 - 2\cos\varphi).$$

Мы приходим к уравнению

$$\frac{3(1 + 2\cos\varphi)}{(3 - 2\cos\varphi)} = \frac{15}{7},$$

из которого находим $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Полная поверхность параллелепипеда равна

$$6 \cdot 2^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 16\sqrt{2}.$$

10. 0; $\pm 1/4$.

Во-первых, уравнение имеет два решения $x = \pm 1$, если $a = 0$. Во вторых, два решения мы получим в случае касания гипербол $y = \pm \frac{1}{x}$ и прямой $y = ax + 1$. Это происходит при $a = \pm \frac{1}{4}$.

ФИЗИКА

Отборочный тур

$$1. v_{cp} = \frac{v_1 t_1 + s_2 + s_4}{t_1 + \frac{2s_2}{v_1} + t_3 + \frac{s_4}{v_4}} = 1,7 \text{ м/с}.$$

$$2. R = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} \operatorname{tg}^2 \alpha = 3,8 \text{ м}.$$

$$3. F_1 = F \frac{m_1 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m_2 (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 130 \text{ Н}.$$

$$4. F_{\min} = \frac{mgb}{2\sqrt{h^2 + b^2}} = 2570 \text{ Н}.$$

$$5. H = 4N \sqrt{\frac{m}{\rho_0 \pi L}} = 36 \text{ м}.$$

$$6. h = \left(\sqrt[3]{\frac{n}{n-1}} - 1 \right) R = 1150 \text{ км}.$$

$$7. \Delta t = \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{8c} \right) = 0,146^\circ \text{С}.$$

$$8. I_1 = \frac{U}{2R_1} = 188 \text{ мА}.$$

$$9. B_2 = B_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 26,0 \text{ мТл}.$$

$$10. L = \frac{2l_1 l_2 (\sqrt{3} - 1)}{l_2 - l_1 \sqrt{3}} = 1,21 \text{ м}.$$

Заключительный тур

$$1. \Delta y_{23} = \frac{v_0^2}{8g} \approx 31 \text{ см}.$$

$$2. \Delta m = \frac{8\pi m v}{gT} = 16 \text{ г}.$$

$$3. T = \frac{mg}{\cos \alpha} = \sqrt{3}mg.$$

4. Рита:

$$\rho \frac{V}{2} c (t_1 - t_2^{\text{Рита}}) = \\ = \frac{N}{2} mc_{\text{л}} (0 - t_{\text{л}}) + \frac{N}{2} m\lambda + \frac{N}{2} mc (t_2^{\text{Рита}} - 0),$$

$$t_2^{\text{Рита}} = \\ = \frac{\rho V c t_1 - Nm(c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) + \lambda)}{\rho V c + Nmc} = \frac{184}{10,08} \text{ }^\circ\text{C} \approx 18 \text{ }^\circ\text{C};$$

Маруся:

1-й кув.

$$\rho \frac{V}{4} c (t_1 - t_2^1) = \\ = \frac{N}{2} mc_{\text{л}} (0 - t_{\text{л}}) + \frac{N}{2} m\lambda + \frac{N}{2} mc (t_2^1 - 0), \\ t_2^1 = \frac{\rho \frac{V}{2} c t_1 - Nm(c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) + \lambda)}{\rho \frac{V}{2} c + Nmc} = \\ = \frac{16}{5,88} \text{ }^\circ\text{C} = 2,72 \text{ }^\circ\text{C},$$

2-й кув.

$$\rho \frac{V}{4} c (t_1 - t_2^2) = \frac{N}{2} mc (t_2^2 - t_2^1), \\ t_2^2 = \frac{\rho \frac{V}{2} t_1 - Nm t_2^1}{\rho \frac{V}{2} + Nm} = \frac{41,09}{1,4} \text{ }^\circ\text{C} = 29,35 \text{ }^\circ\text{C},$$

3-й кув.

$$\rho \frac{V}{4} c (t_2^2 - t_2^{\text{Маруся}}) = \rho \frac{V}{4} c (t_2^{\text{Маруся}} - t_2^1), \\ t_2^{\text{Маруся}} = \frac{t_2^1 + t_2^2}{2} \approx 16 \text{ }^\circ\text{C}.$$

$$5. \eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{\frac{vR}{2} \left(\frac{T_3}{2} - T_1 \right)}{\frac{vR}{2} (4T_3 - 3T_1)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{T_1}{T_3}}{4 - 3 \frac{T_1}{T_3}} = 0,048.$$

$$6. B'_0 = \frac{8Q}{3C\pi d^2 N} = 0,85 \text{ Тл/с}.$$

ИНФОРМАТИКА

Отборочный тур

1. АБГЖ. 2. 15. 3. 8. 4. БГДЕ. 5. Г. 6. 1024.

Заключительный тур

1. 5114. 2. 101. 3. 94. 4. Неверно. 5. 512. 6. 327. 7. 9; заменить $M := (E - B) \operatorname{div} 2$ на $M := (E + B) \operatorname{div} 2$; заменить $Y[D] := A[K]$ на $Y[B] := A[K]$. 8. 27; Г. 9. ЛЕНЬ. 10. У второго; БОР, ВОР или иное слово нечетной длины на АР, БО или ВО.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

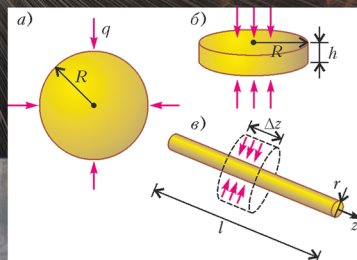
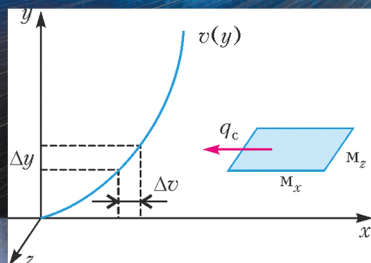
Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в типографии ООО «ТДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: +7 495 363-48-86,
<http://capitalpress.ru>**

Индекс 90964

КАКАЯ КАША ЛУЧШЕ?

ОКАЗЫВАЕТСЯ, ПОЛЕЗНЕЕ ГЕРКУЛЕСОВАЯ КАША, СВАРЕННАЯ ИЗ РАСПЛОШЕННЫХ ЗЕРЕН.



Уроки с физикой

ISSN 0130-2221

19011



9 770130 222191

(Подробнее – на с. 27 внутри журнала)