

ИЮНЬ

ISSN 0130-2221

2020 · № 6

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



НЕСТАНДАРТНЫЕ ТЕТРАМИНО



Перед вами головоломка канадского изобретателя Фредерика Буше (Frederic Boucher). Она состоит из семи деталей, каждая из которых склеена из двух брусочков $2 \times 1 \times 1$. Это один из самых распространенных типов деталей для головоломок «на складывание». Как правило, брусочки склеивают друг с другом по целому числу граней единичных кубиков, получая пространственные тетрамино. Здесь же три из семи тетрамино нестандартные – в них брусочки приклеены так, что остаются половинки граней единичных кубиков.

Все детали нужно упаковать в коробку $4 \times 4 \times 2$. Объем коробки равен 32, а суммарный объем всех деталей равен 28, поэтому может показаться, что лишнего места много и детали легко разместятся в коробке. Как бы не так! Основная сложность заключается в том, как именно совместить внутри этой коробки обычные и нестандартные тетрамино – выступающие «полукубики» очень мешают. Но если понять, как это нужно сделать, то головоломка быстро решится.

Желаем успеха!

Е.Епифанов

В номере:**УЧРЕДИТЕЛИ**

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**А.А.Гайфуллин****РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА****ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР****И.К.Кикоин****ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА****А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Калейдоскопы. *Э.Винберг*
9 Об ovo. *А.Варламов*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 14 Научный вклад мехмата в победу в Великой
Отечественной войне

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи M2606–M2609, Ф2613–Ф2616
18 Решения задач M2594–M2597, Ф2601–Ф2604
25 Бипедальные равновеликости. *И.Кушнир*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 28 Итоги конкурса имени А.П.Савина 2019/20
учебного года

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 30 Электродинамический водомет. *С.Маламанов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 31 Как дятел Спятел добывал опилки. *К.Кохась*

НАМ ПИШУТ

- 34 Еще раз о муравье на цилиндре. *А.Заславский*

ОЛИМПИАДЫ

- 36 XII Международная олимпиада
Romanian Master of Mathematics

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 38 Олимпиада «Ломоносов». Физика

- 41 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (16)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Э.Винберга*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Калейдоскопы

Э.ВИНБЕРГ

В мае 2020 года ушел из жизни выдающийся математик, профессор Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова и Независимого Московского университета Э.Б.Винберг. Эрнест Борисович — автор большого числа книг и учебников для студентов и школьников, многие годы он был главным редактором сборника «Математическое просвещение».

В предисловии к своему замечательному учебнику «Курс алгебры» Э.Б.Винберг пишет: «В соответствии со своим взглядом на математику я стремился заменить выкладки и сложные рассуждения идеями. Кому-то это может показаться трудным, но усилия, потраченные на освоение идей, окупятся возможностью самостоятельно решать задачи, не рассматриваемые в учебнике». Эрнест Борисович придерживался этого принципа на протяжении всех лет занятий математикой и преподавания. Это одна из причин, по которой работы Винберга написаны столь ясно, а лекции и выступления на семинарах так хорошо структурированы и увлекательны.

Предлагаем вашему вниманию статью Э.Б.Винберга, опубликованную в «Соросовском образовательном журнале» (1997, №2).

Калейдоскоп (что в переводе с греческого означает «смотрю красивый вид») — это детская игрушка, в которой разноцветные кусочки стекла, многократно отражаясь в трех зеркалах, создают красивый узор. Зеркала эти расположены как боковые грани правильной треугольной призмы, образуя между собой углы, равные $\pi/3$. Если бы эти углы были другими, то отражения накладывались бы друг на друга и не создавали симметричного узора. Однако имеются исключительные случаи, когда этого не происходит. Все они могут быть легко найдены, что и будет сделано в разделе 2.

Описанный выше обычный калейдоскоп по существу двумерен, так как мы видим в нем плоский узор. Можно представить себе трехмерный калейдоскоп как многогранную камеру с зеркальными стенками. Наблюдатель, помещенный в нее, увидит многократные отражения всех находящихся в ней предметов. Как правило, эти отражения будут перекрываться, но есть несколько случаев (мы их опишем в разделе

4), когда отражения не перекрываются и создают симметричный трехмерный узор.

Если отбросить в сторону возможность практической реализации, то можно говорить и о многомерных калейдоскопах, а также о неевклидовых калейдоскопах, а именно о калейдоскопах на сфере и в пространстве Лобачевского. Калейдоскопы в евклидовом пространстве и на сфере любой размерности были исчерпывающим образом описаны английским математиком Г.С.М.Кокстером в 1934 году. На обложке его переведенной на русский язык популярной книги [1] изображен один из калейдоскопов на обычной (двумерной) сфере (см. рис. 4). Сферические калейдоскопы тесно связаны с правильными многогранниками (см. раздел 3).

Калейдоскопы на плоскости Лобачевского использовались еще в конце прошлого века А.Пуанкаре и Ф.Клейном в их исследованиях по теории автоморфных функций комплексного переменного. В 1958–1960 годах голландский художник М.К.Эшер создал несколько оригинальных картин-узоров на базе этих калейдоскопов (таких, как на рисунке 5).

Калейдоскопы в пространстве Лобачевского стали объектом интенсивных исследований начиная с 1965 года в связи с некоторыми проблемами теории групп. Их полное описание в любой размерности еще далеко от завершения. Имеется удивительный результат (принадлежащий автору статьи) о том, что при $n \geq 30$ в n -мерном пространстве Лобачевского вообще не существует калейдоскопов. Примеры таких калейдоскопов известны лишь при $n \leq 8$.

Помимо уже упоминавшихся приложений калейдоскопов в геометрии (правильные многогранники), теории функций комплексного переменного и теории групп имеются не менее важные их приложения в теории чисел, теории алгебр Ли, алгебраической геометрии и других разделах математики. Следует, впрочем, сказать, что в серьезной математической литературе термин «калейдоскоп» не употребляется. Вместо этого говорят «дискретная группа, порожденная отражениями».

В статье мы не имеем возможности говорить о приложениях калейдоскопов (за исключением связи сферических калейдоскопов с правильными многогранниками). Однако изучение калейдоскопов самих по себе составляет яркую страницу геометрии. Более полные сведения о калейдоскопах можно найти в обзорной статье [2].

1. Основное свойство калейдоскопов

Рассмотрим простейшую ситуацию – два зеркала, расположенные под некоторым углом α одно к другому. Если угол α не является целой частью π , то, как показано на рисунке 1, а, изображения предмета, помещенного между зеркалами, будут перекрываться, так что в одной точке мы будем видеть изображения двух разных

точек. (На самом деле мы сможем увидеть в одной точке изображения двух разных точек не одновременно, а только перемещая точку зрения, но это не имеет отношения к нашему теоретическому обсуждению.) Если же угол α является целой частью π , как, например, на рисунке 1, б, то этого не происходит.

Так как изображения каждой точки не выходят за пределы плоскости, перпендикулярной общей оси наших зеркал (именно такая плоскость и изображена на рисунке 1), то обнаруженное нами явление по существу двумерно. Можно говорить о зеркальном отражении плоских фигур относительно прямых, и рисунок 1 демонстрирует, что изображения, полученные многократными отражениями относительно сторон угла, не перекрываются тогда и только тогда, когда величина α этого угла является целой частью π . Более точно, если $\alpha = \pi/k$, где $k \geq 2$ – натуральное число, то вся плоскость оказывается разбитой на $2k$ равных углов с общей вершиной, в каждом из которых получается одно изображение внутренности исходного угла. В половине из этих углов изображения являются зеркально обращенными, в другой половине, включающей сам исходный угол, – необращенными.

Представим себе теперь выпуклый многоугольник, образованный зеркалами. В каком случае изображения, получаемые многократными отражениями внутренности многоугольника относительно его сторон, не будут перекрываться? Из предыдущего следует, что для этого необходимо, чтобы все углы многоугольника были целыми частями π . Можно показать, что это условие является и достаточным. Если оно выполнено, то вся плоскость оказывается разбитой на многоугольники, равные исходному, таким образом, что любые два многоугольника, имеющие общую сторону, симметричны относительно этой стороны. В каждом из многоугольников этого разбиения получается одно изображение внутренности исходного многоугольника. На рисунке 2 показано разбиение плоскости, получаемое из равностороннего треугольника. Именно это разбиение мы видим, глядя в обычный калейдоскоп.

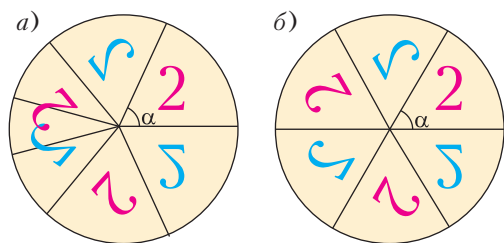


Рис. 1. Система из двух зеркал

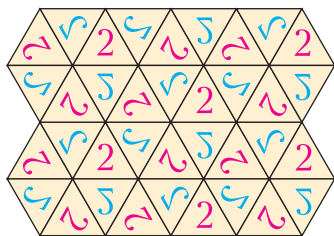


Рис. 2. Обычный калейдоскоп

Точно так же изображения, получаемые многократными отражениями внутренности выпуклого многогранника относительно его граней, не перекрываются тогда и только тогда, когда все двугранные углы многогранника являются целыми частями π . Эта теорема справедлива и для неевклидовых многоугольников и многогранников.

Многоугольник (многогранник), все (двугранные) углы которого являются целыми частями π , называется *многоугольником (многогранником) Кокстера*. Таким образом, описание теоретически возможных калейдоскопов равносильно описанию многоугольников и многогранников Кокстера.

2. Двумерные калейдоскопы

Нетрудно найти все многоугольники Кокстера на евклидовой плоскости. Как известно, сумма углов евклидова n -угольника равна $\pi(n-2)$, так что среднее арифметическое его углов равно $\pi(1-2/n)$, что при $n=4$ составляет $\pi/2$. Но все углы многоугольника Кокстера, как явствует из определения, не больше $\pi/2$. Поэтому единственным четырехугольником Кокстера является прямоугольник, а многоугольников Кокстера с большим числом сторон вообще не существует.

Далее, так как сумма углов треугольника равна π , то для треугольника Кокстера

с углами $\pi/k, \pi/l, \pi/m$ мы получаем диофантово уравнение

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1. \quad (1)$$

С точностью до перестановки чисел k, l, m оно имеет три решения:

$$(3, 3, 3), \quad (2, 4, 4), \quad (2, 3, 6).$$

Таким образом, имеется ровно три треугольника Кокстера: равносторонний, равнобедренный прямоугольный и прямоугольный с острыми углами $\pi/3$ и $\pi/6$. Соответствующие разбиения плоскости изображены на рисунке 3. Вместе с прямоугольником это дает четыре типа двумерных евклидовых калейдоскопов.

Аналогичным образом можно найти все двумерные сферические калейдоскопы. Сумма углов сферического n -угольника больше $\pi/(n-2)$ (простое доказательство этого см., например, в [3]). Поэтому в отношении сферических многоугольников Кокстера наши выводы о числе сторон только усугубляются, а именно, не существует сферических многоугольников Кокстера, отличных от треугольника. Для сферического треугольника Кокстера уравнение (1) заменяется на неравенство

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} > 1, \quad (2)$$

имеющее следующие решения:

$$(2, 2, m), \quad (2, 3, 3), \quad (2, 3, 4), \quad (2, 3, 5).$$

Первому из этих решений отвечает разбиение сферы на $4m$ «бипрямоугольных» треугольников, осуществляемое экватором и $2m$ равноотстоящими друг от друга меридианами. Решению $(2, 3, 5)$ отвечает разбиение, изображенное на рисунке 4. В разделе 3 мы еще вернемся к сферическим калейдоскопам в связи с правильными

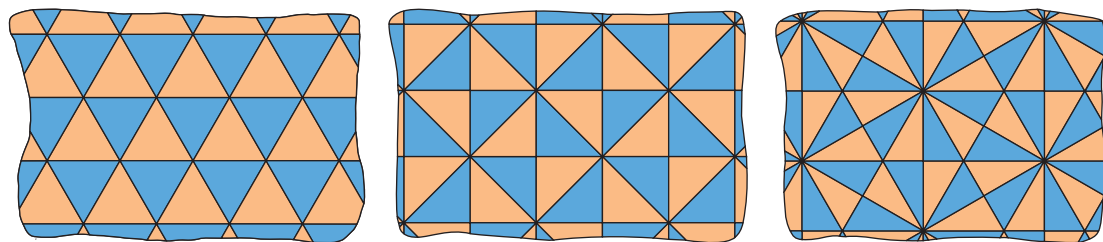


Рис. 3. Двумерные евклидовы калейдоскопы

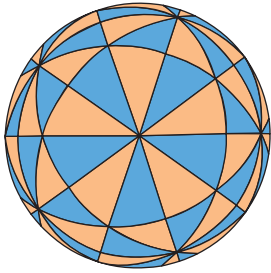


Рис. 4. Сферический калейдоскоп

ми многогранниками.

Что касается калейдоскопов на плоскости Лобачевского, то их гораздо больше. Все, что не может быть реализовано на евклидовой плоскости или сфере, реализуется

на плоскости Лобачевского. А именно: сумма углов n -угольника на плоскости Лобачевского меньше $\pi/(n-2)$, и для любых натуральных чисел $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 2$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} < n - 2,$$

на плоскости Лобачевского имеется многоугольник Кокстера с углами $\pi/k_1, \pi/k_2, \dots, \pi/k_n$.

Предыдущее неравенство автоматически выполняется при $n > 4$, а также при $n = 4$, если только $(k_1, k_2, k_3, k_4) \neq (2, 2, 2, 2)$. При $n = 3$ мы получаем следующее неравенство для треугольника Кокстера с углами $\pi/k, \pi/l, \pi/m$:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1. \quad (3)$$

Его решениями являются все тройки (k, l, m) , кроме перечисленных выше решений уравнения (1) и неравенства (2).

Например, на плоскости Лобачевского имеется треугольный калейдоскоп с углами $\pi/2, \pi/4, \pi/6$. Соответствующее разбиение изображено на рисунке 5, а. При этом

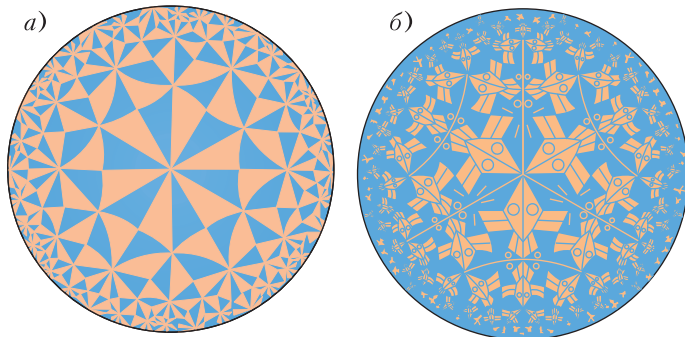


Рис. 5. Калейдоскоп на плоскости Лобачевского

использована модель Пуанкаре, в которой плоскость Лобачевского изображается в виде открытого круга, ее прямые – в виде диаметров круга, а углы совпадают с евклидовыми. При приближении к границе круга евклидовы размеры треугольников разбиения стремятся к нулю, но их размеры в смысле геометрии Лобачевского, естественно, остаются постоянными. Рисунок 5, б представляет картину-узор Эшера, основанный на этом разбиении.

3. Сферические калейдоскопы и правильные многогранники

С каждым правильным многогранником можно связать сферический калейдоскоп. Пусть M – правильный многогранник с центром в точке O . Пусть A – центр какой-либо его грани, B – середина какой-либо стороны этой грани и C – какая-либо из двух вершин, принадлежащих этой стороне. Трехгранный конус K с вершиной в точке O , ребра которого проходят через точки A, B, C соответственно, назовем *фундаментальным конусом* многогранника M (на рисунке 6 в качестве M взят куб).

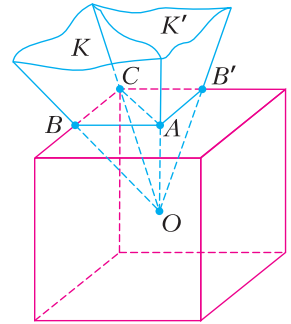


Рис. 6. Фундаментальный конус куба

За счет различного выбора грани, ее стороны и вершины, принадлежащей этой стороне, можно построить много разных фундаментальных конусов данного многогранника. Они не перекрываются и в совокупности покрывают все пространство. Их число N может быть подсчитано по любой из следующих формул:

$$N = 2p\Gamma = 4P = 2qV, \quad (4)$$

где приняты следующие обозначения: Γ – число граней многогранника M , P – число его

ребер, V – число его вершин, p – число сторон (каждой) грани, q – число ребер, выходящих из (каждой) вершины. Так, в случае куба

$$\Gamma = 6, P = 12, V = 8, p = 4, \\ q = 3, N = 48.$$

Плоскость любой грани фундаментального конуса является плоскостью симметрии многогранника M , и любые два фундаментальных конуса, имеющие общую грань, симметричны относительно плоскости этой грани. Например, в случае куба плоскость OAC есть плоскость симметрии, проходящая через два противоположных ребра; конус K' , симметричный конусу K относительно этой плоскости, есть фундаментальный конус, ребра которого проходят через точки A, C, B' (см. рис.6).

Ребро OA конуса K является общим ребром $2p$ фундаментальных конусов, имеющих при этом ребре один и тот же двугранный угол. Следовательно, двугранный угол конуса K при ребре OA равен π/p . Аналогично устанавливается, что двугранный угол при ребре OB равен $\pi/2$, а при ребре OC равен π/q . Отсюда мы заключаем, что пересечение любого фундаментального конуса со сферой, концентрической многограннику M , есть прямоугольный сферический треугольник с острыми углами π/p и π/q . Любые два из этих треугольников, имеющие общую сторону, симметричны относительно нее. Тем самым мы получили сферический калейдоскоп.

При переходе от правильного многогранника к сферическому калейдоскопу теряется информация о том, какое из ребер OA и OC фундаментального конуса проходило через центр грани, а какое – через вершину многогранника M . Если мы рассмотрим правильный многогранник M' , вершинами которого служат центры граней многогранника M , то ему будет соответствовать тот же сферический калейдоскоп. Такие правильные многогранники M и M' называют двойственными друг другу. Так, например, куб двойствен октаэдру. Тетраэдр двойствен сам себе (точнее, правильному многограннику, который также является тетраэдром). При переходе от

M к M' числа p и q , а также Γ и V меняются ролями.

Каждому из сферических калейдоскопов, определяемых решениями

$$(2, 3, 3), \quad (2, 3, 4), \quad (2, 3, 5)$$

неравенства (2), отвечает пара двойственных правильных многогранников. Эти пары суть {тетраэдр, тетраэдр}, {куб, октаэдр}, {додекаэдр, икосаэдр} соответственно. Решению $(2, 2, m)$ не отвечает никакой правильный многогранник, так как по смыслу должно быть $p, q \geq 3$.

Известно, что площадь сферического треугольника¹ равна его угловому избытку, т.е. сумме его углов минус π . В частности, площадь прямоугольного сферического треугольника с острыми углами π/p и π/q равна $(1/p + 1/q - 1/2)\pi$. Так как площадь всей сферы равна 4π , то отсюда получается еще одна формула для числа N (ср.(4)):

$$N = \frac{4}{1/p + 1/q + 1/2}. \quad (5)$$

Аналогичная связь существует между n -мерными правильными многогранниками и калейдоскопами на $(n-1)$ -мерной сфере. Интересно, что, в то время как в трехмерном пространстве существует пять правильных многогранников, в четырехмерном пространстве их шесть, а в n -мерном при $n > 4$ всего три (аналоги тетраэдра, куба и октаэдра).

4. Трехмерные калейдоскопы

Нахождение многогранников Кокстера затрудняется тем, что соотношения между двугранными углами многогранника не столь просты, как соотношение между углами многоугольника. При пересечении выпуклого многогранника M с маленькой сферой с центром в какой-либо его вершине C образуется выпуклый сферический многоугольник, углы которого равны двугранным углам многогранника M при соответствующих ребрах. Поэтому если, скажем, из вершины C выходит q ребер, то сумма двугранных углов при этих ребрах

¹ На сфере единичного радиуса. (Прим. ред.)

больше $\pi(q-2)$. Отсюда следует, что если все двугранные углы многогранника M не превосходят $\pi/2$ (например, если он является многогранником Кокстера), то из каждой его вершины выходят только три ребра. Многогранники, обладающие этим последним свойством, называются *простыми*. Так, тетраэдр и куб являются простыми многогранниками, а октаэдр – нет.

Этими простыми неравенствами, однако, не исчерпываются соотношения между двугранными углами выпуклого многогранника. Рассмотрим простейший случай, когда M – треугольная пирамида. Занумеруем как-либо ее грани и обозначим через $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ угол между i -й и j -й гранями. Средствами линейной алгебры легко доказывается, что двугранные углы евклидовой треугольной пирамиды связаны соотношением

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \alpha_{12} & -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{14} \\ -\cos \alpha_{12} & 1 & -\cos \alpha_{23} & -\cos \alpha_{24} \\ -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{23} & 1 & -\cos \alpha_{34} \\ -\cos \alpha_{14} & -\cos \alpha_{24} & -\cos \alpha_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Определитель, стоящий в левой части, есть определитель Грама единичных нормальных векторов к граням пирамиды. Его равенство нулю вытекает из линейной зависимости этих векторов.²

Заметим, что точно так же доказывается, что углы α , β , γ евклидова треугольника связаны соотношением

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \alpha & -\cos \beta \\ -\cos \alpha & 1 & -\cos \gamma \\ -\cos \beta & -\cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

однако это соотношение при условии, что сумма любых двух из углов α , β , γ меньше π , оказывается равносильным тому, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. (Попробуйте это доказать!) Что касается соотношения (6), то оно, к

сожалению, не приводится к такому простому виду.

Соотношение (6) вместе с выведенными перед этим неравенствами является необходимым и достаточным условием для того, чтобы в евклидовом пространстве существовала треугольная пирамида с двугранными углами α_{ij} . Пользуясь этим, можно найти все евклидовы треугольные пирамиды, двугранные углы которых являются целыми частями π . Их оказывается три. Они изображены на рисунке 7, где

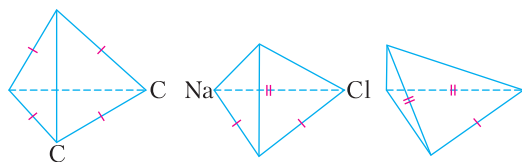


Рис. 7. Евклидовы треугольные пирамиды Кокстера

принято следующее соглашение: двугранные углы при непомеченных ребрах равны $\pi/2$, а при ребрах, перечеркнутых одной или двумя чертами, $\pi/3$ или $\pi/4$ соответственно. Нетрудно заметить, что первая из пирамид, изображенных на рисунке 7, плоскостью симметрии разрезается на две пирамиды, подобные второй, и так же третья пирамида получается из второй.

Кроме этих трех калейдоскопов в трехмерном евклидовом пространстве имеется еще только четыре калейдоскопа, которые в определенном смысле сводятся к двумерным. Это прямые призмы, в основании которых лежит двумерный калейдоскоп.

Трехмерные евклидовы калейдоскопы имеют непосредственное отношение к кристаллографии. Некоторые кристаллические решетки могут быть получены, если поместить определенным образом в такой калейдоскоп несколько атомов и рассмотреть все их изображения, получаемые многократными отражениями относительно стенок калейдоскопа. Так, кристаллическая решетка алмаза получается с помощью первого из калейдоскопов, изображенных на рисунке 7, если поместить в двух его вершинах, указанных на рисунке, атомы углерода С, а кристаллическая решетка поваренной соли получается с помощью второго калейдоскопа, если помес-

² Матрица Грама семейства векторов образована их попарными скалярными произведениями. Если векторы линейно зависимы, то определитель матрицы Грама равен нулю. Подробнее о матрицах и определителях см., например, в учебнике Э.Б.Винберга «Курс алгебры» (М.: Факториал Пресс, 2001). (Прим. ред.)

тить в указанных на рисунке вершинах атомы натрия Na и хлора Cl.

Нетрудно также найти все калейдоскопы на трехмерной сфере. Все они представляют собой (сферические) треугольные пирамиды. Знак равенства в (6) заменяется в этом случае знаком «больше», подобно тому как при переходе от евклидовой плоскости к сфере сумма углов треугольника становится больше π .

5. Теорема Андреева

В пространстве Лобачевского знак равенства в (6) заменяется на знак «меньше». Нетрудно найти все многогранники Кокстера в пространстве Лобачевского, являющиеся треугольными пирамидами. Однако в этом случае они составляют лишь ничтожную часть всех многогранников Кокстера. Подобно тому как на плоскости Лобачевского существуют многоугольники Кокстера со сколь угодно большим (на самом деле любым) числом сторон, в пространстве Лобачевского существуют многогранники Кокстера со сколь угодно большим числом граней. Но в отличие от многоугольников они могут иметь весьма сложное комбинаторное строение. Поэтому получить их полное описание непросто.

В той степени, в какой это вообще представляется возможным, это было сделано Е.М.Андреевым в 1970 году. Он доказал общую теорему, относящуюся не только к многогранникам Кокстера, но и ко всем выпуклым многогранникам, двугранные углы которых не превосходят $\pi/2$. Такие многогранники называются *остроугольными* (хотя они могут иметь и прямые двугранные углы). Как мы доказали в разделе 4 (доказательство не изменяется в случае пространства Лобачевского), всякий остроугольный многогранник является простым.

Теорема Андреева дает необходимые и достаточные условия существования в пространстве Лобачевского остроугольного многогранника заданного комбинаторного строения, отличного от треугольной пирамиды, с заданными двугранными углами. Эти условия суть следующие:

1) если какие-либо три грани сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними больше π (необходимость этого условия была доказана в разделе 4);

2) если какие-либо три грани попарно смежны, но не сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними меньше π ;

3) если какие-либо четыре грани смежны «по кругу» (как боковые грани четырехугольной призмы), то не все углы между ними равны $\pi/2$;

4) если многогранник является треугольной призмой, то не все углы, образуемые основаниями с боковыми гранями, равны $\pi/2$.

Теорема Андреева в некотором смысле аналогична знаменитой теореме А.Д.Александрова о существовании евклидова многогранника с данной разверткой. Однако ее точного аналога в евклидовой геометрии нет (и не может быть). Это одна из специфических теорем геометрии Лобачевского, подобно признаку равенства треугольников по трем углам.

С помощью теоремы Андреева нетрудно, например, доказать существование в пространстве Лобачевского «прямоугольных» многогранников (т.е. многогранников, все двугранные углы которых прямые) со сколь угодно большим числом граней. (Читатель вполне может сделать это самостоятельно.) Тем самым получим много разнообразных прямоугольных калейдоскопов в пространстве Лобачевского. Не имея возможности обсуждать это подробнее, заметим только, что начиная с конца прошлого века калейдоскопы в пространстве Лобачевского применялись к арифметике квадратных форм, а в последние 15 лет они получили применение в трехмерной топологии.

Литература

1. Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.
2. Э.Б.Винберг, О.В.Шварцман. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНТИ, 1988, т. 29.
3. Э.Б.Винберг. О неевклидовой геометрии // Соросовский образовательный журнал, 1996, № 3.

Главное в том, что, как бы осторожно мы ни старались вбить яйцо в чашку, мы не можем изменить законов физики. Яйцо может не растечься, а у умелого кулинара никогда не растечется, но оно неизбежно будет падать по вертикали с ускорением силы тяжести.

В.Похлебкин. Тайны хорошей кухни

В ПЕРЕВОДЕ С ЛАТЫНИ «AB OVO» буквально означает «от яйца». В переносном же смысле это выражение употребляют, когда хотят указать на изначальность, первичность чего-либо. Именно этот переносный смысл и вкладывали древние как основной в слова «ab ovo». Сами того не ведая, они тем самым разрешили в пользу яйца существующий с незапамятных времен софизм: что появилось раньше – курица или яйцо? Мы этот вопрос оставим в стороне, а займемся некоторыми физическими явлениями, избрав в качестве предмета исследования... куриное яйцо.

Кто не помнит роковой причины раздора между Лилипутией и империей Блефуску, описанного в «Путешествиях Гулливера»? Ею стал указ императора Лилипутии, предписывающий всем подданным под страхом смертной казни разбивать яйца с острого конца. Гулливер полагал, что выбор конца, с которого следует разбивать яйцо, – дело хозяйское. С какого хочешь – с такого и разбивай. Мы полностью согласны с такой позицией, но все-таки зададимся вопросом: с какого конца яйцо *легче* разбить? Решение этой задачи поможет, например, выбрать правильную тактику при «сражениях на вареных яйцах», которые раньше часто возникали среди детей за пасхальным столом.

Как правильно поступать: нападать на противника или ждать нападения самому;

выбрать большое яйцо или маленькое; держать его острым или тупым концом к противнику? Вот основные вопросы тактики и стратегии в таком сражении. Бытует мнение, что выигрывает нападающий. Однако при равномерном движении яйца безразлично нападать самому или ждать нападения противника. Чтобы убедиться в этом, не надо бить яйца: достаточно вспомнить принцип относительности Галилея и «перейти» в систему отсчета, в которой нападающий покоится. В ней он из «агрессора» автоматически превращается в «пострадавшую сторону».

Рассмотрим теперь сам процесс столкновения двух яиц. Мы будем считать, что яйца совершенно одинаковые и по размерам и по форме и что скорлупа у них «рассчитана» на одну и ту же предельную нагрузку. Сталкиваются яйца вдоль оси вращения, одно острым концом, другое тупым (рис.1). Предположим, что область

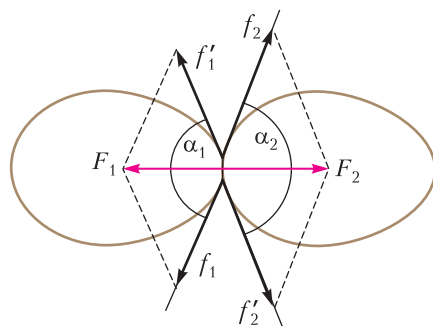


Рис. 1. Упругая фаза соударения двух яиц

соприкосновения яиц – это небольшой круг радиусом r . Не важно, будет ли граница плоской или выгнутой в какую-либо сторону. Существенно, что согласно третьему закону Ньютона силы, действующие в процессе столкновения со стороны одного яйца на другое, равны по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны. При передаче этой силы

от области соприкосновения всему яйцу задействованы в первую очередь силы упругости скорлупы (вклад жидких белка и желтка здесь можно предположить независимым от формы конца яйца, участвующего в соударении). Можно считать, что они направлены по касательным вдоль скорлупы. На левое яйцо со стороны правого действуют силы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_1'$, дающие в сумме силу $\vec{F}_1$, действующую на скорлупу (кроме зоны контакта) и ее содержимое. Противоположные силы упругости $-\vec{f}_1$ и $-\vec{f}_1'$ в сумме дают силу, компенсирующую силу воздействия правого яйца на зону контакта. Аналогично, для правого яйца мы нарисуем ту же картину с силами $\vec{f}_2$, $\vec{f}_2'$ и их суммой $\vec{F}_2$. Третий закон Ньютона даст нам соотношение

$$F_1 = F_2, \text{ или } 2f_1 \cos \frac{\alpha_1}{2} = 2f_2 \cos \frac{\alpha_2}{2}.$$

Но углы α_1 и α_2 будут различаться, так как при той же величине r будут отличаться радиусы кривизны широкого и узкого концов яйца. Ясно, что $\alpha_1 < \alpha_2$, и мы получим $f_1 < f_2$. Так что, как видно, действительно выгоднее сражаться, держа яйцо острым концом к противнику. А в настоящем бою острая шпага или стилет может проткнуть доспехи или щит. Щит же никогда не проткнет шпагу, максимум сломает ее.

Имеется и еще один довод в пользу такой стратегии: внутри яйца у тупого конца расположен «воздушный мешок», и из-за этого тупой конец оказывается дополнительно ослабленным (попробуйте объяснить этот факт).

Обратим внимание читателя на то, что приведенный анализ сил указывает путь к победе с помощью маленькой хитрости. Не нарушая принципа относительности Галилея, нападающий имеет дополнительный шанс на победу, даже если его противник опытен и сражается острым концом: воспользовавшись своей активной позицией, нападающий может ударить противника не в острие, а чуть сбоку, где кривизна меньше, и яйцо расколется легче.

...В магазинах иногда можно встретить забавную игрушку «волчок» – изготовленный из дерева или пластмассы усеченный



Рис. 2. Волчок Томсона

шарик с хвостиком (рис. 2). Раскрутив его за этот хвостик, можно наблюдать необычное явление: в некоторый момент волчок переворачивается и становится «вверх ногами» – на свой хвостик. Очевидно, что потенциальная энергия волчка в поле тяжести при этом возрастает! Объяснение такому странному поведению много лет назад дал известный английский физик Уильям Томсон, с тех пор такой волчок называется волчком Томсона.

Оказывается, вареное яйцо может вести себя так же, как волчок Томсона. Возьмем гладкую кафельную плитку и быстро раскрутим на ней сваренное вкрутую яйцо. После двух-трех оборотов яйцо встанет на свой острый конец и будет вращаться вокруг своей продольной оси! И только лишь после значительного замедления вращения яйцо, под влиянием сил тяжести и трения, начнет все больше и больше раскачиваться из стороны в сторону, пока его боковая сторона не коснется подставки. Этот опыт удается только в том случае, если яйцо хорошо «проварено», сырое яйцо так вращаться не будет. Дело в том, что вязкое трение между слоями жидкости в яйце и между белком и скорлупой существенно тормозит вращение, поэтому раскрутить сырое яйцо до нужной угловой скорости не удастся. Благодаря такому различию в поведении вареного и сырого яиц их всегда можно различить не разбивая. Для этого испытываемое яйцо достаточ-

но раскрутить на столе. Сырое яйцо, совершив несколько оборотов, остановится, а вареное будет еще долго вращаться.

...В предыдущих опытах нам понадобилось вареное яйцо. А что с ним происходит в процессе термической обработки? И как правильно его сварить, чтобы оно не треснуло и не взорвалось, не стало «крутым», а получилось «вмятку»? Почему опытная хозяйка варит яйцо в соленой воде? На эти и другие кулинарные вопросы нелегко найти ответы даже в толстой поваренной книге.

По своей сути, процесс варки яйца, как и многие другие способы тепловой обработки пищи (например, жарка, запекание и т.д.), основан на процессе денатурации протеинов (белков). При высокой температуре эти сложные органические молекулы изменяют свою форму и пространственную структуру. Денатурация может быть вызвана многими факторами, включая воздействие химических веществ, ферментов и т.д. В отличие от физики неорганической материи, где при фиксированном давлении известно точное значение температуры фазовых переходов (например, плавления или кипения), со столь сложными органическими соединениями, как белки, все не так просто. Тем не менее о состоянии белка можно судить, например, изучая степень его прозрачности. Выбирая скорость потока тепла, более или менее соответствующую условиям варки яйца, можно определить, что максимальная температура денатурации его белка приблизительно равна 68 °С. Что же касается желтка, то его денатурация происходит при более низких температурах – 63–65 °С. Более точно говорить о температуре такого перехода не имеет смысла, так как денатурация протеинов происходит не резко, а постепенно. Кроме того, эта величина зависит от таких факторов, как содержание соли, возраста яйца и т.д.

Так как же объяснить возможность приготовления яйца всмятку, с относительно твердым белком и жидким желтком, которые многие едят на завтрак? Почему менее температурно-устойчивый желток в приготовленном всмятку яйце остается жид-

ким, в то время как денатурирующий при несколько более высокой температуре белок затвердевает?

С физической точки зрения, при попадании холодного яйца в кипящую воду от его поверхности к центру начинается свое движение температурный фронт. Проблема распространения тепла в среде хорошо изучена математической физикой. Мы же ограничимся утверждением, что температурный фронт проникает внутрь яйца в зависимости от времени по так называемому корневому закону

$$L(t) = \sqrt{\frac{\pi \kappa}{c \rho}} t,$$

где $L(t)$ – расстояние от поверхности, на котором за прошедшее время t температура уже приблизилась к температуре окружающей кипящей воды, $\kappa = 0,56 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ – теплопроводность, $c = 3,14 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ – удельная теплоемкость, $\rho = 1040 \text{ кг}/\text{м}^3$ – плотность белка. Подставляя приведенные численные значения, находим, что за время варки яйца, скажем, 5 минут температура поднимется до величины, сравнимой со 100 °С, в слое порядка 1,25 см от скорлупы. Это и объясняет денатурацию находящегося около нее белка. А до центра яйца высокая температура дойти не успевает, вот желток и остается жидким.

Отметим, что незначительное, на первый взгляд, различие в температурах денатурации белка и желтка позволяет японцам готовить необычное для европейцев блюдо под названием «Онсэн Тамаго». Это куриное яйцо, варенное при температуре 65 °С на протяжении длительного времени (около часа). В результате возникает блюдо, прямо противоположное яйцу всмятку: желток в нем оказывается твердым, а яичный белок остается жидким, хотя и помутневшим. Такой разительный контраст в конечной форме одного и того же продукта при, казалось бы, одном и том же виде температурной обработки обусловлен различием в температурных режимах приготовления: если яйцо всмятку готовится при высокой температуре за короткое время, то «Онсэн Тамаго» готовится при

температуре относительно низкой и долго. Любопытно, что рецепт «Онсэн Тамаго» используется на термальных курортах Японии. Посетители, прежде чем отправится в термы, кладут сырые яйца в специальный бассейн с температурой 65 °С, а по возвращению вынимают готовое блюдо.

Расчет времени варки яйца всмятку в приближении яйца эллипсоидом был проделан английским физиком Питером Берхэмом. В своей книге «Наука кулинарии» он приводит формулу, связывающую время варения яйца t (мин) в воде температуры T_k с его малым диаметром d (см) (рис.3), начальной температурой яйца T_0 и желаемой конечной температурой желтка T_ϕ :

$$t = 0,15d^2 \ln \left(2 \frac{T_k - T_0}{T_k - T_\phi} \right).$$

Для нормального яйца с $d = 4$ см, только что взятого из холодильника ($T_0 = 5$ °С) и помещенного в кипящую при нормальных условиях воду ($T_k = 100$ °С), которое мы хотим сварить «всмятку» ($T_\phi = 63$ °С), время варки составит $t_1 = 3$ мин 54 с. Для крупного же яйца с $d = 6$ см это время более чем удваивается: $t_2 = 8$ мин 48 с.

Из формулы Берхэма видна также и необходимость пересмотра времен приготовления блюд высоко в горах. Действительно, температура кипения воды существенно меняется, а именно уменьшается, с высотой над уровнем моря, так что времена варки продуктов удлиняются по

сравнению с соответствующими величинами, установленными на уровне моря и внесенными в кулинарные наставления. Так, приготовление яйца всмятку на высоте 5000 м, где вода кипит при 80 °С, уже займет не 4 минуты, а 5,5 минут.

При варке яйца в пресной воде оно лежит на дне (его плотность больше плотности воды). При кипении у дна кастрюли возникают вихревые потоки воды, которые увлекают яйцо и могут привести к раскалыванию скорлупы при ударах о стенки или дно. При этом белок выливается через образовавшуюся трещину в окружающую воду и затвердевает хлопьями. Блюдо испорчено! Однако достаточно немного подсолить воду – и такого, как правило, не случается. В свете вышесказанного понятно, что соль способствует более быстрому сворачиванию и трещина просто «зарастает» свернувшимся белком.

...Итак, яйцо сварилось. Выньте его ложкой из кипятка и быстро, пока яйцо еще влажное, возьмите в руки. Хотя яйцо горячее, удержать его в руках можно. Однако по мере его высыхания это делать становится все труднее и труднее. Вскоре яйцо станет сухим, и тогда его в руках уже не удержать – очень горячо! С чем связано это явление?

Ответив на предыдущий вопрос, попытайтесь яйцо очистить. Вы увидите, что скорлупа накрепко прилипла и вырывается только с кусками белка. Этого можно было бы избежать, если бы вы сразу опустили сваренное яйцо в холодную воду: у белка и скорлупы различные коэффициенты объемного расширения, и при резком охлаждении белок сжимается сильнее, чем скорлупа, и сам от нее «отлипает». Яйцо легко чистится.

...Пока мы видели, как проявляются в свойствах яйца законы механики, гидродинамики и молекулярной физики. А какие электрические явления можно наблюдать с его помощью?

Одно из них – взрыв яйца в микроволновой печи благодаря быстрому разогреву его внутренности при протекании индукционных токов. Есть и другие, более безо-

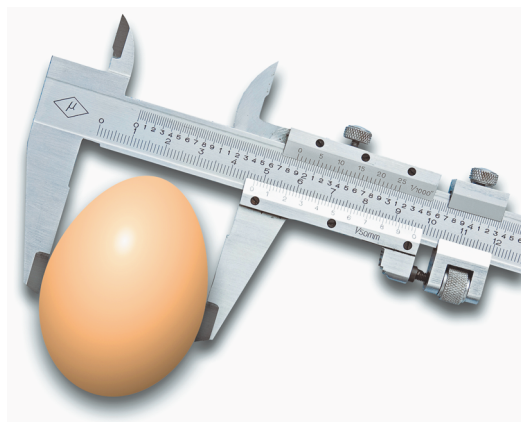


Рис. 3. Измерение малого диаметра яйца

бидные электрические свойства. Яйцо – диэлектрик. Именно это свойство яичной скорлупы и использовал Майкл Фарадей для демонстрации явления электризации.

Возьмите сырое яйцо и сделайте иглой в нем две дырочки – одну побольше, другую поменьше. Дух в меньшую из них, вы можете выдуть все содержимое яйца и у вас в руках останется пустая целая скорлупа. Поднесите теперь к ней наэлектризованную эбонитовую палочку или обыкновенную пластмассовую расческу, которой вы только что причесались. Теперь, куда бы вы ни перемещали палочку или расческу, скорлупа, как собачонка на привязи, неотступно будет следовать за ними.

С помощью пустой яичной скорлупы можно сконструировать модель реактивного автомобиля. Для этого достаточно заклеить большую дырку жевательной резинкой, заполнить скорлупу водой и установить ее на легчайшей тележке со свободно вращающимися колесиками (рис.4). Под яйцом следует положить ку-

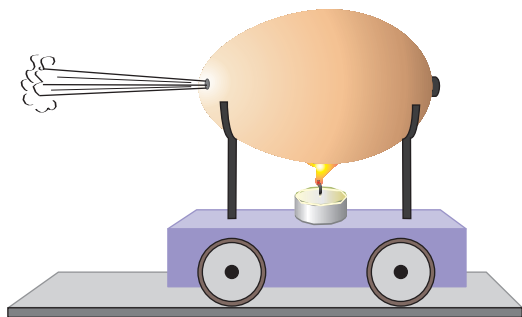


Рис. 4. Реактивный движитель

сочек сухого спирта и поджечь его. Вода вскоре закипит, и вырывающиеся из малого отверстия пары, благодаря принципу реактивного движения, начнут разгонять тележку.

...Мы уже рассказали, как отличить, не разбивая, вареное яйцо от сырого. А можно ли, не разбивая яйцо, узнать – свежее оно или нет? Оказывается, можно. Для этого достаточно опустить сырое яйцо в стакан с водой (рис.5). Свежее яйцо, которое было снесено всего несколько дней

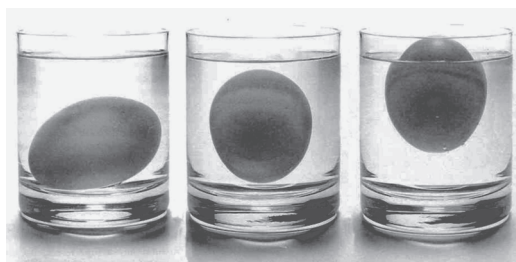


Рис. 5. Чем старше яйцо, тем лучше оно плавает

назад, опускается на дно стакана. Яйцо, которое было снесено неделю назад, плавает в воде в вертикальном положении. Яйцо, которое было снесено по меньшей мере три недели назад, сразу же всплывет, часть его будет выступать из воды. Дело в том, что по мере старения яйца в нем происходят процессы разложения белка и желтка. Эти процессы сопровождаются выделением сероводорода, который частично улетучивается из яйца через мельчайшие поры в скорлупе, частично заполняет имеющуюся в яйце воздушную полость. Поэтому плотность яйца уменьшается.

Но ведь не придешь же в магазин с кастрюлей воды, чтобы проверять свежие яйца или нет?! Можно поступить проще: посмотреть яйцо «на просвет»: если оно просвечивает – значит, свежее, если оно темное – значит, несвежее. Сероводород, выделяющийся в испорченном яйце, уменьшает его прозрачность. В прежние времена в магазинах даже стояли специальные аппараты – овоскопы, в которых имелись ячейки для размещения проверяемых яиц и включалась лампочка, позволявшая увидеть все испытываемые яйца на просвет.

...В заключение попробуйте сделать следующий опыт-фокус. Возьмите две рюмки-подставки для яиц и придвиньте их вплотную друг к другу. В одну из них поставьте сваренное вкрутую яйцо. Сильно подуйте в зазор между яйцом и стенкой рюмки. Яйцо выпрыгнет из рюмки и перепрыгнет в соседнюю. Если фокус получится, постарайтесь его объяснить.

Научный вклад мехмата в победу в Великой Отечественной войне

Предлагаемая читателям статья была написана в 1975 году для стенгазеты мехмата МГУ. Страна с размахом отмечала 30-летие Победы в Великой Отечественной войне, и на мехмате были собраны материалы о вкладе в достижение Победы ученых факультета — математиков и механиков.

Многие ветераны в то время были еще живы, и автор статьи, профессор Виктор Степанович Ленский, мог беседовать с героями очерка. Виктор Степанович — участник Великой Отечественной войны, среди его военных наград есть и медаль «За взятие Кенигсберга». Он рассказывал про свой кавалерийский корпус, который в Пруссии весной 1945 года иногда отрывался даже от танковых частей, поскольку не нуждался в горючем, которое надо еще подвозить, а под копытами коней уже зеленела трава...

Ряд имен в статье хорошо известен нашим читателям и не нуждается в представлении, но сведения обо всех упоминаемых ученых можно найти на сайте <http://letopis.msu.ru/content/mehaniko-matematicheskij-fakultet-professora-i-prepodavatelyi>. Мы же отметим в заключение только одну поразительную деталь: все ученые нашли применение знаний по своей научной специализации, диапазон — от геометрии и теории чисел до теории пластичности.

ЗАДАЧИ УКРЕПЛЕНИЯ МОГУЩЕСТВА нашей Родины, ее индустриальной мощи, оборонного потенциала всегда стояли в центре внимания коллектива механико-математического факультета. Ряд научных исследований в предвоенные годы был непосредственно связан с народнохозяйственными проблемами, важное место принадлежало и научным разработкам, нацеленным на совершенствование военной техники и боевого мастерства Советской армии. В ответ на развязывание гитлеровской Германией войны против Советского Союза ученые мехмата все свои силы и помыслы направляли на помощь фронту и тылу, на достижение победы над врагом. Это был воистину героический труд. Говоря о научном вкладе мехмата в победу, важно отметить два обстоятельства. Во-первых, решение некоторых проблем учеными механико-

математического факультета оказало существенное влияние на развитие военной техники, на боевое мастерство разных родов войск, на снабжение армии боеприпасами. И эта значимость была отмечена многими правительственными наградами и государственными премиями. Во-вторых, в ряде случаев разработка этих специфических тем привела к созданию новых научных направлений принципиального характера, а результаты исследований сохранили свою значимость для армии и флота до наших дней.

Одна из важнейших и извечных проблем армии — повышение меткости стрельбы и бомбометания, преодоление барьера, создаваемого невозможностью совершенно прицельного метания пули, снаряда, бомбы, торпеды и неточностью знания положения цели в момент метания. Теория стрельбы по своей сути относится к

вероятностным проблемам. До войны академиком А.Н. Колмогоровым и под его руководством было определено наивыгоднейшее рассеяние снарядов и созданы таблицы артиллерийской стрельбы, которые являются основой для ведения огня и обучения офицеров-артиллеристов.

В начале войны очень острой стала проблема повышения эффективности стрельбы зенитных орудий. В качестве параметров, осложняющих решение этой задачи, можно назвать высокую маневренность цели, затрудняющую определение ее положения, особенно в ночных условиях, различие конфигураций самолетов, неточность в знании конуса разлета осколков снаряда и другие. Строгое решение этой задачи теории вероятностей приводит к сложным математическим выкладкам и к необходимости использования быстродействующей вычислительной техники, которая в то время отсутствовала. На основании ряда упрощающих предположений А.Н. Колмогоров предложил эффективную схему расчетов, доступную для использования в реальных условиях ведения боя. На базе этой теории, которой и в наши дни обучаются в военных академиях, были созданы таблицы зенитных стрельб. Расчеты были проведены в 1942-43 годах небольшой группой сотрудников, аспирантов и студентов, собранной и организованной А.Н. Колмогоровым в Москве. Им же в 1942 году были проведены расчеты траекторий авиационных бомб и созданы таблицы бомбометания с малых высот при малых скоростях самолета применительно к ночным бомбардировщикам типа У-2. Эти маленькие самолеты учебного типа, базировавшиеся на прифронтовых аэродромах, оказались грозным оружием подавления живой силы противника.

Очень актуальная работа по наиболее выгодному размещению зенитных батарей в зоне обороны Москвы была проведена профессором Н.А. Глаголевым.

Фундаментальный цикл работ был посвящен теории гироскопической навигации, созданию автопилотов (Б.В. Булгаков), совершенствованию и повышению

точности морских гироскопических приборов и приборов управления артиллерийским огнем на кораблях ВМФ (А.Ю. Ишлинский, Я.Н. Ройтенберг), созданию приборов управления огня и артиллерии (С.В. Бахвалов). Н.Г. Четаевым разрабатывалась общая теория устойчивости движения тел, в частности исследована устойчивость поступательно-вращательного движения снаряда и дано определение наивыгоднейшей крутизны нарезки ствола орудия. Им изучена также устойчивость движения самолета по взлетно-посадочной полосе. Применительно к полету ракет Н.Д. Моисеевым предложена и разработана техническая теория устойчивости движения. Важно отметить, что работы этого цикла заложили надежный фундамент теории управляемых движений, которая в последующем сыграла важную роль в космонавтике.

В первые годы войны возникла очень серьезная проблема прочности артиллерийских снарядов. По существовавшим в то время нормам, корпуса снарядов изготавливались из легированной стали, со сложной технологией термообработки, снижающей до минимума пластические деформации снаряда. В то же время эвакуированная на восток промышленность не могла обеспечить поставку нужного количества стали и изготовление снарядов. На фронте чувствовался голод в снарядах. По заданию Артиллерийского комитета А.А. Ильюшин с сотрудниками (С.М. Попов и другие) провел обширное исследование и доказал, что пластические деформации корпуса снаряда не только допустимы, но и полезны. Это позволило после опытных артиллерийских стрельб, подтвердивших выводы ученого, перейти на массовое изготовление корпусов снарядов из простых сталей без термообработки и сталистого чугуна, что резко улучшило снабжение фронта снарядами. Были тщательно исследованы все стадии совместной работы снаряда и ствола, включая процесс врезания ведущего пояса. Методы расчета снарядов на прочность и некоторые расчетные формулы вошли в технологические нормы и в преподавание в военных

академиях. В ходе этих исследований сформулировалось мощное направление теории пластичности с многочисленными приложениями к различным отраслям промышленности и техники, которое заняло ведущее положение в современной механике. Важно также отметить, что в те же трудные военные годы были созданы оригинальные экспериментальные установки. Ряд задач, относящихся к метанию снаряда и его взаимодействию с броней, рассмотрен Н.А.Слезкиным.

Задача прочности тросов аэростатов воздушного заграждения и повышения эффективности их действия была решена Х.А.Рахматулиным. Это привело к созданию теории поперечного удара по гибкой растяжимой нити и к теории распространения упруго-пластических волн, которая получила широкое развитие после войны. Среди других задач, которыми занимался Х.А.Рахматулин для нужд оборонной промышленности и фронта, надо назвать аэродинамику бомб и снарядов, а также аэростатов заграждения, аэродинамику парашюта, включая особенно сложный режим раскрытия.

Для повышения маневренности танков и самоходных орудий с длинными гусеницами М.А.Крейнесом в составе конструкторского бюро МВТУ им. Баумана была решена задача о создании схем сложных регулярных зубчатых механизмов, управляющих движением гусениц.

Сложная задача создания эффективных методов дешифровки радиogramм и других донесений противника была решена в системе Военно-морского флота группой сотрудников мехмата (А.О.Гельфонд, Г.И.Двухшерстов, А.М.Пивоваров, В.Г.Чебан и другие).

Академиком Н.Е.Кочиним на базе его теории круглого крыла был дан расчет движения самолета на малой высоте; аналогичной задачей занимался А.А.Космодемьянский. Л.И.Седов в составе ЦАГИ занимался задачами гидродинамики применительно к созданию торпедных катеров и гидросамолетов. Оригинальное исследование проведено им по низкому торпедированию с самолета с переходом тор-

педы из воздуха в воду; реализовано два изобретения (воздушный стабилизатор торпеды, автоматический замок крепления стабилизатора).

Особенно следует отметить работу гуманистического направления, выполненную профессором мехмата, генерал-майором инженерных войск М.М.Филоненко-Бородичем. Речь идет о прочности ледового покрытия, применительно к «дороге жизни» осажденного Ленинграда.

Даже этот беглый и неполный перечень дает представление о величии дел наших ученых, показывает, насколько серьезным и весомым был вклад ученых мехмата в победу, с каким напряжением сил и жаждой прямой отдачи фронту работали наши ученые во время войны.

*Сохранил и подготовил
к печати С.Коновалов*

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАСШ ГЛАВНЫИ КНИЖНЫИ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОИ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин www.bgshop.ru	■ Книги
■ Кафе	■ Аудиокниги
■ Клубные (дисконтные) карты и акции	■ Антиквариат и предметы коллекционирования
■ Подарочные карты	■ Фильмы, музыка, игры, софт
■ Предварительные заказы на книги	■ Канцелярские и офисные товары
■ Встречи с авторами	■ Цветы
■ Читательские клубы по интересам	■ Сувениры
■ Индивидуальное обслуживание	
■ Подарочная упаковка	
■ Доставка книг из-за рубежа	
■ Выставки-продажи	

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город,
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн - пт 9:00 - 22:00
сб - вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2607 предлагалась на заключительном этапе XII Олимпиады имени Л.Эйлера, задача M2608 – на XXIII Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи Ф2613–Ф2616 предлагались школьникам, окончившим восьмой класс, на летней олимпиаде СУНЦ МГУ. Автор задач – С.Варламов.

Задачи M2606–M2609, Ф2613–Ф2616

M2606. Три окружности ω_1 , ω_2 , ω_3 проходят через одну точку D и пересекаются вторично в точках A , E , F , как показано на рисунке 1. Известно, что ω_3 проходит

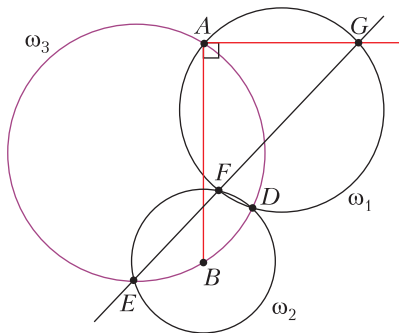


Рис. 1

через центр B окружности ω_2 . Прямая EF вторично пересекает ω_1 в точке G . Докажите, что $\angle GAB = 90^\circ$.

К.Кноп

M2607. Дано натуральное число n . Множество A , составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа $m \leq n$ во множестве A есть число, делящееся на m . Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A ?

А.Кузнецов

M2608. Из четырех реек сделали шарнирный выпуклый четырехугольник. Затем две точки на его противоположных сторонах соединили еще одной рейкой (рис.2),

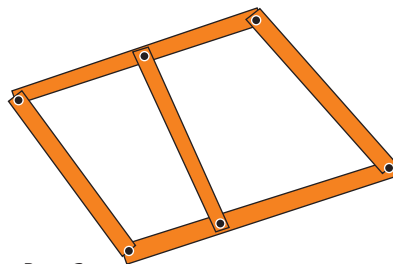


Рис. 2

но конструкция осталась нежесткой. Следует ли из этого, что данный четырехугольник – параллелограмм?

А.Заславский

M2609. Дано натуральное $n \geq 2$. Все клетки таблицы $n \times n$ красят в несколько цветов так, чтобы не нашлось квадрата 2×2 , состоящего из четырех клеток одного и того же цвета. Пестрым путем длины k будем называть последовательность различных клеток $a_1, a_2, \dots, a_k$ такую, что для всех $1 \leq i \leq k-1$ клетки a_i и a_{i+1} имеют общую сторону и раскрашены в разные цвета. При каком наибольшем k в таблице найдется пестрый путь длины k вне зависимости от раскраски клеток таблицы?

Н.Белухов

Ф2613. Для изучения циклона, который со средней скоростью 20 км/ч перемещался к северу, с одного аэродрома были направлены два беспилотных летательных аппарата – БПЛА – с разными полетными заданиями. Каждый аппарат должен был, оставаясь от центра циклона на расстоянии 20 км по горизонтали и двигаясь с постоянной скоростью относительно окружающего воздуха 20 м/с на определенной высоте (одинаковой для обоих аппаратов), облетать центр циклона. Один аппарат – по часовой стрелке (если смотреть сверху), а второй – против часовой стрелки. В момент старта расстояние от аэродрома до центра циклона как раз равнялось 20 км. Через 15 часов полета оба БПЛА практически одновременно приземлились на одном аэродроме, расположенном севернее аэродрома, с которого они взлетали, причем все время полета каждый строго выполнял заложенную в память компьютера программу полета. Сколько кругов вокруг центра циклона совершил один из БПЛА, если второй все время двигался по отношению к земле по прямой линии и не совершил ни одного круга?

Ф2614. Сосуды кубической формы заполнены морской водой, и начальная температура воды 0 °С в обоих сосудах одинакова. Длины ребер кубов относятся как 1:3. Боковые стенки и дно каждого сосуда имеют очень малые теплоемкости и ток не проводят – за исключением правых и левых стенок. А эти левые и правые стенки сделаны из тонких медных листов. На короткое время ключ в цепи (рис.3) замыкают и снова размыкают его. В сосуде справа температура воды за короткое время протекания тока поднялась на 1 градус.

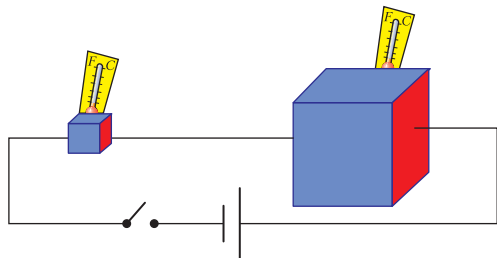


Рис. 3

Как изменилась за это же время температура в сосуде слева?

Ф2615. К идеальной батарейке через переменный резистор подключен вольтметр. Он показывает напряжение $U = 3\text{В}$. Когда сопротивление переменного резистора уменьшили в три раза, вольтметр показал напряжение $2U = 6\text{В}$. Что покажет вольтметр, если сопротивление резистора уменьшить еще в два раза?

Ф2616. Школьники создали систему телефонной связи с помощью нити и двух пластиковых стаканчиков (рис.4). Они



Рис. 4

использовали нить №20. Номер пряжи (нити) определяется количеством мотков, которые содержатся в 1 кг этой пряжи при длине нити в каждом мотке 1000 м. Длина телефонной линии $L = 100$ м. Сила натяжения нити $F = 10$ Н. С какой задержкой по времени в передаче звука работает такая телефонная линия?

Решения задач M2594–M2597, Ф2601–Ф2604

M2594. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ – положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n , что $m \sin x + n \cos x$ – натуральное число.

Пусть $\sin x + \cos y = a$ и $\sin y + \cos x = b$. Тогда $\cos y = a - \sin x$ и $\sin y = b - \cos x$. Возведем эти два равенства в квадрат и сложим их. В силу основного тригонометрического тождества получим $1 = a^2 + b^2 - 2a \sin x - 2b \cos x + 1$, т.е. $2a \sin x + 2b \cos x = a^2 + b^2$. Пусть N – НОК знаменателей чисел a и b ; тогда, умножив полученное равенство на N^2 , получим требуемое.

Н.Агаханов

M2595. а) Коля и Дима играют в игру на доске 8×8 , делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках кр-

стики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (доминошками) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т.е. в клетку, в которой еще не нарисован крестик и которая еще не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседние клетки (еще не накрытые другими доминошками), в которых суммарно четное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

б) Та же игра и тот же вопрос, но, в отличие от пункта а), первый ход делает Коля.

а) **Ответ:** Коля.

Приведем выигрышную стратегию за Колю. Мысленно раскрасим доску, как шахматную, и будем ставить крестики только в черные клетки. Дима за один свой ход покрывает ровно одну из черных клеток; значит, Коля сможет сделать 16 ходов. Покажем, что Дима не сможет сделать свой 17-й ход.

Пока Коля действует по стратегии, под каждой Диминой доминошкой будет белая клетка без крестика. Поэтому Дима не сможет накрыть доминошкой ни один крестик. Тогда за 16 пар ходов все черные клетки будут покрыты доминошками или крестиками, но ни в одной белой клетке не будет крестика. Значит, Дима не сможет поставить доминошку, соблюдая правила игры.

б) **Ответ:** Дима.

Приведем стратегию за Диму. Разобьем доску на квадраты 2×2 до начала игры. Пусть Дима будет отвечать на крестик, поставленный впервые в каком-то квадрате, доминошкой на две пустые клетки того же квадрата. Когда Коля будет ставить второй крестик в квадрате, Дима ответным ходом накроет этот крестик и первый поставленный в этом квадрате крестик доминошкой, в результате чего квадрат окажется покрытым двумя доминошками. Таким образом, на любой ход Коли у Димы есть ответный ход.

М.Дидин

М2596. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω . Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD .

В авторском решении этой задачи используется вспомогательная площадь.

Имеем $S_{ABCD} = pr$, где p – полупериметр четырехугольника, а r – радиус окружности ω . Из описанности вытекает $AB + CD = BC + DA$, откуда

$$S_{ABCD} = (BC + AD) \cdot r. \quad (*)$$

С другой стороны, если M и N – середины сторон BC и AD соответственно (рис.1),

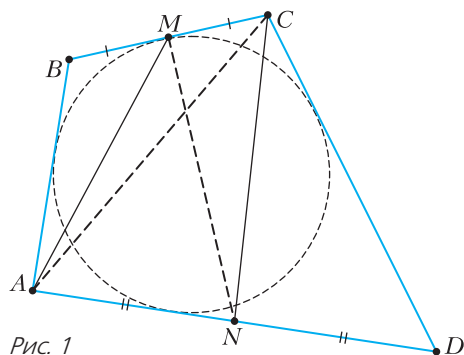


Рис. 1

имеем

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= (S_{ABM} + S_{ACM}) + (S_{ACN} + S_{DCN}) = \\ &= 2S_{ACM} + 2S_{ACN} = 2S_{AMCN} = 2S_{AMN} + 2S_{CMN} \leq \\ &\leq MN \cdot AN + MN \cdot CM = MN \cdot (AN + CM) = \\ &= \frac{1}{2} MN \cdot (AD + BC). \end{aligned}$$

Сравнивая с (*), после деления на $(AD + BC)/2$ получим нужное нам неравенство $MN \geq 2r$.

Задача решена. Из решения нетрудно видеть, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $ABCD$ – равнобокая описанная трапеция с $AD \parallel BC$.

Другой интересный вариант применения вспомогательной площади предложил десятиклассник из города Волжский Семен Севастьянов. Он рассмотрел так называемый параллелограмм Вариньона с вершинами в серединах K, M, L, N сторон AB, BC, CD, DA данного четырехугольника

$ABCD$. Как и в первом решении, имеем $(BC + AD)r = S_{ABCD}$. Как известно, площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади $ABCD$, откуда $(BC + AD)r = 2S_{KMLN} \leq MN \cdot KL$. После этого остается воспользоваться известным неравенством для длины средней линии: $KL \leq \frac{BC + AD}{2}$ (которое можно вывести из векторного равенства $\overrightarrow{KL} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$).

Приведем схему еще одного решения (вариации этого решения были предложены несколькими участниками регионального этапа Всероссийской олимпиады). Пусть l (рис.2) – прямая, относительно которой

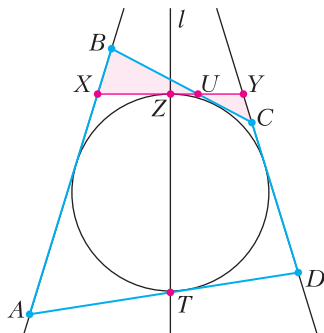


Рис. 2

симметричны прямые AB и CD (если AB и CD не параллельны, то l – это биссектриса угла между AB и CD). Пусть l пересекает ω в (диаметрально противоположных) точках Z и T . Пусть касательная к ω , проведенная в точке Z , пересекает прямые AB и CD в точках X и Y соответственно. Одна из сторон BC и AD пересекает отрезок XY или совпадает с ним, пусть для определенности это отрезок BC . Достаточно доказать такое утверждение: середина M отрезка BC «не ниже» точки Z , если принять XY за горизонталь (иначе говоря, M и T не лежат в одной полуплоскости относительно XY). Действительно, если это утверждение верно, то, аналогично, середина N отрезка AD «не выше» точки T , и тогда проекция отрезка MN (длина которой не больше длины MN) накрывает диаметр ZT . Тем самым задача будет решена.

Чтобы доказать утверждение, рассмотрим точку U пересечения отрезков BC и XY (в

случае совпадения этих отрезков утверждение очевидно). Не умаляя общности, считаем, что U лежит на отрезке ZY . Покажем, что $BU > CU$; тогда точка M будет лежать на отрезке BU , т.е. «выше» XY . Из треугольника BXU нетрудно показать, что $BU > XZ$ (XZ – отрезок от вершины до точки касания с вневписанной окружностью), а из треугольника CYU выводится, что $YZ > CU$. Поскольку (из симметрии) $XZ = YZ$, тем самым будет установлено нужное неравенство $BU > CU$. Другой очень изящный способ доказательства утверждения предложил учитель московской школы 179 С.Г.Слободник. Он рассмотрел вспомогательную окружность, касающуюся отрезка BC , а также продолжений отрезков AB и DC за точки B и C соответственно (рис.3). Тогда радикальная

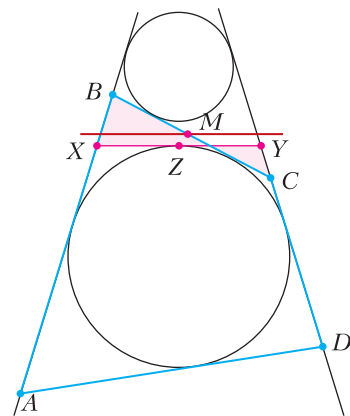


Рис. 3

ось двух окружностей, показанных на рисунке 3, – это прямая, параллельная XY , проходящая через M . Эта радикальная ось не пересекает окружности (разделяет их), поэтому находится «выше» прямой XY .

О.Южаков, П.Кожевников

M2597. Пусть p – простое число, большее 3. Докажите, что найдется натуральное число y , меньшее $p/2$ и такое, что число $py + 1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y .

Положим $p = 2k + 1$. Предположим противное: для каждого из чисел $y = 1, 2, \dots, k$ существует разложение $py + 1 = a_y b_y$, где

$a_y > y$, $b_y > y$. Заметим, что каждое из чисел a_y и b_y строго больше 1, а также что $a_y < p$, $b_y < p$, иначе $a_y b_y \geq p(y+1) > py+1$. Значит, каждое из $p-1$ чисел набора $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ лежит в множестве из $p-2$ чисел $\{2, 3, \dots, p-1\}$. Таким образом, в этом наборе найдутся два равных числа. Пусть каждое из этих двух чисел равно d .

Пусть эти равные числа имеют равные индексы в наборе, т.е. $a_y = b_y = d$ при некотором y . Тогда $py+1 = d^2$, поэтому число $d^2 - 1 = (d-1)(d+1) = py$ делится на простое p . Так как $1 \leq d-1 < d+1 \leq p$, это может быть лишь при $d+1 = p$. Тогда соответствующее значение y равно $d-1 = p-2 = 2k-1$; при $p > 3$ это число больше k . Противоречие (так как $y \leq k$). В противном случае существуют индексы $y_1 < y_2$ такие, что $1 \leq y_1 < y_2 < d$, для которых числа py_1+1 и py_2+1 делятся на d . Тогда и $p(y_2 - y_1) = (py_2+1) - (py_1+1)$ также делится на d . Из взаимной простоты чисел d и p получаем, что $y_2 - y_1$ делится на d , а это невозможно, так как $0 < y_2 - y_1 < y_2 < d$.

Таким образом, в каждом случае получено противоречие и, следовательно, указанное в условии задачи число y всегда найдется.

М.Антипов

Ф2601. Герметичный сосуд заполняют смесью воздуха и водяного пара и начинают охлаждать в термостате с тающим льдом. В процессе охлаждения измеряют температуру в сосуде с погрешностью $\Delta T = 0,5^\circ\text{C}$ и давление – с погрешностью $\Delta p = 0,05 \cdot 10^5 \text{ Па}$. В результате получают таблицу:

$t, ^\circ\text{C}$	137	123	109	82	55	27	0
$p, 10^5 \text{ Па}$	1,5	1,45	1,4	1,3	0,8	0,7	0,6

Определите отношение количества воды к количеству воздуха в сосуде, а также плотность газовой фазы в начале и в конце процесса. Учтите, что давление насыщенных паров воды, равное 1 кПа, достигается при температуре около 7°C . Молярные массы воды и воздуха равны соответственно 18 г/моль и 29 г/моль.

Если пар в начальном состоянии ненасыщенный, то начальная фаза процесса охлаждения характеризуется линейной зависимостью давления от объема. Изучив таблицу с учетом погрешности измерений, можно заметить, что первые четыре точки неплохо ложатся на прямую, а остальные – нет. Поэтому в начальном состоянии пар – ненасыщенный.

При нуле градусов давлением паров можно пренебречь, ведь уже при 7°C давление паров примерно равно 1 кПа, что в пять раз меньше погрешности измерения давления. Значит, в конце процесса давление в сосуде создает только воздух.

Поскольку температура в начале процесса равна $137^\circ\text{C} \approx \frac{273^\circ\text{C}}{2}$, можно приближенно считать, что эта температура в полтора

раза больше, чем температура в конце процесса. Отсюда следует, что давление воздуха в начале процесса равно $0,6 \text{ атм} \cdot 1,5 = 0,9 \text{ атм}$, а давление паров в начале равно $1,5 \text{ атм} - 0,9 \text{ атм} = 0,6 \text{ атм}$.

Теперь, когда мы знаем парциальные давления воздуха и паров в начальный момент, можно ответить на первый вопрос задачи, ведь отношение количеств воздуха и водяных паров равно отношению их парциальных давлений:

$$\frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} = \frac{p_{\text{возд}}}{p_{\text{вод}}} = \frac{3}{2}.$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона для начального состояния можно получить формулу для плотности газовой фазы в начале процесса:

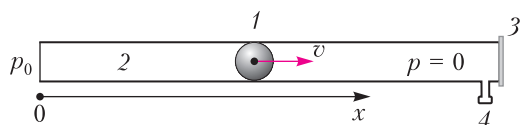
$$\rho_{\text{н}} = \frac{p_{\text{возд}} M_{\text{возд}} + p_{\text{вод}} M_{\text{вод}}}{RT} = 1,1 \text{ кг/м}^3.$$

Поскольку в виде газа в конце процесса останется только воздух, плотность газовой фазы будет равна плотности воздуха (неизменной в течение процесса):

$$\rho_{\text{к}} = \frac{p_{\text{возд}} M_{\text{возд}}}{RT} = 0,77 \text{ кг/м}^3.$$

П.Крюков

Ф2602. В последние годы большой интерес у энтузиастов, занимающихся науч-



но-техническим творчеством, вызывает устройство под названием «вакуумная пушка». В полипропиленовой водопроводной трубе 2 (см. рисунок), один конец которой герметично закрыт заглушкой из фольги 3, а другой открыт в атмосферу, разностью давлений ускоряется шарик 1 для игры в пинг-понг. Внутренний диаметр трубы близок к диаметру шарика. Рядом с заглушкой располагается штуцер 4, через который труба соединяется с вакуумным насосом. Таким образом, справа от шарика давление очень низкое, а у открытого конца трубы давление близко к атмосферному, которое равно p_0 . Оказывается, что при достаточно большой длине трубы и качественной откачке шарик можно разогнать до высокой скорости, так что он легко разорвет фольгу заглушки и вылетит из трубы. В одном видеоролике, доступном в сети, демонстрируется, как вылетающий из трубы шарик пробивает пустые банки из-под газировки, поставленные на небольшом расстоянии от трубы.

1) В самой грубой модели предполагается, что слева от шарика давление $p_0 = 10^5$ Па, а справа оно равно нулю. Разность давлений не меняется в процессе разгона шарика. Трения между шариком и стенками трубы нет. До какой максимальной скорости $v_{\max}^{(1)}$ может быть разогнан шарик массой $M = 2,7$ г и диаметром $d = 40$ мм в трубе длиной $L = 2$ м?

В более точной модели считается, что под действием постоянной разности давлений ускоряется не только шарик, но и воздух массой $m(t)$, располагающийся в момент t в трубе слева от шарика, а также вовлекаются в движение новые порции воздуха из атмосферы. Предлагается считать, что область вблизи левого торца трубы, в которой воздух вовлекается в движение, имеет малый характерный размер, сопоставимый с диаметром трубы. Снаружи трубы вне этой обла-

сти воздух остается неподвижным. Внутри трубы воздух движется со скоростью шарика, а его плотность равна плотности воздуха ρ снаружи. Диаметр шарика много меньше длины трубы. В начальный момент времени координата x шарика и его скорость равны нулю.

2) Определите более точное значение скорости $v_{\max}^{(2)}$, до которой может быть разогнан шарик. Время разгона в первом приближении можно считать равным времени разгона в п. 1). Температура воздуха и его молярная масса равны $T_0 = 293$ К, $M = 29$ г/моль соответственно.

3) Считая известными только температуру T_0 снаружи трубы и молярную массу воздуха, определите максимальную скорость, до которой может быть разогнан шарик. Длина трубы предполагается достаточно большой.

4) Даны параметры: M , S , p_0 , ρ , M . Получите формулу зависимости координаты шарика от времени $x(t)$.

Примечание. Может оказаться полезной формула $\Delta(x^2) = 2x\Delta x$, справедливая для малых изменений ($\Delta x \ll x$) величины x .

1) Для начала рассчитаем площадь S сечения шарика плоскостью, проходящей через его центр (эта цифра пригодится в дальнейшем):

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Ускорение шарика в грубой модели в любой момент времени равно

$$a = \frac{p_0 S}{M} \approx 4,7 \cdot 10^4 \text{ м/с}^2.$$

Значение ускорения – гигантское, потому что модель весьма грубая. Максимальная скорость на выходе из трубы достигается, когда движение начинается в самом начале трубы и шарик набирает скорость на всей длине трубы L . Это происходит за время

$$t_0 = \sqrt{\frac{2L}{a}} \approx 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ с, и шарик приобретает}$$

скорость

$$v_{\max}^{(1)} = \sqrt{2La} \approx 430 \text{ м/с.}$$

Если считать «руками», без калькулятора, и округлять, то получится 400 м/с.

2) В более точной модели расчет строится на основе второго закона Ньютона в импульсной форме. За счет постоянной силы $p_0 S$, действующей в течение короткого времени Δt , увеличивается скорость шарика и столба воздуха массой $m(t)$ на малую величину Δv , а также вовлекается в движение со скоростью $v + \Delta v$ масса воздуха, равная Δm . По условию движением воздуха вне трубы (за исключением малой области вблизи левого торца) можно пренебречь. Таким образом, имеем соотношение

$$p_0 S \Delta t = (m(t) + M) \Delta v + v(t) \Delta m,$$

при записи которого естественно пренебрегаем малым произведением $\Delta m \Delta v$. В правой части равенства стоит изменение импульса шарика и воздуха в трубе за время Δt , поэтому уравнение можно переписать в виде

$$p_0 S \Delta t = \Delta((m(t) + M)v). \quad (*)$$

Поскольку это соотношение означает пропорциональность малых изменений, выполнив суммирование за время t_0 , можно получить равенство

$$p_0 S t_0 = (m(t_0) + M)v(t_0),$$

из которого следует

$$v(t_0) = \frac{p_0 S t_0}{m(t_0) + M}.$$

Масса воздуха в момент времени t_0 выражается через длину L и плотность ρ . Время t_0 считаем таким же, как в предыдущем пункте, площадь S тоже была найдена ранее. В итоге, подставив числовые данные, получим ответ:

$$v_{\max}^{(2)} = \frac{p_0 S t_0}{\rho S L + M} \approx 199 \text{ м/с}.$$

Отметим, что плотность воздуха ρ находится из уравнения состояния идеального газа:

$$\rho = \frac{p_0 M}{RT_0} \approx 1,19 \text{ кг/м}^3.$$

Расчет без использования калькулятора дает 200 м/с при разумном округлении промежуточных результатов.

3) Когда скорость шарика достигнет максимума, обозначим максимальную скорость

u , его ускорение станет равно нулю. Поэтому, в соответствии со вторым законом Ньютона, получаем равенство

$$p_0 S \Delta t = u \Delta m,$$

или, поскольку за малое время Δt в движение вовлекается воздух массой $\Delta m = \rho S u \Delta t$,

$$p_0 S \Delta t = \rho S u^2 \Delta t.$$

Отсюда легко находится скорость:

$$u = \sqrt{\frac{p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}} \approx 294 \text{ м/с}.$$

Без калькулятора получается 300 м/с. (Отметим, что значение максимальной скорости отличается от скорости звука в воздухе на величину $\sqrt{\gamma}$, где $\gamma = 1,4$ — показатель адиабаты для воздуха.)

4) Суммируя равенства (*) и учитывая начальные условия, имеем уравнение

$$p_0 S t = M v + \rho S x v.$$

Умножим его на Δt и получим соотношение

$$p_0 S t \Delta t = M \Delta x + \rho S x \Delta x,$$

при выводе которого использовалось равенство $\Delta x = v \Delta t$, справедливое при малых Δt . Поскольку для малых изменений $\Delta(x^2)$ и $\Delta(t^2)$ справедливы равенства $\Delta(x^2) = 2x \Delta x$ и $\Delta(t^2) = 2t \Delta t$, последнее соотношение приводится к виду

$$p_0 S \Delta(t^2) = 2M \Delta x + \rho S \Delta(x^2).$$

Это равенство можно просуммировать. В итоге получится квадратное уравнение относительно x :

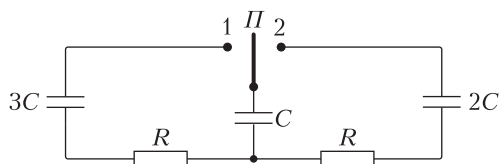
$$p_0 S t^2 = 2M x + \rho S x^2,$$

решив которое, найдем зависимость координаты шарика от времени:

$$x(t) = -\frac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho S}\right)^2 + \frac{p_0 t^2}{\rho}}.$$

П.Крюков

Ф2603. В цепи, схема которой изображена на рисунке, в начальный момент времени конденсатор емкостью $3C = 300 \text{ мкФ}$ заряжен до напряжения $U_0 = 12 \text{ В}$, конденсаторы емкостями C и $2C$ не заряжены, переключатель Π находится в сред-



нем положении. Переключатель переключают сначала в положение 1 на короткое время (много меньше RC), а затем в положение 2 на гораздо большее время. Определите заряды конденсаторов после многократного повторения этих двух операций. Найдите приблизительно, какое количество теплоты выделяется в каждом из резисторов.

После многократных переключений напряжение на всех конденсаторах станет одинаковым, что позволяет рассчитать их заряды. Обозначим q_3 заряд конденсатора емкостью $3C$, q_2 – заряд конденсатора емкостью $2C$, q – заряд конденсатора емкостью C . Справедливо соотношение, отражающее равенство напряжений:

$$\frac{q_3}{3C} = \frac{q_2}{2C} = \frac{q}{C}.$$

С другой стороны, сумма зарядов на всех конденсаторах в конце процесса должна быть равна заряду конденсатора емкостью $3C$ в начальный момент, поэтому

$$q_3 + q_2 + q = 3CU_0.$$

Объединив полученные соотношения, найдем

$$q = \frac{CU_0}{2}, q_3 = 3q, q_2 = 2q.$$

Отсюда следует, что напряжение на конденсаторах в конце процесса равно $U = \frac{U_0}{2}$, поэтому заряды на конденсаторах емкостью $3C$ и $2C$ равны, соответственно,

$$q_3 = \frac{3CU_0}{2} \text{ и } q_2 = CU_0.$$

По закону сохранения энергии, на обоих резисторах вместе выделяется количество теплоты, равное разности энергий всех конденсаторов в начале и в конце процесса:

$$Q = \frac{3CU_0^2}{2} - \frac{6CU_0^2}{4 \cdot 2} = \frac{3CU_0^2}{4}.$$

Покажем, что количество теплоты Q_2 , выделяющееся на правом резисторе, пренебрежимо мало по сравнению с количеством теплоты Q_1 , которое выделяется на левом резисторе. Пусть при замыкании переключателя в положение 1 с конденсатора емкостью $3C$ перетекает на конденсатор емкостью C малый заряд Δq . Пусть при этом на левом резисторе выделяется количество теплоты ΔQ_1 , а при дальнейшем выравнивании напряжений на конденсаторах емкостями C и $2C$ после замыкания переключателя в положение 2 на правом резисторе выделяется количество теплоты ΔQ_2 . Для этих количеств теплоты справедливы оценки

$$\Delta Q_1 \sim U_{31}\Delta q, \Delta Q_2 \sim \frac{\Delta q}{C}\Delta q,$$

где U_{31} – разность напряжений на конденсаторах емкостями $3C$ и C . Большая часть энергии выделяется, пока разность напряжений U_{31} имеет порядок U_0 , поэтому $U_{31} \gg \frac{\Delta q}{C}$ большую часть времени в течение процесса перезарядки. Отсюда следует, что количество теплоты ΔQ_2 значительно меньше ΔQ_1 , поэтому на правом резисторе в общей сложности выделяется значительно меньше теплоты, чем на левом. Таким образом,

$$Q_1 \approx \frac{3CU_0^2}{4} \approx 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}, Q_2 \approx 0.$$

П.Крюков

Ф2604. Наблюдатель видит изображение Солнца в полированном металлическом шаре (рис.1). Угловая высота Солнца над горизонтом равна α и равна углу между линией зрения и горизонтальной нормалью к шару. Определите характерный размер изображения Солнца, если радиус шара R , а угловой размер Солнца φ ($\varphi \ll \alpha$).

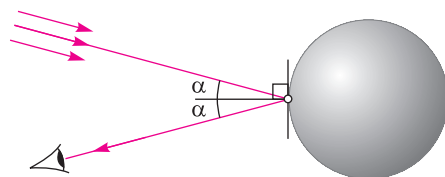


Рис. 1

Примечание. Для малого угла φ справедливы приближенные формулы $\cos \varphi \approx 1$ и $\sin \varphi \approx \varphi$.

На рисунке 2 показан ход двух параллельных лучей, составляющих известный угол α с горизонтальной нормалью к поверхности сферы. В точке A на пересечении

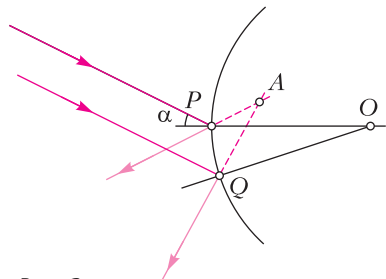


Рис. 2

продолжений отраженных лучей будет наблюдаться изображение Солнца. Если угол между радиусами, проведенными в точки P и Q , равен $\angle POQ = \Delta$, то угол между продолжениями отраженных лучей равен $\angle PAQ = 2\Delta$, поскольку при повороте зеркала на угол Δ отраженный луч поворачивается на 2Δ . Угол Δ определяется размером зрачка и, очевидно, мал. Другие углы равны, соответственно,

$$\angle APO = \alpha, \quad \angle AQP = \frac{\pi}{2} - \alpha - \Delta \approx \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Запишем теорему синусов для треугольника PAQ и, учитывая что 2Δ — малый угол, получим равенство

$$PA = \frac{PQ}{2\Delta} \cos \alpha.$$

Отсюда, поскольку справедливо приближенное соотношение $PQ \approx R\Delta$, находим

$$PA = \frac{R \cos \alpha}{2}.$$

Можно убедиться в том, что это уравнение задает полуокружность радиусом $0,25R$, центр которой располагается на отрезке OP на расстоянии $0,75R$ от точки O . При изменении угла α точка A сдвигается по этой окружности. Угловой размер Солнца равен φ , поэтому угол падения пучков параллельных лучей от Солнца изменяется в пределах от α до $\alpha + \varphi$. Пусть лучам, падающим под углом α , соответствует точка A , а лучам, падающим под углом $\alpha + \varphi$, — точка A_1 (рис.3). Характерный размер

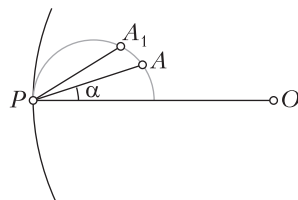


Рис. 3

изображения Солнца можно считать равным высоте треугольника PA_1A , опущенной из вершины A_1 . В первом приближении эта высота равна

$$\Delta L = \frac{R \cos \alpha}{2} \varphi.$$

А.Бычков, П.Крюков

Бипедальные равновеликости

И.КУШНИР

В этой статье мы расскажем о нескольких геометрических «приключениях» и, в частности, решим задачу М2590. В них появятся равновеликие фигуры в конструкциях с перпендикулярами, проведенными из точки, лежащей на стороне треугольника, к двум его другим сторонам. Такие перпендикуляры мы будем называть «бипедалями».

Приключение первое. Пусть в остро-

угольном треугольнике ABC проведена высота AH_1 , из H_1 проведены бипедали H_1M_H и H_1N_H (рис.1).

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . Выдающийся геометр З.А.Скопец рассматривал условие принадлежности O прямой — «посадил» точку O на отрезок M_HN_H ! Оказывается, при вы-

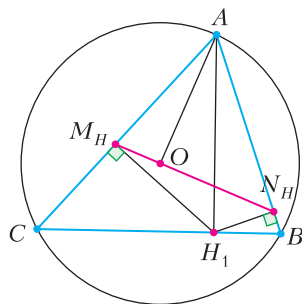


Рис. 1

полнении этого условия отрезок будет «равноделящей», т.е. разделит площадь треугольника пополам. Итак,

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC известно, что точка O лежит на отрезке $M_H N_H$. Докажите, что отрезок $M_H N_H$ делит площадь треугольника ABC пополам.

Вначале приведем схему «формульного» решения задачи.

Понадобятся следующие утверждения для произвольного треугольника ABC , которые предлагаем читателю доказать самостоятельно:

$$1. OA \perp M_H N_H;$$

$$2. M_H N_H = \frac{S}{R},$$

где S – площадь треугольника ABC , R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Из утверждений 1 и 2 легко следует решение задачи. Поскольку $OA \perp M_H N_H$, то в треугольнике $AM_H N_H$ отрезок OA будет высотой, а длина стороны $M_H N_H$ равна $\frac{S}{R}$, значит,

$$S_{AM_H N_H} = \frac{1}{2} R \cdot \frac{S}{R} = \frac{1}{2} S.$$

Поэтому площади треугольника $AM_H N_H$ и четырехугольника $M_H C B N_H$ равны, а $M_H N_H$ – равноделящая.

Задача имеет и чисто геометрическое решение.

Проведем диаметр AA_1 (рис.2). Поскольку $M_H O$ – медиана треугольника $AM_H A_1$, то $S_{AM_H O} = S_{A_1 M_H O}$. Аналогично, $S_{AN_H O} = S_{A_1 N_H O}$. Отсюда $S_{AM_H N_H} = S_{A_1 M_H N_H}$ (на самом деле треугольники $AM_H N_H$ и $A_1 M_H N_H$ равны, поскольку $OA \perp M_H N_H$). Тем самым, задача сводится к доказательству равенства площадей четырехугольника $AM_H A_1 N_H$ и треугольника ABC .

Общая часть четырехугольника $AM_H A_1 N_H$ и треугольника ABC – пятиугольник $AM_H E F N_H$ (см.рис.2), поэтому достаточно понять, что $S_{EFA_1} = S_{ECM_H} + S_{FBN_H}$. Так как угол ACA_1 опирается на диаметр, он равен 90° , откуда $CA_1 \parallel M_H H_1$. Далее из трапеции $M_H H_1 A_1 C$ получаем

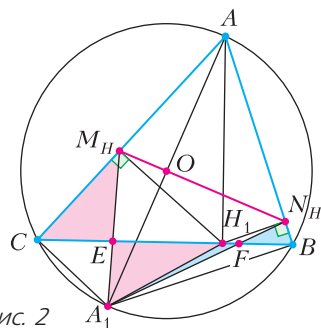


Рис. 2

$S_{A_1 C H_1} = S_{A_1 C M_H}$ и $S_{E A_1 H_1} = S_{E C M_H}$. Аналогично доказывается равенство $S_{F A_1 H_1} = S_{F B N_H}$, и в силу равенства $S_{E F A_1} = S_{E H_1 A_1} + S_{F H_1 A_1}$ решение закончено.

Приключение второе (точка O «сбежала» с отрезка $M_H N_H$). Посмотрев на геометрическое решение задачи 1, мы видим, что в доказательстве равенства $S_{AM_H A_1 N_H} = S_{ABC}$ никак не использовалось, что точка O лежит на $M_H N_H$ (это условие использовалось только в замечании о равенстве треугольников $AM_H N_H$ и $A_1 M_H N_H$). Читатель может доказать равенство $S_{AM_H A_1 N_H} = S_{ABC}$ и «формульно», снова используя формулы 1 и 2.

Если O не лежит на $M_H N_H$, также в силе остаются равенства $S_{AM_H O} = S_{A_1 M_H O}$, $S_{AN_H O} = S_{A_1 N_H O}$ и, значит, $S_{AM_H O} + S_{AN_H O} = S_{ABC}/2$. Таким образом, мы получили решение такой задачи:

Задача 2 (M2590). В остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, H_1 – основание высоты, проведенной из точки A , а M_H и N_H – проекции точки H_1 на AC и AB соответственно (рис. 3). Докажите, что ломаная

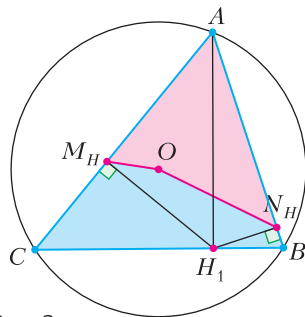


Рис. 3

ная $M_H ON_H$ делит площадь треугольника ABC пополам.

Приключение третье (диаметральная равновеликость). Удивительно, но равновеликость $S_{AM_H A_1 N_H} = S_{ABC}$ остается в силе для бипедалей произвольной точки отрезка BC (а не только для основания высоты). Получается новая задача.

Задача 3 (теорема диаметальной равновеликости). Пусть в остроугольном треугольнике ABC точка X — произвольная точка отрезка BC , XM_X и XN_X — бипедали этой точки, а точка A_1 диаметрально противоположна точке A . Докажите, что площадь четырехугольника $AM_X A_1 N_X$ равна площади треугольника ABC .

Проверьте, что рассуждения из геометрического решения задачи 1 сохраняются без изменений и дают решение задачи 3.

Приведем также схему вычислительного решения задачи 3.

Обозначим через φ угол между диаметром AA_1 и отрезком $M_X N_X$ (рис.4). Тогда

$$S_{AM_X A_1 N_X} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot M_X N_X \sin \varphi = R \cdot M_X N_X \sin \varphi.$$

Окружность с диаметром AX проходит через M_X , N_X и H_1 . Отсюда, в частности, $M_X N_X = AX \sin \angle A$. После подстановки и «эквивилибристики» $R \cdot AX \sin \angle A \sin \varphi = (R \sin \angle A)(AX \sin \varphi)$ получаем $S_{AM_X A_1 N_X} = \frac{1}{2} BC (AX \sin \varphi)$. Поскольку $AX \sin \angle AXH_1 = AH_1$, остается понять, что φ равен $\angle AXH_1$

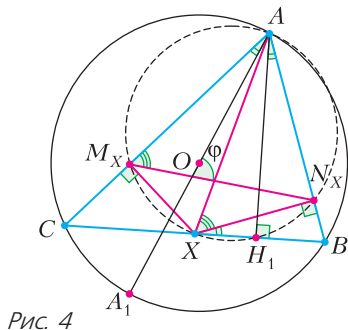


Рис. 4

или $180^\circ - \angle AXH_1$, в зависимости от расположения точек. Несложный подсчет углов на рисунке 4 дает:

$$\begin{aligned} \angle AXH_1 &= \angle AXN_X + \angle N_X XH_1 = \\ &= \angle AM_X N_X + \angle N_X A H_1 = \\ &= \angle AM_X N_X + \angle M_X A A_1 = \varphi. \end{aligned}$$

Приключение четвертое (изогональная равновеликость). Как и прежде, на стороне BC остроугольного треугольника ABC берем произвольную точку X (рис.5) и проводим бипедали XM_X и XN_X .

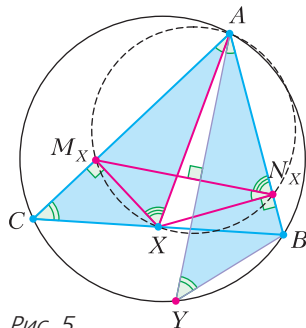


Рис. 5

Задача 4. Точка X лежит на стороне BC остроугольного треугольника ABC . Через точку A проведем прямую, симметричную прямой AX относительно биссектрисы угла BAC (ее называют также изогональю для AX), и пусть эта прямая пересекает описанную окружность в точке Y . Докажите, что площадь четырехугольника $AM_X YN_X$ равна площади треугольника ABC .

Отметим, что в случае, когда AX — биссектриса угла BAC , AY тоже совпадает с биссектрисой, и задача 4 в этом частном случае превращается в задачу М1076, которая была придумана автором еще в 1980-х годах и вошла в вариант Международной математической олимпиады 1987 года.

В задаче 4 снова можно комбинировать как вычислительный, так и геометрический подходы. Приведем два решения.

Первое решение. Подсчет углов показывает, что $M_X N_X \perp AY$. Действительно, $\angle AN_X M_X + \angle YAN_X = \angle AXM_X + \angle XAM_X = 90^\circ$. Далее заметим, что треугольник AXC подобен (по двум углам) треугольнику ABY ,

откуда $AC \cdot AB = AX \cdot AY$. Кроме того, как мы видели ранее, $M_X N_X = AX \sin \angle A$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} S_{AM_X Y N_X} &= \frac{1}{2} AY \cdot M_X N_X = \frac{1}{2} AY \cdot AX \sin \angle A = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \angle A = S_{ABC}. \end{aligned}$$

Задача решена.

Второе решение. В силу диаметральной равновеликости (см. задачу 3), достаточно доказать равенство площадей четырехугольников $AM_X Y N_X$ и $AM_X A_1 N_X$ (рис. 6) или, что эквивалентно, равенство площадей треугольников $A_1 M_X N_X$ и $Y M_X N_X$. Последнее следует из того, что $M_X A_1 Y N_X$ –

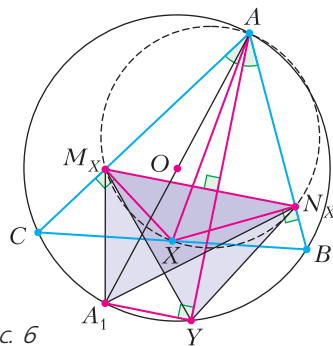


Рис. 6

трапеция, поскольку $M_X N_X \perp AY$ (это показано в начале первого решения) и $\angle A Y A_1 = 90^\circ$ (так как AA_1 – диаметр). Все!

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

ИТОГИ КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА 2019/20 УЧЕБНОГО ГОДА

ПОБЕДИТЕЛИ

Лучших результатов добились школьники
Бирюлин Алексей – Москва, школа 179, 7 кл.,
Дренчева Мария – Болгария, София, Софийская математическая гимназия, 8 кл.,
Федоров Александр – Москва, школа 1514, 9 кл.,
Часовских Иван – Химки, Московская обл., школа 14, 6 кл.

ПРИЗЕРЫ

Также хороших результатов добились школьники
Сушкова Владислава – Сыктывкар, республика Коми, Физико-математический лицей-интернат, 8 кл.,
Саначев Иван – Москва, школа 1583, 4 кл.

и команды

команда математической группы Центра «Успех» Гатчинского муниципального района Ленинградской области (руководитель Павлов Сергей Павлович);

Тюков Даниил (9 кл.), Федорова Алина (9 кл.), Еронин Валерий (9 кл.), Титеева Нелли (8 кл.), Сергеев Артем (7 кл.), Кучер Анастасия (7 кл.), Валько Валентина (7 кл.), Красильников Андрей (6 кл.), Сологуб Александр (6 кл.),

команда МАОУ «Академический Лицей» города Магнитогорска (руководитель Мошкин Виталий Станиславович);

Мозговой Кирилл (9 кл.), Чернов Богдан (9 кл.), Сафронова Ольга (9 кл.), Казакова Екатерина (8 кл.), Гофштейн Лев (8 кл.), Кучкина Валерия (8 кл.), Иванова Ирина (8 кл.),

команда учеников 8М и 9М классов школы 1329 города Москвы:

Бутрова Ирина (9 кл.), Волошин Александр (8 кл.), Галкин Савва (8 кл.), Журин Иван (8 кл.), Ильин Константин (8 кл.), Наумов Леонид (9 кл.).

Поздравляем!

Победителям и призерам будут высланы дипломы журнала «Квант» и призы от издательства МЦНМО. Помимо этого призы получают наиболее активные участники конкурса.

Задачи

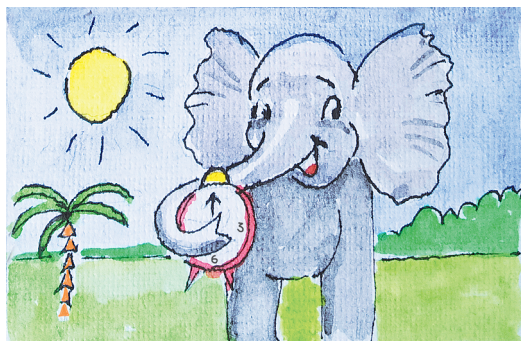
1. В коробке лежит 20 карандашей. Маша сказала: «Среди них есть 5 карандашей разного цвета». Витя сказал: «Среди них есть 5 синих и 5



красных карандашей». А Егор заявил: «Среди них есть 10 синих карандашей». Известно, что двое сказали правду, а один ошибся. Какое наибольшее количество зеленых карандашей может быть в коробке?

Н.Чернятьев

2. У слоненка дома сломались механические часы-будильник: теперь они ходят в два раза медленнее. Сейчас полночь, и часы показывают правильное время. Каждый раз, когда звонит будильник, слоненок мгновенно выс-

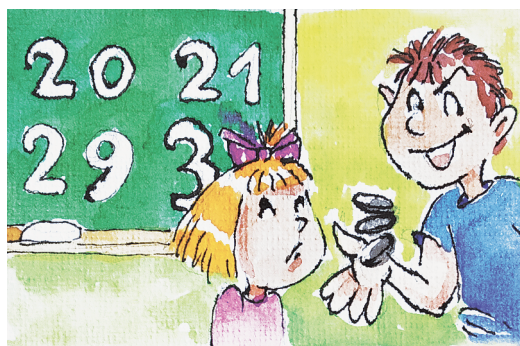


Задача 1 предлагалась на Костромском Турнире юных математиков, задача 2 — на Турнире математических боев имени А.П.Савина, задачи 3, 4 — на Математическом празднике.

тавляет на часах правильное время. Сколько раз будет звонить будильник в ближайшие трое суток?

М.Хачатурян

3. На доске написаны числа 2, 3, 4, ..., ..., 29, 30. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать

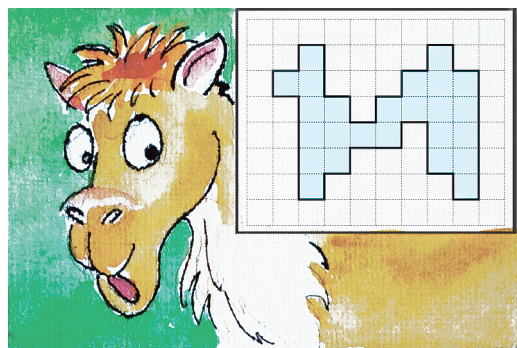


его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске?

И.Ященко

4. Можно ли данную фигуру («верблюда») разбить

- по линиям сетки,
- но не обязательно по линиям сетки



на 3 части, из которых можно сложить квадрат?

Ю.Маркелов (ученик 10 класса)

Электродинамический водомет

С. МАЛАМАНОВ

... И я пройти еще смогу
Соленый Тихий океан...

Песня из кинофильма «Я шагаю по Москве»

ВСПОМНИВ ЭТУ ПЕСНЮ, ОДИН СПОСОБНЫЙ ученик подумал: «Погодите, — да ведь все океаны и моря соленые. А одно озеро до того соленое, что называется Мертвым морем. Коль так, значит, их вода способна проводить ток! Это же можно как-то использовать?»

И тут ему вспомнилось, что можно так «организовать» магнитное поле $\vec{B}$ и плотность электрического тока $\vec{j}$, чтобы появилась сила, ускоряющая проводящую жидкость в горизонтальном направлении (рис. 1). Это так называемая сила Ампера. Ее плотность (размерность Н/м³) равна

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}.$$

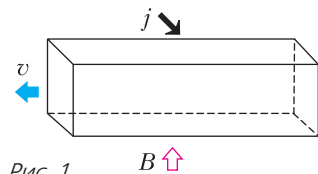


Рис. 1

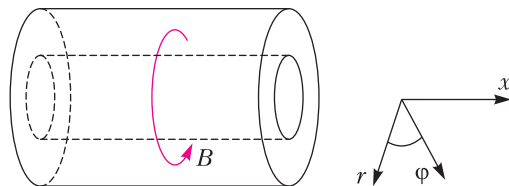


Рис. 2

Возникающее прямолинейное движение проводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях — один из возможных вариантов. Еще одной простой моделью является течение в ограниченном кольцевом зазоре двух соосных цилиндров, где приложено тороидальное магнитное поле, а между поверхностями поддерживается разность потенциалов, обуславливающая электрический ток. Такую модель иллюстрирует рисунок 2. В этом случае

$$f_x = j_r \cdot B_\phi.$$

Здесь индексы указывают, куда что направлено. Плотность тока связана с напряженностью электрического поля так называемым дифференциальным законом Ома

$$\vec{j} = \lambda \vec{E},$$

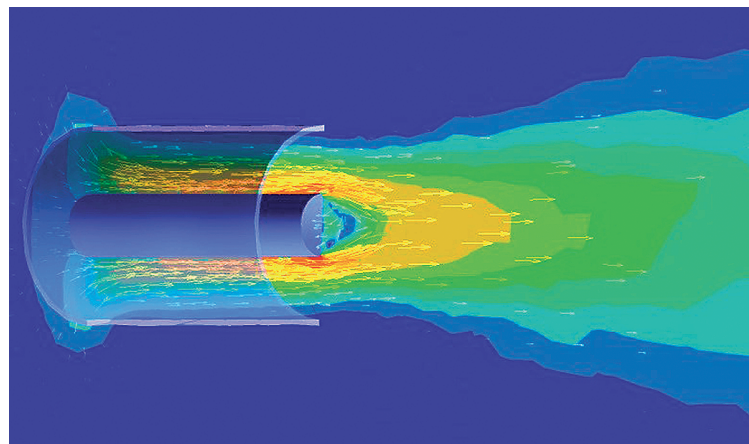
который в рассматриваемом случае радиального электрического поля принимает вид

$$j_r = \lambda E_r,$$

где λ — удельная проводимость.

А что будет, если описанное «устройство», в котором разность потенциалов между поверхностями цилиндров поддерживается постоянной и равной 200 В, а в зазоре существует магнитное поле с индукцией

0,1 Тл, поместить в проводящую среду, например — в морскую воду? Теперь уже Способному ученику становится понятно, что появившаяся сила выталкивает жидкость из кольцевого зазора, а получающееся в результате этого течение представляет собой струю. Это хорошо видно на приведенной здесь фотографии. При этом наибольшая скорость, в указанных условиях, оказывается порядка 1 м/с.



Это натолкнуло Способного ученика на возможное применение подобного течения – движитель, или правильнее сказать в данном случае – водомет. Обрадовавшись такой «находке», он стал обдумывать, как это сделать. И если с электрическим полем все вроде бы понятно, то как получить магнитное поле в кольцевом зазоре? Круговое магнитное поле – как же его организовать?

На ум постоянно приходил виток с током, порождающий осевое магнитное поле (рис.3). И тут он вспомнил, как учитель физики в школе рассказывал о том, что провод линии

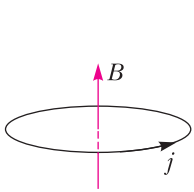


Рис. 3

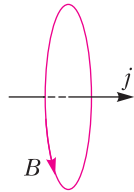


Рис. 4

электропередач окружает круговое магнитное поле. Таким образом, осевой ток способен создать круговое магнитное поле (рис.4). Наши векторы $\vec{j}$ и $\vec{B}$ «просто» поменялись местами. Осталось поместить это магнитное поле в кольцевой зазор.

И опять на помощь пришли уроки физики: надо использовать соленоид. Внутри длинного соленоида, по обмотке которого течет

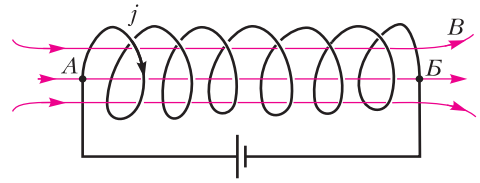


Рис. 5

постоянный электрический ток, возникает однородное магнитное поле (рис.5). Если теперь соединить точки A и B вместе, то и получится необходимая конфигурация магнитного поля внутри «бублика» (рис.6), который следует «расположить» внутри кольцевого зазора. Правда, надо учесть еще один существенный момент: катушка должна быть «прозрачна» – витки не должны быть намотаны слишком плотно – для протекающей через нее жидкости.

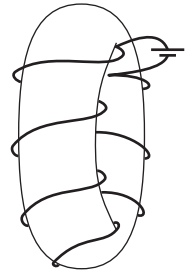


Рис. 6

После этих инженерно-физических решений Способный ученик начал размышлять над тем, где можно применить данный водомет. Так например, его можно использовать для создания импульса, размывающего грунт, для очистки подводных частей корпуса судна, для отпугивания морских чудовищ...

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Как дятел Спятел добывал опилки

К. КОХАСЬ

– Кто же мог подумать, что всякие новодомные штучки – все эти бесчисленные пружины, мультизоны, пропитки – оказываются, неглавное, наносное, – извиняющимся голосом говорил дятел Спятел. – Нужно отбросить все это, вернуться, так сказать, к истокам.

– Правильно! – согласилась Огрыза. – Поэтому я сама изготовлю себе новый матрас! И набью его не какой-нибудь кокосовой шелухой, а обыкновенными опилками!

– Так ведь жестковат матрас-то получится, – возразил дятел Спятел.

– Классическая модель! Жесткий, тяжелый, неуклюжий, но зато на 100% натуральный! Да что тут рассуждать, я уже сшила чехол для матраса – видишь, какой красивый.

– Красивый. И опилки ты тоже уже купила?

– С опилками загвоздка: их не продают! Продаются изделия, а опилки – это отходы. Если бы поблизости была мебельная фабрика, мы бы еще могли что-нибудь сделать...

Дверь распахнулась, и в Ам-бар вошли Бусенька и таракан Кузька.

– Обожаю кататься на велосипеде, – тут же похвастался Кузька, снимая шлем.

– Ты? На велосипеде? – не понял дятел Спятел. – Он раз в сто тебя выше, как ты можешь на нем кататься?

– Легко! – сказал Кузька. – Я же не педали люблю крутить, а кататься. Запрыгиваю на колесо – и вперед! А педали крутит Бусенька.

– Но как ты удерживаешься на колесе?

– Держусь за спицу! Это настоящий аттракцион. Закручивает получше американских горок!

– И рисунки получаются классные! – добавила Бусенька.

– Мне кажется, кто-то из нас спятил, – удивилась Огрыза. – Какие еще рисунки?

– Я качусь на велосипеде и при этом рисую! Красивые линии получаются.

Огрыза схватилась за голову.

– Все очень просто, – объяснила Бусенька, – я аккуратно еду на велосипеде вдоль стены, а Кузька сидит на ободке, держит фломастер и, вращаясь вместе с колесом, вычерчивает на стене линии! Получается

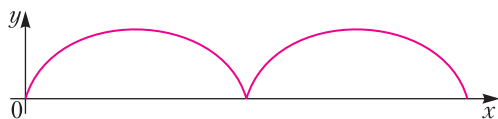


Рис. 1

очень здорово. Вот смотрите, я сфотографировала. Это называется циклоида (рис.1)!

– Ой, какая хорошая линия, – воскликнула Огрыза, – жаль, вы не показали мне ее раньше. Был бы тогда у меня матрас в циклоидальную полосочку.

– Кажется, кто-то еще спятил, – сообщил Кузька.

– Все в порядке, – пояснил дятел Спятел.

– Огрыза только что рассказывала мне, что собирается изготовить матрас и набить его опилками. Она уже сшила чехол, но у нее совсем нет опилок.

– А много нужно опилок? – спросила Бусенька.

– Думаю, килограммов 10 хватит, – сказала Огрыза.

– Если опилок нет в продаже – мы их сами напилем! – вдруг оживился дятел Спятел. – У тебя случайно нет лишнего шкафа?

– Не дам, – сказала Огрыза.

– У коллеги Спрудля есть отличная фанера! – вспомнила Бусенька. – Свежайшая, запах изумительный. Он делает ремонт в своем казино и собирается перегородить зал фанерной стенкой. Кажется, это то, что нам надо.

– С коллегой Спрудлем невозможно иметь дело, – решительно возразила Огрыза. – Он тебя обесит, обвесит, а потом вместо репки подсунет гнилую брюкву!

– И в итоге ты еще окажешься ему должна! – поддакнул Кузька.

– Верно, – согласился дятел Спятел. – Но... мы не будем поступать так прямолинейно. Если по-настоящему заинтересовать коллегу Спрудля, то получится все, как вы сказали, только с балансом в нашу пользу!

– Он же не наглухо перегородит свое казино, – предположила Бусенька, – останется дверной проем... Или арка...

– Арка! – воскликнул дятел Спятел. – Мы предложим ему вырезать в новой стене проем в форме арки циклоиды! Он не устоит!

– Нужно рассчитать площадь, чтобы из вырезанной части можно было напилить требуемое количество опилок, – подхватила Бусенька.

– Сейчас рассчитаю, – деловая хватка у Огрызы была потрясающая. – Лист стеновой фанеры $1,5 \times 1,5$ м имеет массу 32 килограмма, значит, нам нужно, сейчас, сейчас... $0,7 \text{ м}^2$ фанеры. Остался пустячок – подобрать циклоиду, у которой площадь арки равна $0,7 \text{ м}^2$. А подходящее велосипедное колесо для вычерчивания циклоиды я вам подберу из своих запасов.

– Чем больше колесо, тем интереснее кататься, – прокомментировал Кузька.

– Не надо больше. Мы же не фабрика по производству отходов! Мы всё точно вычислим. Ты не помнишь, – беззаботно спросил дятел Спятел Бусеньку, – по какой формуле считается площадь арки циклоиды, вычерчиваемой с помощью колеса радиуса r ?

– Сколько-то эр квадрат, – откликнулась Бусенька. – Ее еще в XVII веке нашли. Но я уже забыла. Придется заново выводить.

Бусенька подошла к стенке.

– Представим себе, что здесь стоит колесо радиуса r . Центр колеса находится в точке C , а в точке K обода этого колеса стоит Кузька (рис.2). Он крепко держится за спицу $СК$. Сейчас мы покатаем колесо, и Кузька вычер-

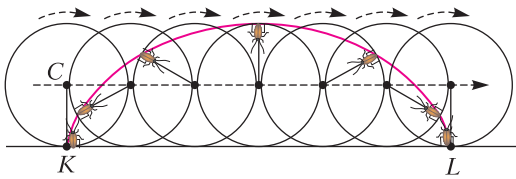


Рис. 2

тит на стене циклоиду. Ширина арки циклоиды (расстояние KL) равна длине окружности, т.е. $2\pi r$. А самая высокая точка циклоиды получается в тот момент, когда колесо отъехало на расстояние πr .

Рассмотрим момент, когда колесо немного проехало, доехав до точки X , а спица, за которую держится Кузька, повернулась на угол φ (рис.3). В этом случае длина дуги KX равна $r\varphi$ — и она же равна расстоянию, которое проехало колесо, т.е. $OX = r\varphi$. Проведем через точку K горизонтальную прямую, пусть она пересекает во второй раз окружность в точке K' . Поместим в точку K' ... кого бы? Нужен еще один доброволец. Кто хочет прокатиться?

Рис. 3

— Предлагаю поместить в эту точку Кузькиного приятеля Акзюка, — сказал дядя Спятел.

— Какого еще Акзюка?! — не понял Кузька.

— Я не знаю никакого Акзюка!

— Конечно, — воскликнула Бусенька, — я могла бы и сама догадаться. Акзюк накарат! Итак, в точке K на ободе сидит Кузька, а в точке K' на другой половине обода сидит Акзюк.

— Почему это он сидит? — вмешалась Огрыза. — Это Кузька сидит. А Акзюку, чтобы все время находиться в точке, симметричной Кузьке, придется бежать по вращающемуся колесу!

— Ну и пусть бежит, — согласилась Бусенька, — он ведь у нас воображаемый. Как бы то ни было, Кузька вместе с точкой K описывает циклоиду, вместе с точкой K движется и точка K' , так что Акзюк тоже описывает некоторую линию.

— Кажется, я где-то видел эту линию, — неуверенно сказал Кузька.

— Конечно, видел. Присмотримся, как мы нарисовали картинку. Мы фактически отложили отрезок OX длиной $r\varphi$ вправо от точки O , поставили на точку X окружность, провели вертикальный диаметр XX' и от радиуса CX отложили угол XCK , равный φ . Полученная точка K лежит на циклоиде. На нашей картинке $\angle K'CX' = \angle KCX' = \pi - \varphi$. Обозначим через O' самую высокую точку на нашей циклоиде. Тогда расстояние $O'X'$ равно $\pi r - r\varphi$. Получается, что мы можем построить точку K' так: отложим от точки O' горизонтальный отрезок $O'X'$ длиной $r(\pi - \varphi)$, подвесим к точке X' колесо, а потом отложим в нашем колесе угол $X'CK'$, равный $\pi - \varphi$.

— Значит, точка K' движется по циклоиде, которая получается, если катить влево по пунктирной прямой колесо, находящееся снизу от нее! — догадался дядя Спятел.

— Я понял! — воскликнул Кузька, — «Акзюк» — это «Кузька» наоборот!

— Да! Теперь считаем площадь. Нарисуем циклоиды, по которым двигались Кузька и Акзюк, получится фигура в виде лепестка. Ясно, что площадь полной арки циклоиды равна площади прямоугольника, в котором помещается половина арки, плюс площадь лепестка (рис.4).

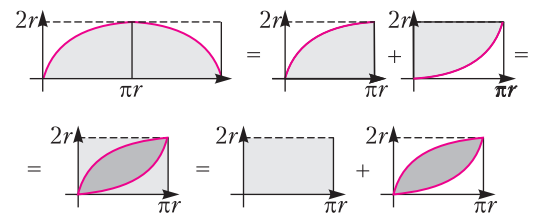


Рис. 4

— С прямоугольником все понятно, — сказала Огрыза, — его площадь равна $2\pi r^2$. А как найти площадь лепестка?

— Для этого применим настоящую средневековую магию! Напомню, в точке K на ободе колеса находится Кузька, а в точке K' на другой части обода — Акзюк. Когда колесо вращается, точка K поднимается выше, и отрезок KK' тоже перемещается вверх. Лепесток между циклоидами состоит из всевозможных отрезков KK' , построенных для всех положений точки K на восходящей ветви циклоиды. Ну так нарисует где-нибудь в сторонке неподвижное колесо и аккуратно перенесем все отрезки KK' по горизонтали так, чтобы их концы оказались

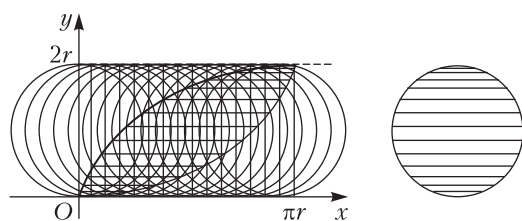


Рис. 5

на окружности (рис.5). Теперь все отрезки занимают круг, ограниченный нашим колесом. Значит, площадь лепестка равна площади круга.

– Какое-то странное объяснение, – усомнился Кузька. – Это доказательство? Разве так можно рассуждать?

– Тебя же предупредили: средневековая магия! – сказал дятел Спятел. – Без специальной подготовки даже не пытайся!

– Если тебе кажется необидительной идея разбивать лепесток на отрезки, давай разобьем его на горизонтальные планочки, – предложила Бусенька. – Сдвинутые планки уже не будут в точности совпадать с кругом, но чем мельче нарежем, тем меньше будет различие между кругом и фигурой, составленной из планочек (рис.6). Так что площадь лепестка все-таки равна площади круга.

– Здорово, – сказал Кузька. – Кажется, я понял. Неужели уже в XVII веке люди были такими умными?

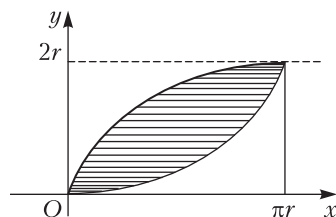
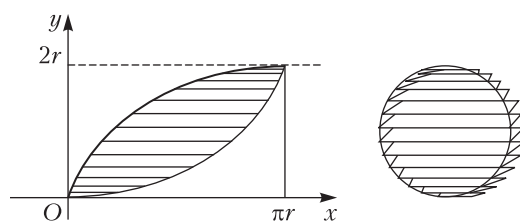


Рис. 6

– Нет, – сказал дятел Спятел.

– Да, – сказала Бусенька. – Площадь арки циклоиды они находили еще ухищреннее.

– Прекрасно, прекрасно, не расслабляемся! – вдруг оживилась Огрыза. – Итак, мы нашли площадь арки циклоиды, она равна $3\pi r^2$. Для нашей арки получается уравнение $3\pi r^2 = 0,7$. Отсюда r равно, эээ, ммм..., r равно 27 сантиметров! В бой!

Через три дня друзья с большими усилиями уложили на кровать новый матрас.

НАМ ПИШУТ

Еще раз о муравье на цилиндре

А.ЗАСЛАВСКИЙ

В статье И.Акулича «Муравей на цилиндре» («Квант» №2 за 2020 г.) обсуждается такая задача: Дан цилиндр с радиусом основания r и высотой h . В точке A , лежащей на окружности нижнего основания цилиндра сидит муравей. Найдите кратчайший путь

муравья в противоположную точку B , лежащую на окружности верхнего основания цилиндра.

В статье справедливо отмечается, что возможными кратчайшими путями являются путь, состоящий из образующей цилиндра AA' и диаметра основания $A'B$, а также путь, идущий по боковой поверхности цилиндра и изображающийся на ее развертке прямой линией. Длина первого пути равна $h + 2r$, второго – $\sqrt{h^2 + \pi^2 r^2}$. Эти значения совпадают при $h = \frac{\pi^2}{4} r$.

Для меньших значений h (такие цилиндры будем называть низкими) короче будет первый путь, для больших (высокие цилиндры) – второй.

Однако найденное значение необходимо сравнить с длинами еще нескольких путей. В статье Акулича рассмотрен один из таких путей, идущий из точки A по боковой поверхности в некоторую точку C окружности верхнего основания, а затем по отрезку CB . Если длина дуги $A'C$ равна φ , то длина такого пути равна $\sqrt{h^2 + \varphi^2} + 2 \cos(\varphi/2)$. В статье Акулича ищутся первая и вторая производные этой функции, а затем показывается, что в точке, в которой первая производная равна нулю, вторая положительна. Из этого следует, что в найденной точке длина пути имеет не минимум, а максимум, т.е. данный путь не может быть кратчайшим.

Но к этому выводу можно прийти без вычисления производных. Если траектория ACB является кратчайшей, она должна при переходе через окружность верхнего основания образовывать с ней равные углы с обеих сторон. Именно это означает найденное Акуличем условие равенства нулю производной, но необходимость этого условия легко понять, представив себе натянутую вдоль пути резинку. Если углы с двух сторон не равны, резинка, сокращаясь, будет сползать в соответствующую сторону.

Таким образом, если сделать развертку боковой поверхности цилиндра и приложить к ней в точке C основание (рис.1), то путь ACB будет изображаться отрезком. Очевидно, что угол между этим отрезком и радиусом OC (а значит, и образующей AA') равен $\varphi/2$, следовательно, $\operatorname{tg}(\varphi/2) = \varphi/h$. Соответственно, $h = \varphi \operatorname{ctg}(\varphi/2)$, а длина пути равна $\varphi/\sin(\varphi/2) + 2 \cos(\varphi/2)$.

Сравним теперь две величины $s_1 = \varphi/\sin(\varphi/2) + 2 \cos(\varphi/2)$ и $s_2 = 2 + h = 2 + \varphi \operatorname{ctg}(\varphi/2)$. Имеем

$$s_1 - s_2 = \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} - 2 \right).$$

Поскольку $\sin(\varphi/2) < \varphi/2$, оба множителя положительны, т.е. $s_1 > s_2$.

Аналогично можно исследовать еще один путь, о котором упоминается в конце статьи Акулича. Он состоит из хорды AD нижнего основания, пути по боковой поверхности в точку C окружности верхнего основания и хорды CB . Так как углы между траекторией и образующими в точках C и D равны, траектория образует равные углы и с проведенными в эти точки радиусами оснований, следовательно, $AD = BC$ (рис.2).

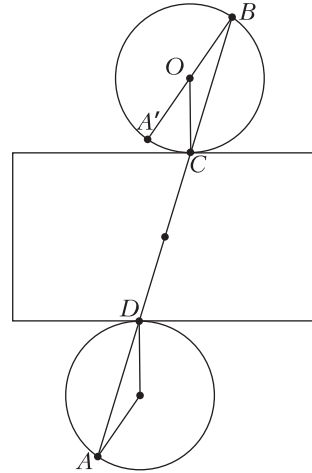


Рис. 2

Предлагаем читателям решить следующие задачи.

Задача 1. При каких h пути такого вида существуют?

Задача 2. Может ли такой путь быть кратчайшим?

Зададимся теперь вопросом, является ли точка B самой далекой от A точкой поверхности цилиндра. Для низких цилиндров ответ на этот вопрос положительный, что вытекает из следующей задачи.

Задача 3. Докажите, что муравей может попасть из любой точки на поверхности цилиндра в любую другую, проползая не больше чем $2 + h$. (Подсказка. Можно ограничиться путями, состоящими из отрезков образующих и хорд оснований.)

Из задачи 3 следует, что для любого цилиндра центры оснований являются наиболее удаленными друг от друга точками поверхности. Но, по крайней мере для низких цилиндров, есть и другие пары точек, для

которых расстояние достигает максимального значения.

При достаточно больших h точка B не будет наиболее удаленной от A . Действительно, для высоких цилиндров кратчайшее расстояние от A до A' равно h , а до противоположной точки $B - \sqrt{h^2 + \pi^2}$. Разность этих величин

$$\sqrt{h^2 + \pi^2} - h = \frac{\pi^2}{\sqrt{h^2 + \pi^2} + h} < \frac{\pi^2}{2h}$$

при росте h стремится к нулю. Таким образом, при достаточно больших h расстояния от A до всех точек окружности верхнего основания примерно равны. Поэтому наиболее удаленная от A точка должна лежать достаточно близко к центру O верхнего

основания. Итак, до некоторого значения h наиболее удаленная от A точка совпадает с B , а затем она начинает двигаться в сторону точки O . Если наиболее удаленная точка единственная, то она лежит на отрезке BO . Но, возможно, существуют две такие точки, симметричные относительно этого отрезка.

Автору не удалось найти точную зависимость положения наиболее удаленной точки от h . Возможно, это получится у читателей.

В заключение рекомендуем читателям ознакомиться со статьей М.Н.Вялого «Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда» в «Математическом просвещении» (№9 за 2005 г). В ней задачи, аналогичные рассмотренным, решаются для поверхности прямоугольного параллелепипеда.

ОЛИМПИАДЫ

XII Международная олимпиада Romanian Master of Mathematics

В конце февраля в столице Румынии Бухаресте вот уже в двенадцатый раз прошла олимпиада Romanian Master of Mathematics (RMM). За годы проведения олимпиада Romanian Master зарекомендовала себя как одно из сложных математических соревнований для школьников во всем мире. Так и было задумано организаторами из математического общества Румынии. По их замыслу, RMM должна была стать аналогом главного математического соревнования, Международной математической олимпиады (IMO), для более узкого круга участников: на RMM ежегодно приглашаются команды около 20 стран, занимающих лидирующие позиции на IMO.

Команду России на RMM представляли:

Данила Дёмин (Сочи, 10 кл.),
Иван Гайдай-Турлов (Москва, 11 кл.),
Максим Туревский (Санкт-Петербург, 9 кл.),
Данил Сибгатуллин (Казань, 10 кл.),
Константин Мясников (Челябинск, 11 кл.).



Слева направо: К.Мясников, М.Туревский. И.Гайдай-Турлов, Д.Сибгатуллин, Д.Дёмин

Наши ребята выступили очень успешно: среди 107 участников олимпиады десять лучших получили золотые медали, и все наши школьники попали в эту «золотую десятку». В командном зачете Россия заняла 1 место и завоевала переходящий главный приз – серебряную тарелку. За все двенадцать про-



шедших олимпиад RMM команда России одерживала победу трижды – в точности с интервалом в 5 лет (2010, 2015 и 2020 годы).

Олимпиада RMM-2020 стала одним из последних очных соревнований до вынужденного перерыва, вызванного эпидемией. Начиная с марта отменились или перешли в дистанционный формат многие олимпиады. Так, Европейская математическая олимпиада среди девушек, которая должна была пройти в апреле в Нидерландах, прошла дистанционно. (Отметим, что в этом мероприятии также победу одержали российские школьницы – см. <https://www.egmo.org/>.) И уже в конце февраля обстановка во многих странах была напряженной: из-за угрозы распространения вируса в Румынию не смогли приехать команды Китая, Южной Кореи, Израиля, Ирана. Школьники из этих стран писали олимпиаду в дистанционном режиме. При этом отметим, что из перечисленных команд только Китай показал результат того же уровня, что и школьники из России.

Подробную информацию об олимпиадах RMM можно найти на официальном сайте <http://rmms.lbi.ro/>

Задачи олимпиады RMM-2020

1. См. задачу M2604 «Задачника «Кванта».
2. Пусть $N \geq 2$ – целое число, и пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$ – последовательности неотрицательных целых чисел. Для каждого $i \in \{1, \dots, N\}$ положим $a_i = a_k$ и $b_i = b_k$, где k – такое число из множества $\{1, \dots, N\}$, что $i - k$ делится на N . Скажем, что $\mathbf{a}$ является $\mathbf{b}$ -гармонической, если a_i равно следующему

среднему арифметическому:

$$a_i = \frac{1}{2b_i + 1} \sum_{s=-b_i}^{b_i} a_{i+s}.$$

Пусть ни одна из последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не является постоянной последовательностью, и при этом $\mathbf{a}$ является $\mathbf{b}$ -гармонической, а $\mathbf{b}$ является $\mathbf{a}$ -гармонической.

Докажите, что в наборе чисел $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ не менее $N + 1$ чисел равны 0.

Великобритания

3. Пусть $n \geq 3$ – целое число. В некоторой стране имеется n аэропортов и n авиакомпаний, выполняющих двусторонние рейсы. Для каждой авиакомпании найдутся нечетное число $m \geq 3$ и m различных аэропортов $c_1, \dots, c_m$ такие, что рейсы этой авиакомпании – это в точности рейсы, соединяющие пары аэропортов: c_1 и c_2 ; c_2 и c_3 ; ...; c_{m-1} и c_m ; c_m и c_1 .

Докажите, что найдется замкнутый маршрут, состоящий из нечетного количества рейсов, в котором никакие два рейса не выполняются одной и той же авиакомпанией.

Израиль

4. Через $\mathbb{N}$ обозначено множество всех целых положительных чисел. Подмножество A множества $\mathbb{N}$ назовем *нескладным*, если для любых чисел x и y (не обязательно различных), принадлежащих A , их сумма $x + y$ не принадлежит A .

Найдите все сюръективные функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что для любого нескладного подмножества $A \subset \mathbb{N}$ его образ $\{f(a) : a \in A\}$ также является нескладным.

Замечание: функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется *сюръективной*, если для любого целого положительного n существует целое положительное m такое, что $f(m) = n$.

Индия

5. Узлом на координатной плоскости назовем точку, обе координаты которой являются целыми числами. Узловым многоугольником назовем многоугольник, у которого все вершины являются узлами.

Пусть Γ – узловый выпуклый многоугольник. Докажите, что Γ содержится в некотором узловом выпуклом многоугольнике Ω таком, что все вершины многоугольника Γ лежат на границе многоугольника Ω и ровно одна вершина многоугольника Ω не является вершиной многоугольника Γ .

Россия, М. Дидин

6. См. задачу M2605 «Задачника «Кванта».

*Публикацию подготовили
К. Сухов, П. Кожевников*

Олимпиада «Ломоносов».

Физика

В 2019/20 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

Отборочный этап

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 7–11 классов мог участвовать в единственном (одном из двух) туре. Задания составлялись раздельно для учащихся младших (7–9) и старших (10–11) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте <http://olymp.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников с 20 по 28 октября 2019 года. Прием решений по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением. Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

Поскольку числовые данные в условиях задач для каждого участника были индивидуальными, приводимые в журнале задачи и решения даны в общем виде.

7–9 классы

1. Одной из характеристик легковых автомобилей, часто приводимых в рекламных проспектах, является так называемое «время разгона до сотни», т.е. минимальное время t_0 , за которое автомобиль, начиная движение из состояния покоя, достигает скорости v_0 . Пусть для рекламируемого автомобиля t_0 известно. Какой путь s проедет этот автомобиль за данное время? Движение автомобиля считайте равноускоренным.

2. Скорость движения лодки относительно воды в n раз больше скорости течения реки. Во сколько раз k больше времени занимает поездка на лодке между двумя пунктами против течения, чем по течению?

3. Слой льда толщиной h имеет температуру $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Какой минимальной толщины x слой воды при температуре t нужно налить на лед, чтобы он полностью растаял? Удельная теплоемкость воды c_v , а ее плотность ρ_v . Удельная теплота плавления льда λ , а его

плотность ρ_d . Потерями тепла можно пренебречь.

4. Ремонтируя по просьбе бабушки перегоревшую электроплитку, школьник, недолго думая, укоротил ее спираль на n (%) первоначальной длины. На сколько процентов k изменилась после такого «ремонта» электрическая мощность плитки по отношению к ее первоначальному значению?

5. Луч света падает в центр верхней грани прозрачного кубика. Чему равен показатель преломления материала кубика n , если максимальный угол падения, при котором преломленный луч еще попадает на нижнюю грань кубика, равен α ?

10–11 классы

1. Шар массой m_1 , скользящий по гладкой горизонтальной поверхности с некоторой скоростью, сталкивается с неподвижным шаром массой m_2 . После абсолютно упругого соударения шары разлетаются со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, отношение модулей которых $v_2/v_1 = n$. Определите угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, если отношение масс шаров $m_2/m_1 = k$. Шары считайте гладкими, а их диаметры одинаковыми.

2. На гладком горизонтальном столе покоится трубка массой M и длиной L , закрытая с одного торца. В открытый конец трубки влетает маленький шарик массой m со скоростью, направленной вдоль оси трубки (рис. 1).

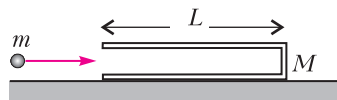


Рис. 1

После упругого удара о закрытый торец трубки шарик вылетает наружу. Какой путь s относительно стола пройдет шарик за время, которое он будет находиться внутри трубки? Размером шарика и трением между всеми поверхностями можно пренебречь.

3. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, pV -диаграмма которого изображена на ри-

сунке 2. Отношение максимального объема газа к минимальному в этом цикле равно n . Найдите коэффициент полезного действия двигателя η .

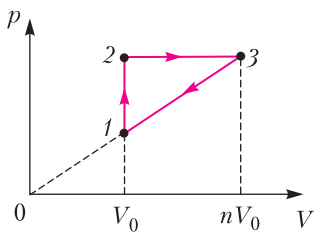


Рис. 2

4. На горизонтальной крышке стола в однородном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого направлен вертикально вниз, лежат два П-образных проводника, изготовленных из тонкой однородной проволоки и соединенных шарнирно друг с другом перемычкой AD , изготовленной из такой же проволоки (рис.3). Длина всех прямолиней-

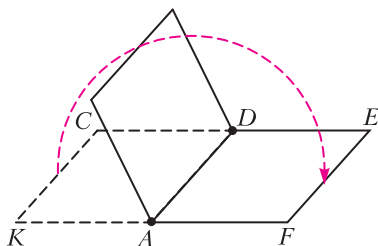


Рис. 3

ных частей проволоки одинакова и равна L . Сопротивление единицы длины проволоки ρ . Модуль индукции магнитного поля B . В некоторый момент времени П-образный провод $AKCD$ начинают медленно поворачивать вокруг перемычки AD . Пренебрегая сопротивлением в шарнирных соединениях, определите заряд q_{AD} , протекший по перемычке AD к тому моменту, когда угол поворота станет равным 180° .

5. Каков должен быть минимальный преломляющий угол призмы ϕ , чтобы ни один из лучей, падающих на одну из ее боковых граней и лежащих в плоскости рисунка 4, не вышел из другой боковой грани? Призма изготовлена из стекла с показателем преломления n .

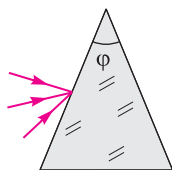


Рис. 4

Заключительный этап

Проведение заключительного этапа олимпиады было назначено на 21 февраля 2020 года. Для учащихся всех классов этот этап

проходил в очной форме на физическом факультете МГУ и на четырех региональных площадках в городах Калининград, Невинномысск, Нур-Султан (Казахстан) и Чебоксары. Задание для учащихся 7–8 а также 9 классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2020 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло также из четырех соответствующих разделов, включающих задачи и уточняющие вопросы по теории.

7–8 классы

1. На горизонтальной крышке стола стоит сплошной медный куб. Какова масса куба m , если он оказывает на крышку стола давление $p = 8$ кПа? Плотность меди $\rho = 8,9$ г/см³. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Ответ приведите в килограммах.

2. Для длительного хранения сжиженных газов обычно используют сосуды Дьюара, в которых постоянная температура поддерживается за счет хорошей теплоизоляции сосуда и свободного испарения жидкого газа при атмосферном давлении. В одном из таких сосудов при хранении $V = 2$ л жидкого азота при температуре $t_{\text{аз}} = -195^\circ\text{C}$ за время $\tau_{\text{аз}} = 24$ ч испарилась ровно половина этого количества азота. После этого жидкий азот удалили из сосуда и положили в сосуд кусочек льда массой $m = 40$ г при температуре 0°C . Определите, через какое время $\tau_{\text{л}}$ лед полностью растает. Удельная теплота парообразования азота $r = 198$ кДж/кг, плотность жидкого азота $\rho = 0,8$ г/см³, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33$ кДж/г. Температура окружающего воздуха $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Считайте, что скорость поступления теплоты через стенки сосуда пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда. Ответ приведите в часах, округлив до одного знака после запятой.

3. Сопротивление обмотки реостата $R = 16$ Ом, длина реостата $L = 20$ см. На каком минимальном расстоянии x от левого

конца реостата должен находиться его движок (рис.5), чтобы сопротивление между точками A и B было равно $R_0 = 3$ Ом? Ответ приведите в сантиметрах.

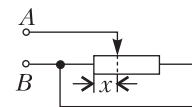


Рис. 5

4. Мальчик, находящийся в точке M (рис.6), хочет пустить солнечный зайчик в

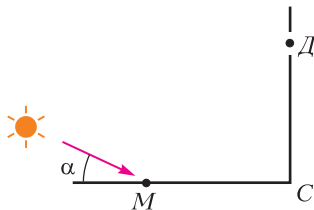


Рис. 6

окно девочки, т.е. в точку D . Под каким углом β к горизонту он должен расположить плоское зеркальце, если расстояние MC между мальчиком и стеной дома равно высоте CD , на которой расположено окно девочки? Солнечные лучи падают под углом $\alpha = 21^\circ$ к горизонту. Считайте, что мальчик располагает зеркальце у поверхности земли. Ответ приведите в градусах.

9 класс

1. Поезд начинает двигаться с постоянным ускорением и проходит начальный отрезок пути разгона, составляющий $1/9$ часть от полного пути разгона, со средней скоростью $v_{\text{ср}} = 10$ км/ч. Какова скорость v поезда в конце пути разгона? Ответ приведите в км/ч и округлите до целых.

2. Трубка с поперечным сечением $S = 3,5$ см², заполненная водяным паром под давлением $p_0 = 2$ кПа, запаяна с двух концов и расположена горизонтально. При этом находящийся в трубке поршень делит трубку на две равные части. Трубку ставят вертикально, в результате чего поршень смещается и объем под ним уменьшается в четыре раза. Найдите массу поршня m , если давление насыщенного водяного пара равно $2p_0$. Трением и толщиной поршня можно пренебречь. Температуру пара считайте постоянной. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Ответ приведите в килограммах.

Указание. Для процессов, проводимых при постоянной температуре над ненасы-

щенным водяным паром, справедливо уравнение $pV = \text{const}$, где p – давление пара, V – его объем.

3. При включении приборов по схеме, изображенной на рисунке 7,а, миллиамперметр показывает ток $I_1 = 12$ мА, а вольтметр – напряжение $U_1 = 9,6$ В. При включении тех же приборов по схеме на рисунке 7,б

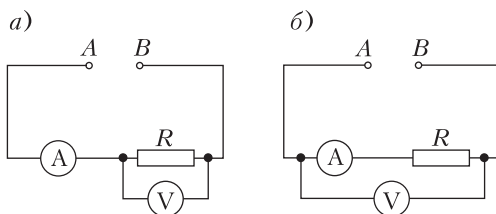


Рис. 7

миллиамперметр показывает ток $I_2 = 10$ мА, а вольтметр – напряжение $U_2 = 12$ В. Определите сопротивление резистора R , считая напряжение между точками A и B неизменным. Ответ приведите в килоомах.

4. В ясный солнечный день рыба плавает в озере глубиной $H = 1,5$ м. Тень от рыбы на дне озера находится при этом на расстоянии $l = 0,7$ м от нее. На какой глубине h плавает рыба, если высота солнца над горизонтом составляет $\alpha = 30^\circ$? Показатель преломления воды $n = 1,33$. Ответ приведите с точностью до сантиметра.

10–11 классы

1. **Задача.** Брусок массой m скользит с постоянной скоростью по гладкому столу и совершает упругое соударение с бруском массой M , который прикреплен достаточно длинной пружиной к неподвижной стенке (рис.8). После удара брусок массой m движется в обратном направлении, а брусок массой M начинает совершать гармонические колебания. Известно, что через время, равное $7/12$ периода колебаний, брусок массой M догнал брусок массой m . Найдите отношение $n = M/m$ масс этих брусков.

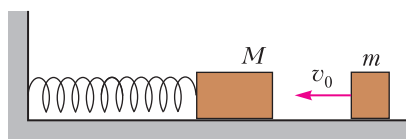


Рис. 8

Вопросы. Дайте определения импульса материальной точки и системы материальных точек. Сформулируйте закон сохранения импульса.

2. Задача. В горизонтально расположенном открытом с одной стороны цилиндре между дном и гладким подвижным поршнем находится влажный воздух при температуре $t = 100^\circ\text{C}$. При этом поршень располагается на расстоянии $h = 35$ см от дна цилиндра. Цилиндр устанавливают вертикально, поддерживая температуру системы постоянной. Через некоторое время поршень занимает новое положение равновесия, сместившись от первоначального положения на $\Delta h = 5$ см. Определите массу Δm сконденсировавшейся воды. Масса поршня $M = 10$ кг, площадь поперечного сечения цилиндрического сосуда $S = 100$ см², атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, молярная масса воды $M = 18$ г/моль. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с², а универсальную газовую постоянную — $R = 8,3$ Дж/(моль · К).

Вопросы. Что такое насыщенный пар? Как зависят давление и плотность насыщенного пара от температуры?

3. Задача. На гладкой горизонтальной поверхности расположено легкое непроводящее кольцо, на котором на одинаковых расстояниях друг от друга закреплены $N = 100$ одинаковых маленьких бусинок массами $m = 10$ мг, несущих каждая заряд

$q = 10^{-7}$ Кл. Кольцо находится в однородном постоянном магнитном поле, индукция $B_0 = 100$ Тл которого направлена вертикально. Сверху над кольцом закреплена кинокамера. Частоту съемки n , измеряемую числом кадров в секунду, можно плавно менять. После выключения магнитного поля кольцо начало вращаться, и его стали снимать на киноплёнку. При каком максимальном значении n кольцо в фильме будет оставаться неподвижным? Считайте, что длительность экспозиции каждого кадра при съемке фильма пренебрежимо мала.

Вопросы. Дайте определение магнитного потока. В чем состоит явление электромагнитной индукции?

4. Задача. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см создает на экране четкое изображение точечного источника света, расположенного на главной оптической оси линзы. Расстояние от линзы до точечного источника $d = 25$ см. Линзу сместили в направлении, перпендикулярном ее оптической оси, на расстояние $h = 3$ см. На какое расстояние L нужно переместить источник света, чтобы его изображение осталось в той же точке экрана?

Вопросы. Запишите формулу тонкой линзы и поясните смысл входящих в нее величин. Чему равно увеличение, даваемое линзой?

Публикацию подготовил
С.Чесноков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №5)

1. $2 \times 505 \times 2 = 2020$.

2. Количество пауков увеличилось на 8.

При применении волшебного ореха либо на 1 увеличивается количество b жуков, либо на 1 уменьшается количество s пауков, т.е. разность $b - s$ всегда увеличивается на 1. При применении волшебного желудя наоборот: либо на 1 уменьшается количество b жуков, либо на 1 увеличивается количество s пауков, т.е. разность $b - s$ всегда уменьшается на 1. Итак, в результате всех операций разность $b - s$ увеличилась на 20 и уменьшилась на 23, значит, в итоге она уменьшилась на 3. Раз b увеличилось на 5, то s увеличилось на $5 + 3 = 8$.



Рис. 1

3. См. рис.1.

Поскольку можно напечатать букву Т, какие-то два угловых кубика убраны. Остальные шесть угловых кубиков должны остаться, так как иначе не получится напечатать К и О. Отсюда получаем, что буквы К и

О расположены на соседних гранях, причем все три кубика, соединяющие эти грани, есть. Теперь букву Т можно расположить только на грани, противоположной букве К. Итак, места 13 из 16 кубиков определены (рис.2). Оставшиеся три должны скрепить конструкцию. Кубики с цифрами 1 и 2 сейчас как бы «висят в воздухе» — они не приклеены ни одной своей гранью к остальным. Причем если их какой-то гранью и можно приклеивать, то только той, на которой мы написали

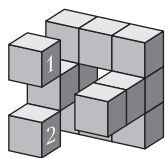


Рис. 2

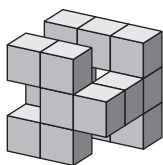


Рис. 3

цифры 1 и 2. Поэтому к этим граням у Миши неминуемо приклеено по кубику. Но эти кубики все еще не делают конструкцию жесткой: пары склеенных только что кубиков продолжают «висеть в воздухе». Мише удалось все закрепить ровно одним добавочным кубиком – значит, он приклеил его к обоим парам. Не испортив букву К, это можно сделать единственным образом (рис.3).

Теперь можно посмотреть на грань, противоположную грани «О», и нарисовать ответ (с точностью до поворота грани).

4. Например, 12769 (рис.4).

Этот пароль удовлетворяет Ваниным требованиям. Посмотрим, как можно соединить без самопересечений его цифры. Цифру 7 с какой-то цифрой соединить надо, это может быть либо 2, либо 6. Пусть, например, мы провели отрезок 7–6. Теперь 9 можно соединить только с 6. Далее неизбежно надо провести отрезки 7–2 и 2–1, и мы получаем линию, изображенную на рисунке. Если бы мы сначала вместо 7–6 провели 7–2, линия получилась бы та же самая. Таким образом, эта линия единственна. *Комментарий.* Интересно, что устраивающий Ваню пароль из четырех цифр придумать невозможно. Не существует и пароля из шести и более цифр. Пятизначных паролей возможно восемь: 12769, 96721, 14389, 98341, 32947, 74923, 78163, 36187. Впрочем, линии для всех восьми паролей одной и той же формы, а отличаются только поворотом, симметрией или направлением вычерчивания.

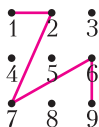


Рис. 4

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №4)

29. $x > y$.

Число, которое прибавляется к 2 в первой дроби, обозначим через a , а во второй – через b , откуда $2 + a < 2 + b$, т.е. $a < b$. Мы свели задачу к неравенству между дробями a и b , у которых этажей стало на 1 меньше, и знак неравенства поменялся. Действуя далее аналогично, мы каждый раз уменьшаем на 1 «этажность» и меняем знак неравенства. От исходных дробей к числам x и y нужно сделать столько таких переходов, сколько чисел в последовательности 1, 3, 5, ..., 2019, т.е. $(2019 + 1)/2 = 1010$ – четное число; знак сменится четное число раз и останется таким же, каким был.

30. 1346.

Среди любых трех подряд идущих чисел можно оставить не больше одного, так как нельзя оставлять пару чисел с разностью 1 или 2: $a + (a + 1):1$ и $a + (a + 2):2$. Поэтому из $2020 = 673 \cdot 3 + 1$ подряд идущих чисел надо убрать не меньше $673 \cdot 2 = 1346$ чисел.

Если оставить только числа, дающие остаток 1 при делении на 3, то столько чисел и будет убрано. Рассмотрим произвольную пару оставшихся чисел. Их разность делится на 3, а сумма не делится, поэтому их сумма не делится на их разность. Следовательно, такой пример удовлетворяет условию.

31. 179.

Рассмотрим один такой красный угол ABC , меньший 179° (вершины A и C синие, а B – красная). Он опирается на дугу, которая по свойству вписанного угла будет меньше 358° . Значит, дуга ABC будет больше 2° . Поскольку градусная мера всей окружности равна 360° , а каждый такой красный угол занимает более 2° , таких углов не больше 179.

Опишем пример со 179 углами. Отметим на окружности 180 синих точек $C_1, C_2, \dots, C_{180}$ по порядку так, чтобы дуги $C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_{179}C_{180}$ были равны по $(359/179)^\circ$, и на каждой дуге поставим по красной точке (рис.5). Поскольку

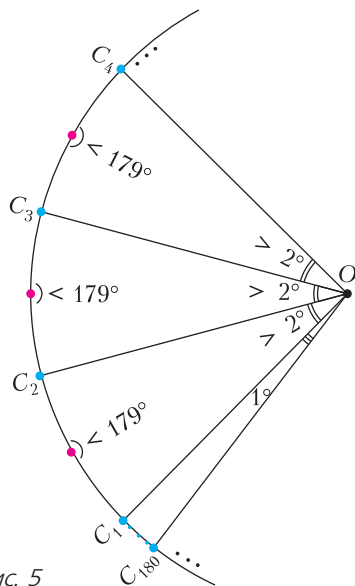


Рис. 5

$359/179 > 358/179 = 2$, углы при этих красных точках будут меньше $(360 - 2)^\circ/2 = 179^\circ$. Остальные точки расположим на оставшейся дуге (величиной в 1°).

32. а) Да.

Разделим плоскость на квадраты со стороной 1 (клетки), центры которых имеют целые координаты. Рассмотрим одну из бесконечных цепочек таких квадратов. Очевидно, что можно всю плос-

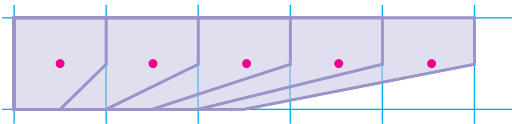
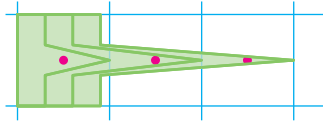


Рис. 6

кость поделить на такие цепочки и замостить их одним и тем же способом. Принцип разбиения одной цепочки понятен из рисунка 6, на нем показаны первые пять из бесконечной последовательности многоугольников. Каждый из них состоит из прямоугольника $0,5 \times 1$ и трапеции с основаниями 0,5 и 1 и высотой 0,5, поэтому площадь каждого многоугольника равна $7/8 < 0,9$.

Комментарий. Модифицировав этот пример, можно добиться того, чтобы площадь многоугольников была меньше любого наперед заданного положительного числа. Идею примера можно понять из рисунка 7.

Рис. 7



б) Нет.

Предположим, что это возможно. Рассмотрим такие же клетки, как в предыдущем пункте. Возьмем квадрат со стороной n , состоящий из целых клеток. Рассмотрим множество M многоугольников, которые его пересекают. Так как их диаметр не больше d , то все они лежат целиком внутри одного квадрата со стороной $n + 2d$, а значит, каждый из них содержит целую точку внутри квадрата со стороной $n + 2d$ и их количество не превышает $(n + 2d)^2$.

Оценим суммарную площадь S многоугольников множества M . С одной стороны, их объединение покрывает квадрат со стороной n , значит, $S \geq n^2$. С другой стороны, в M не больше $(n + 2d)^2$ многоугольников и у каждого из них площадь не больше 0,9, тогда $S \leq 0,9(n + 2d)^2$. Получаем неравенство $n^2 \leq 0,9(n + 2d)^2$.

В начале решения мы ничего не сказали о том, каким выбрать число n . Выберем его таким, чтобы это неравенство не выполнялось, тем самым получим противоречие. Начиная с какого-то значения n значение квадратичной функции n^2 будет всегда больше значения квадратичной функции $0,9(n + 2d)^2$. Для того чтобы сделать такой вывод, достаточно сравнить их коэффициенты при старших членах: $1 > 0,9$.

Можно это объяснить и более элементарно: убедившись, например, что при $n > 100d$ неравенство $n^2 \leq 0,9(n + 2d)^2$ не соблюдается. Есть разные способы это сделать. Можно упростить неравенство, сведя вопрос к изучению одной квадратичной функции.

Комментарий. Аналогичное решение будет работать и в том случае, если вместо 0,9 будет любое другое число, меньшее 1.

в) Да.

Снова предъявим последовательность многоугольников, замощающих цепочку клеток. Покажем, как разделить эту полоску на прямоугольники с требуемым свойством. Расположим полоску, как на рисунке 8, и первый вертикальный разрез проведем на $\frac{1}{4}$ правее центра первой клетки этой полоски. Второй разрез проведем на $\frac{1}{8}$ правее центра второй клетки, третий разрез — на $\frac{1}{16}$ правее центра третьей клетки и т.д. На рисунке 8

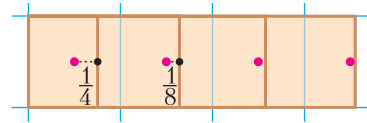


Рис. 8

показаны первые четыре прямоугольника этой последовательности.

Из построения видно, что внутри каждого прямоугольника будет лежать центр одной из клеток и что горизонтальная сторона каждого прямоугольника меньше 1. А значит, площадь каждого прямоугольника меньше 1 и диаметр меньше $\sqrt{2}$.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» №4)

Вопросы и задачи

1. а) Скорость лодки относительно берега $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_л$ должна составлять наибольший угол с берегом. Это возможно при условии $\vec{v}_л \perp \vec{v}$ (рис.9).

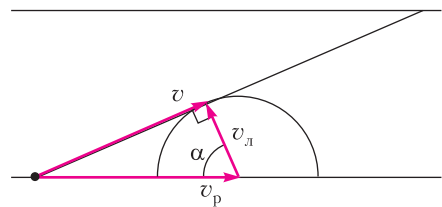


Рис. 9

Тогда $\cos \alpha = \frac{v_л}{v_p}$.

б) В этом случае снос будет таким же, как для реки с постоянной скоростью $v_p = 0,5v_0$. Тогда $\cos \alpha = \frac{2v_л}{v_0}$.

2. Из рисунка 10 находим: $u = \frac{v}{\cos \alpha}$. Проверка: при $\alpha \rightarrow 0$ имеем $u \rightarrow v$, как и должно быть.

3. Заменяя векторы скоростей векторами перемещений в единицу времени, можно получить новые

положения как спиц, так и колечка, а значит, и найти его скорость (рис.11).

4. В любой момент времени жуки будут находиться в вершинах «сжимающегося» квадрата $A'B'C'D'$, имеющего общий центр с исходным квадратом (рис.12). Отрезок $A'O$ будет уменьшаться со скоростью, равной составляющей скорости $\vec{v}$, направленной к центру O . Время до встречи в точке O будет равно $t = \frac{2a\sqrt{2}}{2v\sqrt{2}} = \frac{a}{v}$.

5. За равные промежутки времени Δt вектор скорости будет испытывать одинаковые приращения, равные $g\Delta t$ и расположенные на вертикальной прямой (рис.13).

6. Ускорения тел относительно земли одинаковы и равны g , поэтому относительная скорость камней не меняется и остается равной v_0 , а время их сближения равно $t = \frac{L}{v_0}$.

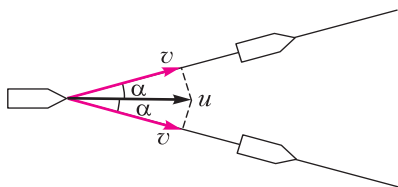


Рис. 10

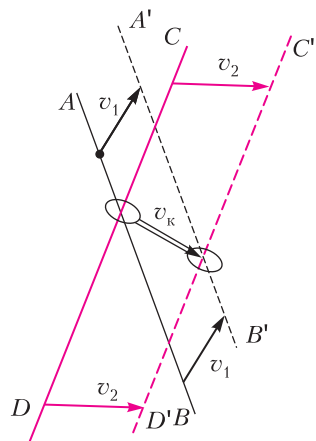


Рис. 11

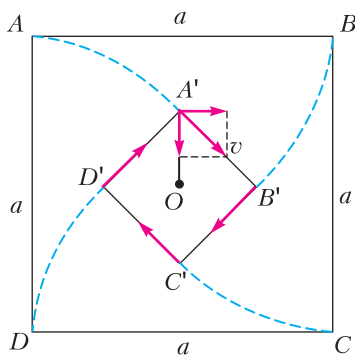


Рис. 12

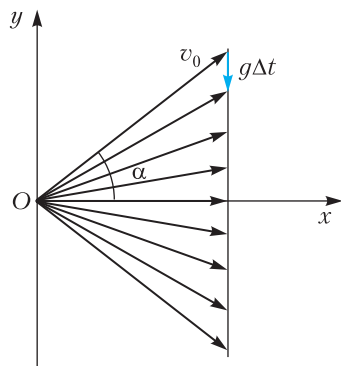


Рис. 13

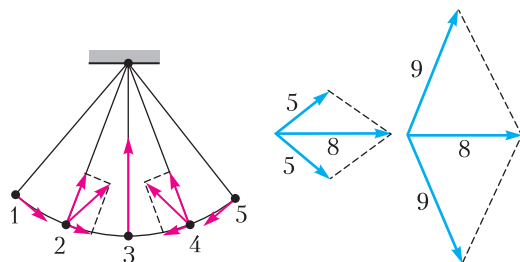


Рис. 14

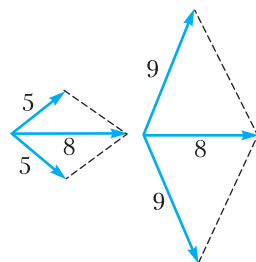


Рис. 15

7. В крайних точках 1 и 5 грузик имеет только касательное (тангенциальное) ускорение, в нижней точке 3 — только центростремительное (нормальное) ускорение, в промежуточных точках 2 и 4 имеются обе составляющие полного ускорения (рис.14).

8. Возможны 3Н и 4Н (воспользуйтесь правилами векторного сложения).

9. Можно (рис.15).

10. Нормальная реакция опоры $\vec{N}$ приложена в точке пересечения линий действия сил $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{тр}$, чтобы суммарный момент всех сил был равен нулю (рис.16).

11. Выталкивающая сила $\vec{F}_A$, действующая на шарик со стороны воздуха, будет направлена против эффективного ускорения $\vec{g}'$ (рис.17). Шарик отклонится вперед по ходу вагона.

12. Мощность P силы тяжести определяется скалярным произведением векторов $m\vec{g}$ и $\vec{v}$: $P = mgv \cos \alpha$ (рис.18). В точках 0 и 2 мощность достигает максимального по модулю значения, в точке 1 — минимального.

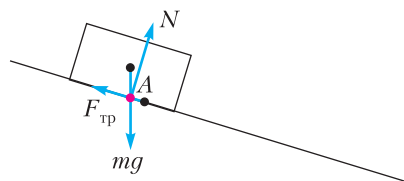


Рис. 16

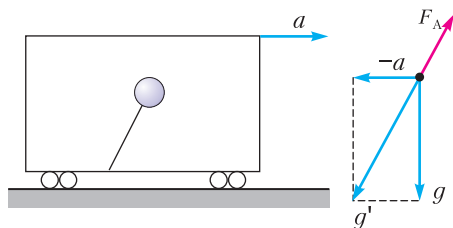


Рис. 17

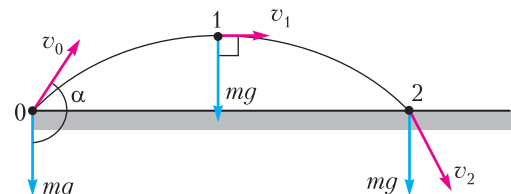


Рис. 18

13. Вообще говоря, нет. Например, если поля E_1 и E_2 взаимно уничтожают друг друга, то энергия суммарного поля E будет равно нулю.

14. Нет, так как для нее не определены операции, которым должны подчиняться векторные величины.

15. Полная магнитная индукция равна $\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_b$. Отсюда $B_r = \sqrt{B^2 - B_b^2} \approx 0,37B$, т.е. примерно 37% от B .

16. Скорость сближения человека и его изображения в зеркале равна $2u$. Значит, скорость изображения относительно земли равна $\sqrt{v^2 + (2u)^2}$.

17. Импульс $\vec{p}_1$ фотона, падающего на зеркальную половину, изменяется вдоль направления радиуса спутника, что не приводит к его закручиванию (рис.19). Если же фотон с импульсом $\vec{p}_2$ падает на черную половину, то спутник получает

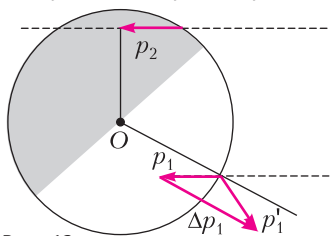


Рис. 19

закручивающий импульс, так что удары фотонов рано или поздно развернут его зеркальной половиной к Солнцу.

Микроопыт

Первое допущение: масса ноги во много раз больше массы мяча. Второе допущение: удар считается близким к абсолютно упругому. В таком случае в системе отсчета, связанной с ногой, мяч летит навстречу ей со скоростью $-v$ и отскакивает со скоростью v . При переходе к земной системе отсчета к скорости отскока следует прибавить скорость ноги v . Таким образом, $u = 2v$.

Олимпиада «Ломоносов». Физика

Отборочный этап

7–9 классы

$$1. s = \frac{v_0 t_0}{2}.$$

$$2. k = \frac{n+1}{n-1}.$$

3. Выделим на поверхности льда площадку площадью S . Масса льда, находящегося в пределах этой площадки, $m_l = Sh\rho_l$. Количество теплоты, требующееся для плавления льда, $Q_1 = Sh\rho_l\lambda$. Количество теплоты, которое отдаст налитая на лед вода массой $m_b = Sx\rho_b$ при остывании до температуры плавления льда, $Q_2 = Sx\rho_b c_b (t - t_0)$. Согласно уравнению теплового баланса, $Q_1 = Q_2$. Отсюда находим

$$x = h \frac{\lambda \rho_l}{c_b \rho_b (t - t_0)}.$$

$$4. k = \frac{n}{1 - n/100\%}.$$

5. Угол падения на верхнюю грань кубика, удовлетворяющий условию задачи, достигает максимального значения, если совместить плоскость падения с диагоналями верхней и нижней граней кубика (рис.20). В этом случае преломленный в центре верхней грани кубика луч проходит через вершину нижней грани, и угол преломления этого луча удовлетворяет условию $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, или $\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. По закону преломления

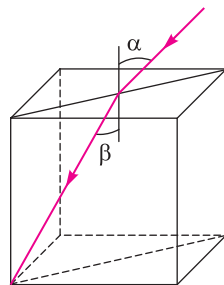


Рис. 20

$\sin \alpha = n \sin \beta$ получаем

$$n = \sqrt{3} \sin \alpha.$$

10–11 классы

1. Из законов сохранения импульса и энергии имеем $m_1 \vec{v}_0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$, $\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$. Из этих равенств следует, что $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + k \vec{v}_2$, $v_0^2 = v_1^2 + k v_2^2$. Возводя первое равенство в квадрат

и учитывая, что квадрат модуля вектора равен скалярному произведению вектора самого на себя, имеем $\vec{v}_0^2 = (\vec{v}_1 + k\vec{v}_2)^2 = v_1^2 + k^2 v_2^2 + 2k(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$. Сравнивая этот результат с равенством, следующим из закона сохранения энергии, получаем, что $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \frac{1-k}{2} v_2^2$. Скалярное произведение векторов равно произведению модулей векторов на косинус угла между ними, т.е. $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = v_1 v_2 \cos \alpha$. Следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{n(1-k)}{2}, \text{ и } \alpha = \arccos \frac{n(1-k)}{2}.$$

2. Пусть начальная скорость шарика v_0 . Из законов сохранения импульса и кинетической энергии в системе «шарик + трубка» следует, что $mv_0 = MV + mv$, $mv_0^2 = MV^2 + mv^2$, где V и v – скорости трубки и шарика после соударения. Из этой системы находим $V = \frac{2m}{M+m} v_0$, $v = \frac{m-M}{M+m} v_0$. Поскольку относительная скорость этих тел после удара $V_{\text{отн}} = V - v = v_0$, время, которое шарик движется после соударения внутри трубки, $\tau = \frac{L}{V_{\text{отн}}} = \frac{L}{v_0}$. За это время он проходит путь $s' = |v|\tau = \frac{|m-M|}{M+m} L$. Полный путь, пройденный шариком относительно стола, равен

$$s = L + s' = L \left(1 + \frac{|m-M|}{M+m} \right).$$

3. Работа газа в циклическом процессе равна $A = \frac{1}{2}(np_1 - p_1)(nV_0 - V_0) = \frac{1}{2}(n-1)^2 p_1 V_0$, где p_1 и V_0 – давление и объем газа в точке 1. Газ получает тепло на участках 1–2 и 2–3, поэтому полное количество теплоты, полученное газом за цикл, равно $Q_{\text{п}} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_2)$, где ν – число молей газа. Используя уравнение состояния газа, это выражение можно преобразовать к виду $Q_{\text{п}} = \frac{1}{2} p_1 V_0 (n-1)(3+5n)$. Коэффициент полезного действия цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{п}}} = \frac{n-1}{3+5n} \cdot 100\%.$$

4. Из условия задачи следует, что к моменту, когда угол поворота куска провода $AKCD$ станет равным 180° (см. рисунок к условию), изменение потока магнитного поля, пронизывающего контур $AKCD$, будет $\Delta\Phi = 2BL^2$. Во время поворота ЭДС индукции возникает только в отрезке KC , поэтому за время поворота по отрезку KC протекает

заряд $\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R}$, где R – сопротивление цепи, состоящей из Π -образного контура $AKCD$ с сопротивлением $3r$ и последовательно подключенного к нему контура $AFED$ с сопротивлением $3r/4$, где $r = \rho L$. Следовательно, $R = 3\rho L + \frac{3\rho L}{4} = \frac{15\rho L}{4}$. Так как отрезок AD соединен параллельно Π -образному контуру $DEFA$, отношение зарядов, протекших по отрезку AD и Π -образному контуру $DEFA$, равно $\frac{q_1}{q_2} = 3$, а сумма этих зарядов равна Δq . Значит, $q_{AD} = q_1 = \frac{3\Delta q}{4}$. Окончательно получаем

$$q_{AD} = \frac{2BL}{5\rho}.$$

5. Рассмотрим луч, падающий на боковую грань призмы под углом $\alpha = 90^\circ$ (рис. 21). Угол преломления β_1 этого луча определяется равенством $\sin \beta_1 = 1/n$. Пусть преломляющий угол призмы φ таков, что угол падения рассматриваемого луча на другую боковую грань призмы $\beta_2 = \beta_1$. Поскольку $\varphi = \beta_1 + \beta_2$, изображенный на рисунке ход луча имеет место,

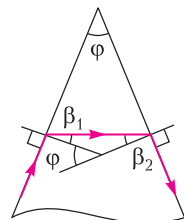


Рис. 21

если $\varphi = 2 \arcsin \frac{1}{n}$. Таким образом, для луча, падающего на боковую грань призмы под углом $\alpha = 90^\circ$, условие задачи выполнено при $\varphi > 2 \arcsin \frac{1}{n}$. При этом лучи, падающие на боковую грань призмы под меньшими углами, а также все лучи, падающие по другую сторону от нормали к боковой грани, тоже не выйдут из другой ее боковой грани. Окончательный ответ:

$$\varphi_{\min} = 2 \arcsin \frac{1}{n}.$$

Заключительный этап

7–8 классы

$$1. m = \frac{p^3}{\rho^2 g^3} \approx 6,46 \text{ кг}.$$

$$2. \tau_{\text{л}} = \frac{2\lambda m(t_0 - t_{\text{аз}})}{\rho r V(t_0 - 0^\circ \text{C})} \tau_{\text{аз}} \approx 21,5 \text{ ч}.$$

$$3. x = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4R_0}{R}} \right) = 5 \text{ см}.$$

4. Ход луча света, падающего на зеркальце и после отражения от него попадающего в окно девочки, изображен на рисунке 22, где нормаль к поверхности зеркальца показана штриховой ли-

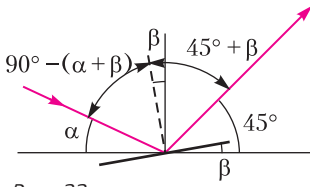


Рис. 22

нией. Из рисунка видно, что угол падения солнечного луча на зеркальце равен $90^\circ - (\alpha + \beta)$, а угол отражения от него $45^\circ + \beta$. По закону отражения, $90^\circ - (\alpha + \beta) = 45^\circ + \beta$. Отсюда

$$\beta = \frac{45^\circ - \alpha}{2} = 12^\circ.$$

9 класс

1. $v = 6v_{\text{ср}} = 60 \text{ км/ч}$.

2. При перемещении поршня давление пара в нижней части трубки увеличится до величины $2p_0$, после чего будет оставаться постоянным. При этом часть пара сконденсируется. Пар над поршнем можно считать идеальным газом. Обозначим через V_0 половину объема трубки. Тогда, согласно закону Бойля–Мариотта, $p_0 V_0 = p_1 \left(V_0 + \frac{3}{4} V_0 \right)$. Следовательно, давление пара над поршнем $p_1 = p_0 \frac{V_0}{V_0 + 3V_0/4} = \frac{4}{7} p_0$. Из условия равновесия поршня имеем $p_1 S + mg = 2p_0 S$.

Объединяя записанные выражения, получаем

$$m = \frac{10}{7} \frac{p_0 S}{g} = 0,1 \text{ кг}.$$

3. $R = \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1} = 1 \text{ кОм}$.

4. Построим ход солнечного луча, падающего на рыбу, и определим местонахождение тени от нее на дне озера (рис.23). Обозначим через x расстояние от рыбы до дна озера. Тогда $h = H - x$. Из закона преломления света получим $\sin \beta = \sin(\pi/2 - \alpha)/n = \cos \alpha/n$. С другой стороны, $\sin \beta = \sqrt{l^2 - x^2}/l$. Решая систему из двух

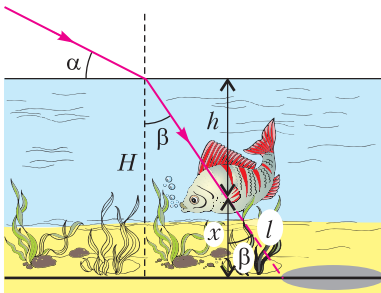


Рис. 23

уравнений, получим, что $x = \frac{l}{n} \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}$. Отсюда находим

$$h = H - l \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{n^2}} = 97 \text{ см}.$$

10–11 классы

1. Пусть начальная скорость бруска массой m равна v_0 . Используя законы сохранения импульса и механической энергии при упругом ударе, находим, что после соударения модули скоростей брусков массами m и M равны $v = \frac{M-m}{M+m} v_0$ и $u = \frac{2m}{M+m} v_0$ соответственно. Будем использовать координатную систему с началом в точке соударения брусков и осью x , направленной вправо. Тогда закон движения бруска массой M после соударения имеет вид $x_M = -\frac{u}{\omega} \sin \omega t$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$,

k – жесткость пружины, а закон движения бруска массой m определяется выражением $x_m = vt$.

Введем обозначения $A = \frac{2m}{M+m} \frac{v_0}{\omega}$, $V = \frac{M-m}{M+m} \frac{v_0}{\omega}$, $\tau = \omega t$. Тогда законы движения брусков можно записать в виде $x_M(t) = -A \sin \tau$ и $x_m(t) = V\tau$ и изобразить на рисунке 24. Условие, при котором

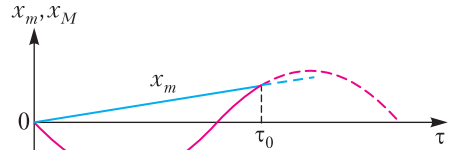


Рис. 24

брусок массой M догонит брусок массой m в момент времени τ_0 , определяется равенством $x_M(\tau_0) = x_m(\tau_0)$. Учитывая, что $\tau_0 = \omega \cdot \frac{7}{12} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{7\pi}{6}$, находим

$$n = \frac{M}{m} = 1 + \frac{6}{7\pi} \approx 1,273.$$

2. Если количество сухого воздуха обозначить через ν , начальную массу водяного пара через $(m + \Delta m)$, давление сухого воздуха в горизонтальном цилиндре через p_{c1} , а давление водяного пара в горизонтальном цилиндре через p_n , то по условию задачи $p_{c1} + p_n = p_0$. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона выполняются соотношения $p_{c1} S h = \nu R T$ и $p_n S h = \frac{m + \Delta m}{M} R T$, где

$T = t + 273$. При установке цилиндра в вертикальное положение поршень сместится вниз на расстояние Δh . Пренебрегая объемом сконденсировавшейся воды, для этого случая получим $p_{c2}S(h - \Delta h) = \nu RT$, $p_{c2} + p_{\text{нп}} = \frac{Mg}{S} + p_0$, $p_{\text{нп}}S(h - \Delta h) = \frac{m}{M}RT$, где p_{c2} – давление сухого воздуха в вертикальном цилиндре, $p_{\text{нп}}$ – давление насыщенного пара, равное p_0 , так как $t = 100^\circ\text{C}$. Из полученных соотношений находим

$$\Delta m = \frac{M}{RT} (p_0 S \Delta h - Mg(h - \Delta h)) \approx 0,12 \text{ г.}$$

3. На каждую заряженную бусинку действуют силы натяжения кольца, силы кулоновского отталкивания от остальных бусинок и силы со стороны вихревого электрического поля, возникающего при изменении магнитного потока через плоскость кольца. Для каждой бусинки сумма сил натяжения кольца и сил кулоновского отталкивания равна нулю. Вихревое электрическое поле, напряженность E которого направлена по касательной к кольцу, вызывает вращение кольца. По закону электромагнитной индукции (закону Фарадея), $\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где $\mathcal{E} = E \cdot 2\pi r$ – ЭДС

индукции, $\Phi = B\pi r^2$ – магнитный поток, пронизывающий кольцо, r – радиус кольца. Имеем $E \cdot 2\pi r = -\frac{\Delta B}{\Delta t} \pi r^2$. По второму закону Ньютона

для каждой бусинки, $m r \Delta\omega = q E \Delta t$. Отсюда получаем, что $\Delta\omega = -\frac{q}{2m} \Delta B$, значит, конечная угловая скорость кольца $\omega_0 = \frac{q B_0}{2m}$.

Поскольку камера производит съемку с частотой n кадров в секунду, промежуток времени между кадрами равен $1/n$ секунды. Если за это время

кольцо поворачивается на угол, кратный $\frac{2\pi}{N}$ радиан, то в фильме бусинки на кольце будут казаться неподвижными. Таким образом,

$\omega_0 = \frac{2\pi n}{N} k$ и $n = \frac{\omega_0 N}{2\pi k}$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Максимальное значение n соответствует $k = 1$, поэтому

$$n_{\text{max}} = \frac{q B_0 N}{4\pi m} \approx 8 \text{ с}^{-1}.$$

4. Пусть f – расстояние от линзы до экрана. При перемещении линзы это расстояние не меняется. Следовательно, расстояние от источника света до линзы тоже не должно меняться, иначе на экране не получится его четкое изображение. Значит, источник нужно переместить перпендикулярно оптической оси в ту же сторону так, чтобы луч,

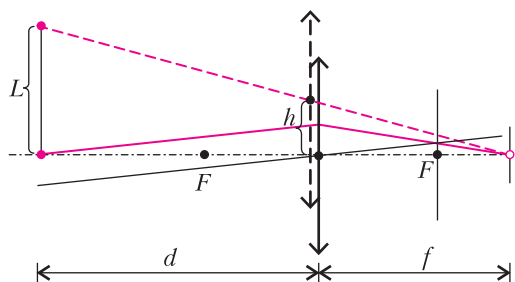


Рис. 25

идущий через оптический центр перемещенной линзы попадал в ту же точку на экране (рис.25).

Из подобия треугольников получим $\frac{f}{h} = \frac{d+f}{L}$. Из формулы тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Решая систему двух уравнений, находим

$$L = \frac{dh}{F} = 7,5 \text{ см.}$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 201749

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40**

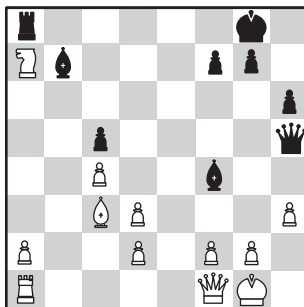
Плоды МАШИННОГО ПРОСВЕЩЕНИЯ-2

Сегодня мы продолжим изучение шахматного творчества AlphaZero и посмотрим, какие дебюты предпочитает искусственный интеллект, играя черными. Выбор его схож с дебютным репертуаром ведущих гроссмейстеров – на 1. e4 программа неизменно отвечает 1...e5, а в ответ на 1. d4 – 1...d5 2. c4 e6, стремясь к защите Нимцовича после 3. d3 d4 или к защите Рагозина после 3. d3 d5 4. d3 d4. В матче с программой Stockfish в «черных» партиях AlphaZero чаще всего встречалась испанская партия. Однако самыми интересными оказались партии, в которых белые на третьем ходу выводили слона на c4.

Stockfish – AlphaZero Лондон, 2018

1. e4 e5 2. d3 d6 3. d4 d5 4. d5 d6 5. ed a5 6. b5+ c6 7. dc bc 8. d3. Современная дебютная теория рассматривает 8. d2 как наиболее перспективный путь к получению преимущества за белых. 8...d5 9. d3 d6 10. 0-0 f4. Черные жертвуют вторую пешку, рассчитывая воспользоваться слабостью возникающих сдвоенных пешек на линии d, мешающих развитию ферзевого фланга. 11. e1 d3 12. cd 0-0 13. e5 c5 14. d3 d4 15. b3 e8 16. d4 d4 17. e8+. Новинка. В играх по переписке встречалось 17. dc e1 18. e1 h2 19. h2 h4 20. g1 g2 с ничьей. 17...e8 18. bc e6 19. b2 b8 20. b5 g6 21. f1 f4 22. a7 h6 23. c3 h5 24. h3 a8.

Позиция выглядит перспективной для черных, однако у белых 3 лишние пешки, и следующий ход может вызвать некоторое замешательство у читателя. 25. d1. Почему не 25. b5, зачем белые добровольно отда-

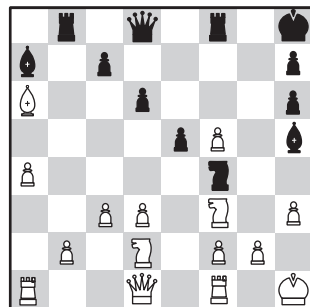


ют коня? Ответ изумляет: 25...f3!! Слона брать нельзя: 26. gf a6 27. h1 g6 с угрозой h3. И при наилучшем 26. g3 также решает перевод ладьи: 26...a6 27. h2 h4 28. g1 g6 29. a5 g5 30. d8 f6, и белые беззащитны перед угрозой h3+ с последующим h5x. 25...d1+ 26. d1 a7. Имея лишнего слона, черные технично довели дело до победы: 27. a1 c6 28. a4 a4 29. a4 a4 30. f1 b3 31. e2 d6 32. e3 e7 33. e5 f6 34. c7 f7 35. b6 e6 36. e2 d7 37. e1 c6 38. a5 h5 39. f1 d7 40. b6 c2 41. e2 c6 42. a5 d6 43. d4 cd 44. d3 a4 45. h4 b7 46. f1 d7 47. e2 a6 48. d8 f5, и белые сдались.

Stockfish – AlphaZero Лондон, 2018

1. e4 e5 2. d3 d6 3. d4 d5 4. d3 a6!? AlphaZero выбирает крайне необычный порядок ходов, как правило здесь играют f6 или d6. 5. d5 h6 6. 0-0 d6 7. a4!? На этом дебютная теория в данной партии заканчивается. 7...g4 8. f3 0-0 9. h3 h5 10. c3 h8. Приоткрывая завесу тайны серии экстравагантных ходов в дебюте, черные начинают атаку на королевском фланге и готовят ход f5. 11. h6 gh 12. b2 d2 a7 13. d5 e7 14. b7 b8 15. a6 f5! Черные последовательны: атака на королевском фланге важнее пешки b2. 16. h1 g6 17. ef f4.

18. d4 f5 19. c2 f8 20. a6 f6 21. e3 g7 22. g1 d5



23. b5 (23. e1 вело к потере фигуры после 23...ed 24. cd b4 25. c4 d5, поэтому белые вынуждены отдать качество) g6 24. c1 e3. Поскольку черные пожертвовали две пешки, то на доске после выигрыша качества формально возник материальный баланс, однако постепенно AlphaZero смогла переиграть своего оппонента, потратив на это еще более 70 ходов. Оставшуюся часть партии приводим без комментариев: 25. fe f7 26. f1 d5 27. c4 a8 28. a5 e4 29. h2 g5 30. b4 e3 31. d4 g5 32. e1 h5 33. e3 h4 34. e6 c6 35. c4 d5 36. b5 b7 37. b3 bc8 38. a6 a8 39. a4 b6 40. g1 g3 41. g3 hg 42. a1 f2 43. ddf1 e2 44. f5 g8 45. d1g3 d2 46. f1 a5 47. f2 f2 48. f2 c3 49. h4 f8 50. e3 e1 51. e2 g3 52. g3 g8 53. f2 g4 54. d1 e3+ 55. f3 d4 56. e2 b4 57. e3 d4+ 58. d3 b2+ 59. e1 b3 60. h5 d2 61. d1 b5 62. f4 a5 63. g3 a6 64. d3 d5 65. d2 f7 66. g4 g7 67. f2 a8 68. e2 a4 69. d1 d4+ 70. e3 b4 71. d3 b1 72. d2 b6 73. e3 e6+ 74. d2 d6 75. c3 g6 76. f2 f6 77. h3 d7 78. e2 e6 79. d2 b6 80. f2 d5 81. d3 b4 82. f5 h6 83. e3 f7 84. d3 b5 85. d7 a5 86. c6 f8 87. e4 e7 88. f3 d6 89. f2 g6 90. h5 b1 91. d1 h7 92. b2 e7 93. c4 a6 94. e5 f6 95. d7+ e7 96. e2 e6+ 97. f2 e7, и белые сдались.

А. Русанов

КУРИНОЕ ЯЙЦО КАК ФИЗИЧЕСКИЙ ПРИБОР

Оказывается, в свойствах куриного яйца проявляются законы
и механики, и молекулярной физики, и электростатики...



Уроки с физикой

(Подробнее – на с. 9 внутри журнала)

ISSN 0130-2221 20006



9 770130 222207