

Летняя школа «Современная математика»,  
Дубна, июль 2009

Пьер Деорнуа

# Комбинаторная теория игр

Москва  
Издательство МЦНМО  
2017

УДК 519.83

ББК 22.18

Д34

**Деорнуа П.**

Д34 Комбинаторная теория игр. — М.: МЦНМО, 2017. — 40 с.  
ISBN 978-5-4439-1172-4

Оказывается, позициям в самых разных играх можно сопоставить своеобразные числа, оценивающие положение игроков. Возникающие «сюрреальные числа» включают в себя все действительные числа (но не только). В брошюре рассказывается, как возникающая теория помогает проанализировать ним, хакенбуш и другие игры.

Брошюра написана по материалам лекций, прочитанных автором на летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2009 года. Она доступна школьникам старших классов.

ББК 22.18

12+

Перевод с английского

*М. А. Веретенниковой, Н. С. Медянкина,*

*М. А. Раскина, А. С. Трепалина и В. А. Клепцына*

ISBN 978-5-4439-1172-4



9 785443 911724 >

© П. Деорнуа, 2017

© МЦНМО, 2017

## Введение

Мы расскажем, как можно изучать простые комбинаторные игры, сопоставляя позициям некоторые довольно странные «числа», которые оценивают положение игроков.

При этом возникает ещё одна конструкция для натуральных и двоично-рациональных чисел, а также так называемых *сюрреальных чисел* Конвея (включающих все действительные числа — но не только). На это можно смотреть как на альтернативное определение чисел, в котором классическая цепочка включений

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

заменяется на цепочку

$\mathbb{Z} \subset$  двоично-рациональные числа  $\subset$  сюрреальные числа.

Всё, что будет рассказано ниже, изложено в замечательных книгах Берлекампа, Конвея и Гая [1] и Конвея [3]. На русском языке кое-что о сюрреальных числах можно узнать из главы 4 книги Гарднера [5], а также из книги Кнута [6]. Я рекомендую начать с [1], а потом посмотреть полное изложение теории в [3].

Этот текст является расширенными записками мини-курса, прочитанного автором в июле 2009 года на Летней школе «Современная математика» в Дубне.

\* \* \*

Игры, которые мы будем изучать, обладают следующими свойствами:

- играют два игрока (далее мы будем называть их Левым и Правым);
- имеется набор позиций и правила, определяющие, в какие позиции разрешается делать ход из данной;
- обоим игрокам известна вся информация (нет никаких спрятанных карт и невидимых противнику ходов, а правила известны обоим игрокам);
- в игре нет никакой случайности (ни бросания кубика, ни перетасовки карт);
- игра всегда заканчивается за конечное число шагов (при этом конечности множества всех позиций мы, вообще говоря, не предполагаем!);
- всегда есть победитель — ничьих не бывает.

Нам будет удобно считать, что ходы делаются по очереди и что тот, кто не может сделать хода, проигрывает.

**Определение 1.** Будем называть *игрой* (возможно, бесконечное) множество  $G$  («позиции») вместе с выделенным элементом  $g_0$  («начальная позиция») и зафиксированными для каждой позиции  $g \in G$  двумя подмножествами  $g^L, g^R \subset G$  («допустимые ходы Левого и Правого из позиции  $g$ »). При этом потребуем ещё, чтобы любая цепочка допустимых ходов имела конечную длину (в частности, не существует циклов из разрешённых ходов).

Два игрока играют в такую игру, начиная с начальной позиции и каждый раз делая по допустимому ходу; проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Последнее условие в определении игры гарантирует, что с какой бы позиции мы ни начинали, партия завершается за конечное время.

**Предложение 0.1.** Пусть даны позиция и начинающий игрок. Тогда у одного из двух игроков всегда имеется выигрышная стратегия, т. е. он может выиграть независимо от действий противника.

Если множество позиций в игре конечно, то это утверждение почти очевидно. Можно доказать его и для игр с бесконечным числом позиций, удовлетворяющих нашему определению.

Дальше мы будем говорить, что игрок *выигрывает*, если он обладает выигрышной стратегией. Для одной и той же игры (позиции) посмотрим, как меняется выигрывающая сторона в зависимости от того, кто начинает.

**Предложение 0.2.** Для любой позиции реализуется ровно одна из следующих возможностей:

- Левый обладает выигрышной стратегией вне зависимости от того, кто начинает;
- Правый обладает выигрышной стратегией вне зависимости от того, кто начинает;
- начинающий игрок обладает выигрышной стратегией;
- второй игрок обладает выигрышной стратегией.

Отметим, что в определении для нас важно только то, какие для каждой из позиций имеются множества допустимых ходов. Поэтому можно переформулировать определение игры в следующем рекурсивном виде.

**Определение 2.** Игра  $g$  — это два множества:

$$g^L = \{g_1^L, g_2^L, \dots\} \quad \text{и} \quad g^R = \{g_1^R, g_2^R, \dots\},$$

состоящие из игр; мы будем также писать

$$g = \{g_1^L, g_2^L, \dots \mid g_1^R, g_2^R, \dots\}.$$

Играют двое, Левый и Правый. Ход состоит в том, что игрок выбирает одну из игр из множества  $g^L$  (если это Левый игрок) или  $g^R$  (если это Правый игрок) и передаёт её противнику (далее тот берёт эту игру и делает ход аналогичным образом и т. д.). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Такое рекурсивное определение выглядит парадоксально: мы определяем понятие игры, используя... понятие игры. Понимать это нужно так: мы называем играми то, что в силу этого определения не можем не считать играми. Например,  $g = \{\}$  является игрой: множества  $g^L$  и  $g^R$  пусты, так что все их элементы являются играми. Значит,  $\{\{\}\}$  и  $\{\{\{\}\}\}$  являются играми и т. д.<sup>1</sup>

Это определение, на самом деле, довольно тонкое. Существуют игры с бесконечным числом позиций, построение которых требует «бесконечного числа итераций» описанной конструкции. Мы столкнёмся с такими играми в п. 1.7, но для начала можно думать только про игры с конечным числом позиций.

---

<sup>1</sup> Подобным образом в теории множеств «из ничего» строятся натуральные числа:  $0 = \{\}$ ,  $1 = \{0\}$ ,  $2 = \{0, 1\}$  и т. д. — подробности можно найти, например, в брошюре [8].

# 1. Пристрастные игры и числа

*Пристрастные* (partizan) игры — это игры, в которых для каких-то позиций  $g^L$  и  $g^R$  различны. Это — общая ситуация, в отличие от частного случая *беспристрастных* (impartial) игр, для которых в каждой позиции возможные ходы для обоих игроков одинаковы. Для начала мы рассмотрим игру Конвея хакенбуш («рубка кустарника»), обладающую одним замечательным свойством: в ней никогда не обладает выигрышной стратегией именно начинающий игрок (см. лемму 1.2 ниже).

## 1.1. Игра хакенбуш

**Правила 1.1** (Хакенбуш). *Позиции:* граф, рёбра которого раскрашены в синий и красный цвета, а некоторые из вершин объявлены находящимися на земле, причём от каждого из рёбер можно прийти до земли.

*Ходы:* Левый перерезает произвольное синее ребро, при этом все остальные рёбра, которые перестают быть связанными с землёй, исчезают; Правый перерезает красное ребро, при этом все остальные рёбра, которые перестают быть связанными с землёй, исчезают.

Разберём ход одной из партий: на первой картинке приведённого ниже рис. 1 показана начальная позиция и последовательность ходов

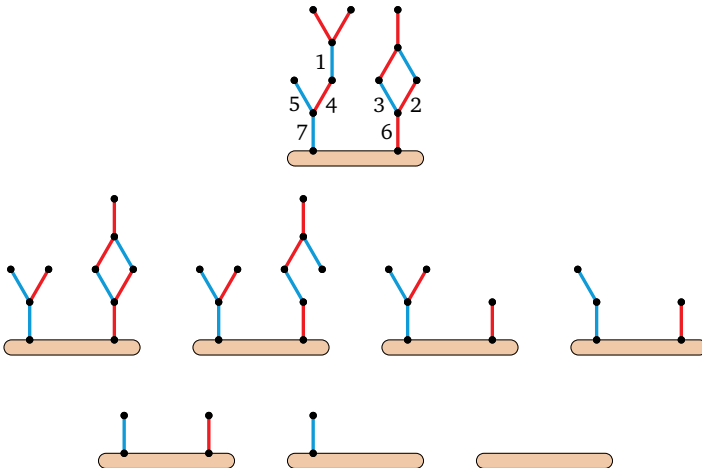


Рис. 1

игроков, затем мы видим последовательность возникавших позиций. После седьмого хода у Правого не остаётся красных рёбер, которые он мог бы перерезать, и поэтому он проигрывает.

Замечательное свойство этой игры, из-за которого мы и начнём изучение игр с неё, следующее.

**Лемма 1.2.** *Для заданной позиции в игре хакенбуш первый игрок никогда не обладает выигрышной стратегией, т. е. всегда выигрывает или Левый, или Правый, или второй игрок.*

**Доказательство.** Предположим, в некоторой позиции Левый игрок, начиная, выигрывает. Покажем, что он же тогда выигрывает и ходя вторым.

Действительно, пусть, когда он начинает, его выигрышная стратегия говорит ему разрезать ребро  $E$  (в результате, возможно, исчезнут и рёбра  $E_1, E_2, \dots$ , держащиеся только на  $E$ ).

Допустим теперь, что начинает Правый. Тогда Левый может следовать той же стратегии, что и раньше, считая, что ребро  $E$  уже разрезано. Единственной ситуацией, когда он будет вынужден от неё отклониться, будет разрезание Правым одного из рёбер  $E_i$  или какого-то из рёбер, которое в текущий момент держится только на  $E$  (и поэтому в рамках исходной стратегии должно было бы уже исчезнуть). В ответ на это Левый стирает  $E$  и возвращается в точности к ситуации применимости исходной стратегии.  $\square$

## 1.2. Сумма игр. Нулевые, положительные и отрицательные игры

При игре в хакенбуш часто возникает позиция, состоящая из двух отдельных «кустов». С этого момента можно считать, что у нас есть две разные игры (соответствующие каждому из «кустов») и каждый раз игрок делает ход в одной из них; игрок проигрывает, если не может сделать ход ни на одной из досок. Это наблюдение приводит к следующему определению суммы игр.

**Определение 3.** Сумма двух игр  $g$  и  $h$  — это игра, позиции в которой суть пары (позиция в  $g$ , позиция в  $h$ ), а каждый ход является либо ходом в игре  $g$ , либо ходом в игре  $h$ .

Можно определить сумму и в терминах определения 2 игр — рекуррентным образом.

**Определение 4.** Сумма двух игр  $g$  и  $h$  — это игра

$$\{g_1^L + h, g_2^L + h, \dots, g + h_1^L, g + h_2^L, \dots \mid g_1^R + h, g_2^R + h, \dots, g + h_1^R, g + h_2^R, \dots\}.$$

Ключевую роль при анализе позиций играет следующее замечание.

**Лемма 1.3.** *Предположим, что  $h$  — игра, в которой второй игрок обладает выигрышной стратегией. Тогда для любой игры  $g$  в игре  $g + h$  побеждает тот же игрок, кто и в игре  $g$ .*

**Доказательство.** Выигрышная стратегия состоит в том, чтобы не делать ходов в игре  $h$ , кроме случая, когда другой игрок делает там ход. В случае же хода противника в  $h$  делается ход в соответствии с выигрышной стратегией второго игрока в  $h$ .  $\square$

Эта лемма говорит, что при сложении игр мы всегда можем выбросить игру, в которой второй игрок обладает выигрышной стратегией — аналогично тому, как мы можем выкинуть нулевые слагаемые при операциях с обычными числами!

**Определение 5.** Игра называется *нулевой*, если второй игрок обладает выигрышной стратегией, *положительной* — если Левый обладает выигрышной стратегией, *отрицательной* — если Правый обладает выигрышной стратегией, *нечёткой* (fuzzy) — если первый игрок обладает выигрышной стратегией.

Например,  $\{\}$  — нулевая игра. Но это не единственная нулевая игра: например, позиция с одним синим ребром и одним красным ребром, каждое из которых связано с землёй, тоже нулевая игра. Эта неоднозначность исчезнет, как только мы определим равенство игр.

Мы теперь хотим определить равенство игр. Для чисел утверждение  $A = B$  может быть переписано как  $A - B = 0$ . Определение равенства нулю для игр у нас уже есть, осталось для игры  $A$  определить игру  $-A$ . Определение станет понятным, если начать с хакенбуша.

**Лемма 1.4.** *Пусть  $g$  — позиция в игре хакенбуш. Рассмотрим позицию  $\bar{g}$ , где каждый цвет заменён на противоположный (синий цвет становится красным, а красный — синим). Тогда  $g + \bar{g}$  — нулевая игра.*

**Доказательство.** Выигрышная стратегия для второго игрока — симметричная: копировать ходы первого во втором экземпляре игры.  $\square$

Аналогичным образом можно определить противоположную игру в общем случае. А в терминах второго определения игры получается следующее.

**Определение 6.** Для игры

$$g = \{g_1^L, g_2^L, \dots \mid g_1^R, g_2^R, \dots\}$$



противоположная — это игра

$$-g := \{-g_1^R, -g_2^R, \dots \mid -g_1^L, -g_2^L, \dots\}.$$

В частности,  $-0 = 0$ .

**Определение 7.** Будем называть игры  $g$  и  $h$  *равными*, если сумма  $g + (-h)$  — нулевая игра. В этом случае мы будем писать  $g = h$ .

Мы дали несколько определений — и, по-хорошему, должны были бы проверить, что они согласованы друг с другом. Эту проверку мы оставим читателю в качестве самостоятельного — и очень полезного! — упражнения.

**Упражнение 1.5.** Проверьте, что:

- $A = A$ . Если  $A = B$ , то  $B = A$ . Если  $A = B$  и  $B = C$ , то  $A = C$ .
- Если  $A = B$ , то  $A + C = B + C$  для любой игры  $C$ .

**Упражнение 1.6.** Более того, если  $A = B$ , то  $A$  и  $B$  взаимозаменяемы как варианты позиций.

Поэтому мы можем, к примеру, записать игру  $C = \{0\}$ , не вдаваясь в детали — какой именно вариант нулевой игры предлагается Левому в качестве единственно возможного хода: все такие игры  $C$  равны.

**Упражнение 1.7.** Сумма двух положительных игр положительна, сумма двух отрицательных игр отрицательна.

Будем говорить, что  $A > B$ , если  $A - B > 0$ . В силу упражнения 1.7 неравенства можно складывать обычным образом.

### 1.3. Целые значения

Рассмотрим позицию в хакенбуше с единственным синим ребром. Тогда, кто бы ни начинал, Левый выигрывает. Поэтому эта позиция является положительной. А чему она равна? Так как у Левого есть ровно один «свободный» ход в этой позиции, мы будем считать её равной 1. Так же, как мы определили число(!) 0, мы *определим* число 1 как эту игру.

Рассмотрев противоположную игру, мы видим, что число  $-1$  — это позиция с одним красным ребром (рис. 2).

Вспомнив определение суммы игр, мы видим, что число  $p - q$  — это позиция с  $p$  синими рёбрами и  $q$  красными рёбрами, каждое из которых касается земли. Это согласуется с тем фактом, что выигрывает Левый, если  $p > q$ , Правый, если  $p < q$ , и второй игрок, если  $p = q$ . Заметим, что какие-либо другие позиции также могут оказаться

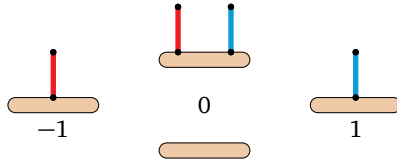


Рис. 2

равными этим целым числом, если их сумма с соответствующими (противоположными) целыми числами оказывается нулевой игрой.

В такой позиции выигрывает второй игрок. Так как ситуация с двумя синими рёбрами равна 2, мы видим, что «стебель бамбука», состоящий из двух красных рёбер, равен  $-2$ . Ничего удивительного в этом нет; у Правого есть два «свободных хода» (рис. 3).

И вообще, нетрудно показать, что «стебель бамбука» из  $p$  синих рёбер равен числу  $p$ .

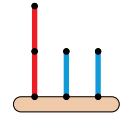


Рис. 3

#### 1.4. Позиция $\frac{1}{2}$

Пришло время сопоставить численное значение какой-нибудь менее тривиальной позиции. Обозначим через  $g$  позицию на рис. 4.

Несложно увидеть, что в этой позиции Левый всегда выигрывает. Однако если мы дадим Правому один свободный ход (рис. 5), окажется, что всегда выигрывает уже Правый. Поэтому позиция  $g$  положительна, но при вычитании 1 становится отрицательной, поэтому всё, что мы можем сказать, это что  $0 < g < 1$ .

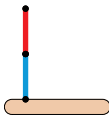


Рис. 4

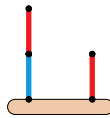


Рис. 5

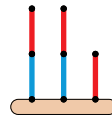


Рис. 6

Попробуем теперь найти число, соответствующее сумме  $g + g$ . Эта сумма, естественно, положительна — но теперь, если мы дадим свободный ход Правому, она становится нулевой игрой (рис. 6)!

**Упражнение 1.8.** Докажите, что действительно  $g + g = 1$ .

Логично поэтому сопоставить позиции  $g$  число  $1/2$  — или *определить* число  $1/2$  как игру  $g$ .

**Упражнение 1.9.** Докажите, что обозначение  $1/2$  корректно — в том смысле, что если для позиций  $g$  и  $h$  в игре хакенбуш  $g + g = 1$  и  $h + h = 1$ , то  $g = h$ .

Вспомним, что в наших обозначениях позиция  $g$  — это игра  $\{0|1\}$ . Поэтому предыдущее уравнение становится равенством  $\{0|1\} + \{0|1\} = 1$ , а введённое нами обозначение записывается как

$$\frac{1}{2} = \{0|1\}.$$

### 1.5. Двоично-рациональные позиции

Используя ту же идею, мы можем сопоставить численное значение любому «стеблю бамбука» (графу, состоящему из последовательно соединённых рёбер), взяв несколько его копий и сравнив их сумму с более коротким стеблем. Определим индуктивно новые числа, используя этот процесс.

**Пример 1.10.** На рис. 7 мы видим два различных способа вычисления позиции  $g$ , состоящей из двух красных рёбер над одним синим. Слева изображена нулевая игра, соответствующая уравнению

$$g + g - \frac{1}{2} = 0,$$

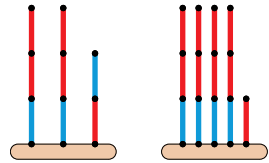


Рис. 7. Две нулевые игры

правый рисунок соответствует уравнению

$$g + g + g + g - 1 = 0.$$

Поэтому мы *положим*  $\frac{1}{4} = g$ , иными словами,

$$\frac{1}{4} = \left\{0 \mid \frac{1}{2}, 1\right\} = \{0 \mid \{0|1\}, 1\}.$$

**Упражнение 1.11.** Проверьте, что обе игры, изображённые на рис. 7 действительно нулевые.

**Упражнение 1.12.** Любая позиция в игре хакенбуш больше любой позиции, полученной из неё удалением синего ребра, и меньше любой позиции, полученной удалением красного ребра.

Другими словами, если позиция  $g$  в хакенбуше есть

$$\{g_1^L, g_2^L, \dots \mid g_1^R, g_2^R, \dots\},$$

то  $g_i^L < g < g_j^R$ .

Это объясняет выбранную терминологию: можно представлять себе, что Левый игрок всегда «сдвигает позицию по числовой прямой влево», а Правый — вправо.

**Следствие 1.13.** При игре в хакенбуш на нескольких стеблях бамбука достаточно рассматривать только ходы, разрезающие самые верхние рёбра нужного цвета в каждом из стеблей (т. е. если запретить все остальные ходы, то получится игра, равная исходной).

Следующая лемма позволит нам сопоставить числовые значения любым конечным стеблям бамбука.

**Лемма 1.14.** Пусть в стебле бамбука  $X$  есть рёбра обоих цветов, и пусть  $A$  и  $B$  — два стебля, получающиеся из  $X$  удалением самого верхнего красного и самого верхнего синего рёбер соответственно. Тогда  $2X = A + B$ .

В силу последнего следствия будем считать, что если игрок переубает ребро в каком-то из стеблей, то это самое верхнее из рёбер его цвета в данном стебле.

В частности, при ходе Левого или Правого в стебле  $X$  из него получаются стебли  $B$  и  $A$  соответственно (рис. 8). И лемма состоит в том, что две копии произвольного стебля  $X$  можно заменить на сумму стебля, получающегося из  $X$  при ходе Левого, и стебля, получающегося при ходе Правого.

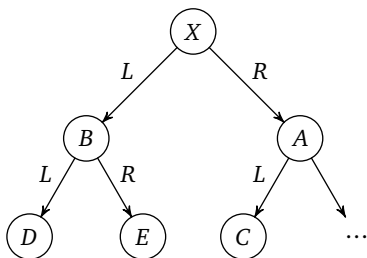


Рис. 8

**Доказательство леммы.** Нам нужно проверить, что

$$2X + (-A) + (-B) = 0,$$

т. е. что в игре  $X + X + (-A) + (-B)$  всегда выигрывает второй игрок. Будем считать, что первым ходит Правый (второй случай разбирается аналогично), и докажем, что *Левый выигрывает*.

После хода первого (Правого) игрока останется хотя бы одна нетронутая им копия  $X$ . Покажем, что ход второго (Левого) игрока в эту копию выигрывает. Разберём три случая.

*Случай 1.* Если Правый ходил в одну из копий  $X$ , то после сделанных двух ходов образуется нулевая позиция

$$A + B + (-A) + (-B).$$

*Случай 2.* Если Правый ходил в  $(-A)$  и перевёл этот стебель в некоторый стебель  $(-C)$ , то после сделанных двух ходов получается позиция

$$X + B + (-B) + (-C),$$

и эта позиция равна  $X + (-C)$ . Но стебель  $(-C)$  получен ходом Правого из стебля  $(-A)$ , который, в свою очередь, является частью стебля  $(-X)$ . Поэтому  $(-C) > (-X)$ , а

$$X + B + (-B) + (-C) > 0,$$

т. е. Левый игрок выигрывает.

*Случай 3.* Наконец, пусть первый (Правый) игрок сделал свой первый ход в стебле  $(-B)$ , переведя его в некоторый стебель  $(-D)$ . После двух ходов мы имеем позицию

$$X + B + (-A) + (-D).$$

В силу упражнения 1.12

$$X + B + (-A) + (-D) > B + B + (-A) + (-D).$$

Предположим, что стебель  $B$  не одноцветный, и пусть ход Правого переводит  $B$  в некоторый стебель  $E$ . Стебель  $B$  короче стебля  $X$  — и мы можем считать (применяя индукцию), что для него утверждение леммы уже доказано, т. е.  $B + B = D + E$ . Поэтому полученную позицию можно переписать:

$$B + B + (-A) + (-D) = E + (-A).$$

Наконец,  $E$  может быть получено из  $B$  ходом Правого игрока, а  $B$  из  $X$  — ходом Левого. В свою очередь,  $A$  получается из  $X$  напрямую ходом Правого игрока. Значит, либо  $A = E$ , либо (если разрезаемое для перехода к  $E$  ребро ниже разрезаемого для перехода к  $A$ ) стебель  $E$  можно получить из стебля  $A$  ходом Правого игрока, и потому  $E > A$ . В любом случае  $E \geq A$ , и потому

$$X + B + (-A) + (-D) > E - A \geq 0,$$

т. е. Левый выигрывает.

Осталось разобрать случай, когда стебель  $B$  — одноцветный (и, соответственно, мы не можем к нему применять предположение индукции). Тогда  $D = B - 1$ ,

$$B + B + (-A) + (-D) = B + (-A) + 1,$$

и в получившейся позиции Левый игрок легко выигрывает: единственный стебель, где остаются красные рёбра, это  $(-A)$ , и ход Правого игрока туда переводит  $(-A)$  в  $(-B)$  — т. е. остаётся игра

$$B + (-B) + 1 > 0. \quad \square$$

Будем кодировать стебель бамбука последовательностью цветов рёбер (начиная с нижнего). Например, стебель бамбука со значением  $1/2$ , который мы рассматривали в п. 1.4, кодируется как  $LR$ .

Пользуясь леммой, можно построить дерево  $T$  значений для стеблей бамбука.

Путь из корня дерева в некоторую его вершину представляет собой стебель бамбука (причём каждый конечный стебель появляется так ровно один раз). Значение этого стебля и написано рядом с вершиной (рис. 9).

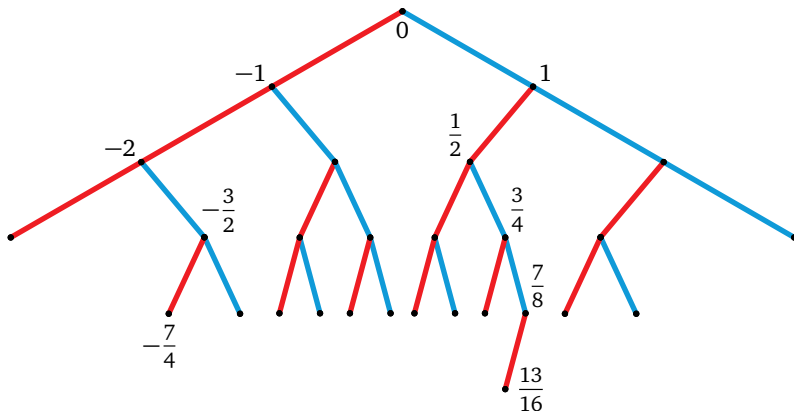


Рис. 9

Отметим, что в этом дереве встречаются все двоично-рациональные числа.

## 1.6. Новая конструкция для чисел

**Пример 1.15.** Рассмотрим игру  $g = \{-1|5\}$ . Чему она равна? Как мы уже знаем, она больше  $-1$ , но меньше 5. Естественно было бы предположить, что она равна 2, среднему арифметическому  $-1$  и 5.

Но правильный ответ, как нетрудно понять, — это 0. Кто начинает — тот и проигрывает: если начинает Левый, он обязан сделать ход в  $-1$ , и побеждает Правый, а если начинает Правый, то его единственный ход приводит ситуацию к позиции 5, и побеждает Левый. Вообще, если  $a < 0 < b$ , игра  $\{a|b\}$  всегда нулевая.

**Пример 1.16.** Теперь рассмотрим игру  $\{\frac{1}{4}|1\}$ . Каково её значение? Опять-таки, можно было бы предположить, что это  $\frac{5}{8}$  — среднее арифметическое  $\frac{1}{4}$  и 1. Но это неверно.

Мы уже знаем, что  $\frac{5}{8}$  равно игре  $\{\frac{1}{2}|\frac{3}{4}\}$ , поэтому если бы ответ  $\frac{5}{8}$  был правильным, игра  $\{\frac{1}{4}|1\} + \{-\frac{3}{4}|\frac{1}{2}\}$  должна была бы быть нулевой. Но это не так: можно проверить, что Правый всегда выигрывает. А именно, если он начинает, он делает ход во второй игре, переходя к  $\{\frac{1}{4}|1\} - \frac{1}{2} = \{\frac{1}{4}|1\} + \{-1|0\}$ , после этого Левый вынужден сделать ход в первой игре, переходя к  $\{0|\frac{1}{2}\} + \{-1|0\}$ , — а это уже выигрышная позиция для Правого. Можно проверить, что правильное значение игры  $\{\frac{1}{4}|1\}$  — это  $\frac{1}{2}$ !

В обоих случаях игра оказывалась равна двоично-рациональному числу. Кроме того, мы знаем, что любой бамбук равен двоично-рациональному числу. Общее утверждение следующее.

**Теорема 1.17.** Пусть  $g = \{g_1^L, g_2^L, \dots, g_n^L | g_1^R, g_2^R, \dots, g_m^R\}$  — игра, в которой все возможные позиции как для Левого, так и для Правого есть двоично-рациональные числа, причём любой вариант Левого строго меньше любого варианта Правого:  $g_i^L < g_j^R$  для любых  $i, j$ . Тогда игра  $g$  равна такому «простейшему» двоично-рациональному числу  $x$ , что  $g_i^L < x < g_j^R$  для всех  $i, j$ .

(Здесь «простейшее» означает «с наивысшей позицией среди дерева значений стеблей бамбука  $T$ », или, по-другому, «равное значению самого короткого стебля бамбука, большему, чем все возможные результаты ходов Левого, и меньшему, чем все варианты для Правого».)

**Доказательство.** Обозначим через  $x = \{x^L | x^R\}$  самое высокое число в дереве  $T$ , большее, чем все  $g_i^L$ , и меньшее, чем все  $g_j^R$ . Покажем, что игра  $g - x$  нулевая, т. е. что в ней второй игрок выигрывает. Имеем

$$\begin{aligned} g - x &= \{g_1^L, g_2^L, \dots | g_1^R, g_2^R, \dots\} + \{-x^R | -x^L\} = \\ &= \{g_1^L - x, g_2^L - x, \dots, -x^R + g | g_1^R - x, g_2^R - x, \dots, -x^L + g\}. \end{aligned}$$

Так как  $g_i^L < x$ , все возможности Левого, кроме последней, — отрицательные числа. Так как  $x$  — наивысший номер в  $T$  с требуемым свойством,  $x^R$ , находящийся выше  $x$ , должен быть больше, чем один из  $g_j^R$ , иначе бы мы выбрали  $x^R$  вместо  $x$ . Поэтому разница  $g - x^R$  тоже отрицательна, значит, все возможные результаты ходов Левого отрицательны.

Аналогично все возможности Правого положительны. Поэтому игра  $g - x$  нулевая и, следовательно,  $g = x$ .  $\square$

**Следствие 1.18.** *Любая позиция в конечной игре хакенбуш — двоично-рациональное число.*

С помощью теоремы 1.17 можно рекурсивно вычислить значение любой позиции игры хакенбуш. Впрочем, в общем случае эта процедура ненамного проще, чем вычисление всего графа позиций игры.

## 1.7. Вещественные и сюрреальные числа

Мы уже видели конечные игры, значения которых — двоично-рациональные числа. Естественно задаться вопросом: а можно ли построить все действительные числа таким способом? Оказывается, да — но для этого нам придётся покинуть мир конечных игр! Мы отойдём от него не слишком далеко, сохранив предположение, что игра всегда заканчивается за конечное время. Но это время уже не обязано быть ограниченным, мы никак не можем его оценить до игры.

Напомним, как вещественные числа строил Дедекинд: если рациональные числа уже построены, то по действительному числу  $x$  можно построить пару множеств рациональных чисел,  $L = \{l \in \mathbb{Q} \mid l \leq x\}$  и  $R = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > x\}$ ; и наоборот, действительное число можно определять как пару таких множеств  $L$  и  $R$  рациональных чисел, что любой элемент множества  $L$  меньше любого элемента множества  $R$  (ср. с теоремой 1.17!).

**Определение 8.** Сюрреальное число — это такая игра  $g = \{g^L \mid g^R\}$ , что все элементы множеств  $g^L$  и  $g^R$  — сюрреальные числа, причём любая игра из  $g^L$  меньше любой игры из  $g^R$ .

Понимать это рекурсивное определение следует таким же образом, как и рекурсивное определение игры (определение 2, с. 4).

Попробуем найти сюрреальное число, равное  $2/3$ . Для этого нужно построить такую игру, чтобы у Левого все варианты ходов вели в позиции, меньшие  $2/3$ , а у Правого — в позиции, большие  $2/3$ , и были варианты ходов, ведущие в позиции, сколь угодно близкие к  $2/3$ .



Таким свойством обладает игра  $g$  в хакенбуш на *бесконечном* стебле бамбука, в котором цвета рёбер чередуются (рис. 10). Игра с такой начальной позицией всегда заканчивается за конечное время, так как уже после первого хода останется лишь конечное число рёбер.

Подобным образом стебель бамбука можно сопоставить любому действительному числу.

Совсем скоро мы встретимся с сюрреальными числами, которые больше нуля, но меньше любого положительного двоично-рационального числа. Поэтому соображений выше для формального доказательства равенства  $g = 2/3$  недостаточно.

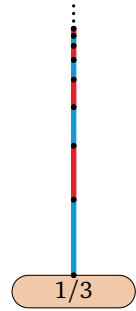


Рис. 10

**Упражнение 1.19.** Докажите, что  $g = 2/3$ , т. е. что  $g + g + g = 2$ .

**Упражнение 1.20.** Докажите, что любое рациональное число является значением некоторого бамбука (конечного или периодического).

Удивительно, что, продолжая в том же духе, мы обнаружим много других «чисел». Рассмотрим следующие бесконечные стебли бамбука (рис. 11). Первый из них — положительная игра, большая любого целого числа. Назовём её  $\omega$ . Это сюрреальное число, большее любого натурального.

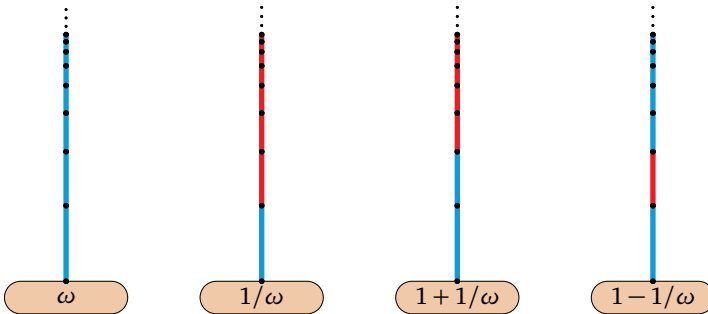


Рис. 11

Попробуем, наоборот, построить очень маленькое число. Рассмотрим вторую игру, которую мы назовём  $1/\omega$ . Она положительна, но меньше любого двоично-рационального числа.

Но на этом мы не остановимся: теперь, когда у нас есть бесконечные ростки, почему бы нам не продолжить их *сверху* (рис. 12)?

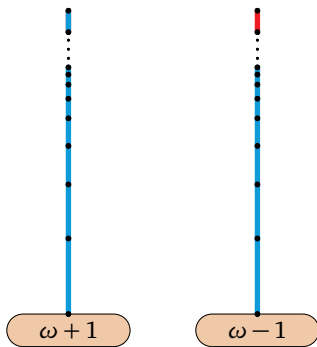


Рис. 12

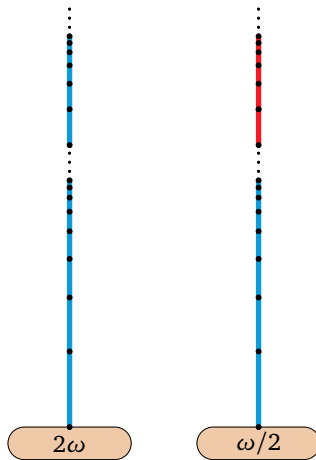


Рис. 13

Эти игры тоже заканчиваются за конечное время (после второго хода заведомо остаётся лишь конечное число рёбер), и они больше любого натурального числа, но при этом они отличаются от  $\omega$ . Более того, можно комбинировать такие ростки (рис. 13).

**Упражнение 1.21.** Проверьте, что стебли бамбука на рисунке действительно равны  $2\omega$  и  $\omega/2$  соответственно.

(Отметим, что сюрреальные числа, построенные с использованием только синих рёбер, являются *ординальными числами*, которые часто применяются в разных областях математики в ситуациях, когда индукции по обычным числам оказывается недостаточно<sup>1</sup>.)

Подобным образом можно построить сюрреальные числа  $\omega^2$ ,  $\omega^\omega$ ,  $\omega/3$ ,  $\sqrt{\omega}$  и многие другие (подробности можно найти в книге [3] или книге [6]).

Произвольные сюрреальные числа можно не только складывать и вычитать, но и умножать и делить. К сожалению, для умножения позиций в хакенбуше нет столь наглядной интерпретации, как для сложения. Но определить умножение рекурсивно не так уж и сложно.

**Упражнение 1.22.** а) Пусть  $a \leq x \leq b$ ,  $a' \leq x' \leq b'$ . Выясните, какие из 4 произведений  $(x - a)(x' - a')$ ,  $(x - a)(x' - b')$ ,  $(x - b)(x' - a')$ ,

<sup>1</sup> Об ординалах и трансфинитной индукции можно прочитать в брошюре [8] или книге [4].

$(x - b)(x' - b')$  положительны, и запишите результат в виде системы неравенств на  $xx'$ .

б) Пусть  $g = \{L|R\}$ ,  $g' = \{L'|R'\}$ . Предположим, что умножение  $g$  на элементы множества  $L'$  и  $R'$ , а также умножение  $g'$  на элементы множеств  $L$  и  $R$  уже определено. Вдохновляясь предыдущим пунктом и рекуррентным определением сложения, определите игру  $gg'$ .

**Упражнение 1.23.** Проверьте, что  $\omega \cdot (1/\omega) = 1$ , где  $\omega$  и  $1/\omega$  — стебли бамбука, определённые выше.

## 2. Беспристрастные игры и ним-числа: теория Шпрага — Гранди

Ранее в наших играх мы использовали очень сильное предположение: в них не было позиций, в которых выигрывает начинающий игрок. Это предположение было очень плодотворным — оно позволило нам построить все действительные числа и даже больше того. Но пришло время его отбросить.

Чтобы можно было проводить какой-то разумный анализ игры, мы введём в этом разделе другое сильное, но, в каком-то смысле, ортогональное предположение: оба игрока обладают равными возможностями, т. е. ход, который может сделать игрок, не зависит от того, кто этот игрок — Левый или Правый.

**Правила 2.1** (Зелёный хакенбуш или ним). *Позиции:* Конечное число зелёных бамбуковых палок конечной высоты.

*Ходы:* Игрок выбирает бамбуковую палку и отрезает от неё столько рёбер, сколько хочет.

Конечно, если палочек нет вообще, то начинающий проигрывает — это та же самая нулевая игра, которую мы не один раз уже видели.

Если же есть один росток, то возникает новая ситуация (рис. 14; обозначение  $\parallel 0$  объясняется на с. 26). В ней выигрывает первый игрок — просто срезая весь росток «под корень», после чего у второго игрока не остаётся ходов.

Посмотрим, что будет происходить в более сложных ситуациях. Если при игре в ним позиция состоит из двух ростков одинаковой высоты, то второй игрок выигрывает (применяя симметричную стратегию, рис. 15).

Легко понять и кто выигрывает, если две палочки имеют различную высоту: начинающий первым ходом уравнивает ростки, после чего вто-

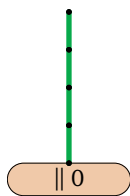


Рис. 14

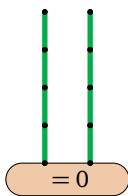


Рис. 15

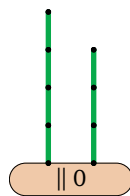


Рис. 16

рой игрок проигрывает. Таким образом, для двух ростков первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда их высота различна (рис. 16).

## 2.1. Ним-числа

Вспомним, что мы определяли нулевую игру как игру, в которой выигрывает второй игрок, и лемма 1.3 говорит нам, что мы можем просто вычесть такую игру, когда встречаемся с ней. Введём новые числа, именуемые *ним-числами*: пусть  $*n$  обозначает позицию из одного ростка высоты  $n$  в игре ним. Так как каждый может отрезать от ростка столько рёбер, сколько хочет, с точки зрения позиций для ним-чисел можно ввести следующее рекурсивное определение:

$$*n = \{0, *1, *2, \dots, *(n-1) \mid 0, *1, *2, \dots, *(n-1)\}.$$

Мы можем перефразировать наши выводы следующим образом:

$$\begin{aligned} *n &\neq 0 \quad \text{при } n > 0, \\ *n + *n &= 0, \\ *m &\neq *n \quad \text{при } m \neq n. \end{aligned}$$

Перейдём к более сложным выражениям. К примеру, что можно сказать об игре  $*2 + *2 + *1$ ? Так как  $*2 + *2 = 0$ , эта игра равна  $*1$ , и начинающий в ней выигрывает (рис. 17).

А что можно сказать про игру  $*3 + *2 + *1$  (рис. 18)? Несложно увидеть, что в такой игре выигрывает второй. Получаем равенство  $*3 + *2 + *1 = 0$ . Мы также можем его переформулировать, прибавив  $*1$ ,  $*2$  или  $*3$  к обеим частям, получая соответственно

$$*3 + *2 = *1, \quad *2 + *1 = *3 \quad \text{и} \quad *1 + *3 = *2.$$

Кажется, ним-числа можно складывать, получая опять ним-числа. Но всегда ли это так? И по каким правилам происходит сложение, как найти, чему равна сумма двух ним-чисел? Чтобы ответить на этот вопрос, мы обратимся к другой игре.

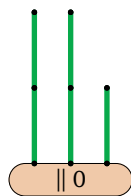


Рис. 17

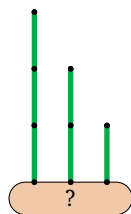


Рис. 18

## 2.2. Покерный ним и правило наименьшего исключённого

Чтобы понять, как складывать ним-числа, рассмотрим вариант игры ним, где каждый игрок может слегка оттянуть концовку игры.

**Правила 2.2** (Покерный ним). *Позиции:* Конечный набор зелёных бамбуковых палок конечной длины, конечный набор рёбер в кармане у Левого и конечный набор рёбер в кармане у Правого (не обязательно такой же, как у Левого).

*Ходы:* Каждый игрок выбирает один из ростков бамбука. Затем он или отрезает от него столько рёбер, сколько хочет, или добавляет из своего кармана столько рёбер, сколько хочет (тем самым, он не может добавить больше рёбер, чем то количество, которое у него осталось в кармане).

Хотя игра больше не симметричная, дополнительный выбор, который мы дали игрокам, не влияет на результат.

**Предложение 2.3.** *Для заданной позиции в покерном ниме побеждает тот же игрок, что и в соответствующей игре в простой ним.*

**Доказательство.** Дело в том, что ход, состоящий в добавлении рёбер к ростку бамбука, обратим: если противник добавляет  $k$  рёбер, их можно тотчас же отрезать обратно. Поскольку его запасы конечны, он сможет добавлять рёбра лишь конечное количество раз. Поэтому тот из игроков, кто выигрывает в данной позиции в простой ним, выигрывает игру и в покерный — просто не давая противнику воспользоваться своими «запасами».  $\square$

На языке ним-чисел это означает, что

$$\{0, *1, *2, \dots, *(n-1), \dots \mid 0, *1, *2, \dots, *(n-1), \dots\} = *n,$$

где второе многоточие заменяет какие-то ним-числа с номерами, большими, чем  $n$ .

На самом деле, доказав предложение 2.3, мы получили гораздо больше, чем просто результат о покерном ниме. А именно, применяя это рассуждение рекурсивно<sup>1</sup>, мы получаем один из старейших результатов в комбинаторной теории игр — *теорему Шпрага — Гранди*.

**Теорема 2.4.** *Любая позиция  $g$  в конечной беспристрастной игре равна некоторому ним-числу — а именно, наименьшему ним-числу, отсутствующему среди позиций, в которые можно пойти из  $g$  («правило наименьшего исключённого»).*

**Пример 2.5.** Вернёмся к равенству  $*2 + *1 = *3$ . По определению суммы, игра  $*2 + *1$  равна

$$\{0 + *1, *1 + *1, *2 + 0 \mid 0 + *1, *1 + *1, *2 + 0\}.$$

<sup>1</sup> И используя утверждение упражнения 1.6.

Мы уже знаем, что  $*1 + *1 = 0$ , поэтому

$$*2 + *1 = \{*1, 0, *2 \mid *1, 0, *2\} = *3,$$

где последнее равенство получается применением правила наименьшего исключённого.

**Пример 2.6.** Попробуем теперь найти сумму  $*3 + *1$ . По определению, игра  $*3 + *1$  равна

$$\{0 + *1, *1 + *1, *2 + *1, *3 + 0 \mid 0 + *1, *1 + *1, *2 + *1, *3 + 0\}.$$

Как и раньше, мы можем заменить  $*1 + *1$  на 0, а уже вычисленную сумму  $*2 + *1$  на  $*3$ . Отсюда получаем

$$*3 + *1 = \{*1, 0, *3, *3 \mid *1, 0, *3, *3\} = *2,$$

где второе равенство — применение правила наименьшего исключённого.

Теперь, последовательно применяя это правило, мы можем заполнить таблицу сложения для ним-чисел. А именно, в первую строку и первый столбец мы запишем все ним-числа в возрастающем порядке (что соответствует очевидному равенству  $*n + 0 = *n$ ); затем начиная с левого верхнего угла будем ставить в каждую клетку наименьшее ним-число, которого нет ни сверху от этой клетки в её столбце, ни слева от неё в её строке. Мы получим следующую таблицу:

+	0	*1	*2	*3	*4	*5	*6	*7	*8	*9
0	0	*1	*2	*3	*4	*5	*6	*7	*8	*9
*1	*1	0	*3	*2	*5	*4	*7	*6	*9	*8
*2	*2	*3	0	*1	*6	*7	*4	*5	*10	*11
*3	*3	*2	*1	0	*7	*6	*5	*4	*11	*10
*4	*4	*5	*6	*7	0	*1	*2	*3	*12	*13
*5	*5	*4	*7	*6	*1	0	*3	*2	*13	*12
*6	*6	*7	*4	*5	*2	*3	*0	*1	*14	*15
*7	*7	*6	*5	*4	*3	*2	*1	0	*15	*14
*8	*8	*9	*10	*11	*12	*13	*14	*15	0	*1
*9	*9	*8	*11	*10	*13	*12	*15	*14	*1	0

Первое замечание, которое можно сделать, — как и ожидалось, на диагонали находятся нули. Это означает, что второй игрок выигрывает в игре с двумя ростками тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую высоту.

Следующее, что мы замечаем, — это то, что для каждого  $n$  вдоль диагонали идут одинаковые квадратные блоки размера  $2^n$ . Более того, если мы разобьём всю таблицу на такие блоки, то соседние блоки отличаются друг от друга прибавлением либо вычитанием  $2^n$ . Например, блок  $\{ *4, \dots, *7 \} \times \{ 0, \dots, *3 \}$  — это блок  $\{ 0, \dots, *3 \} \times \{ 0, \dots, *3 \}$ , к каждому числу из которого прибавлено 4.

Это наблюдение можно обобщить, получив формулу сложения ним-чисел. Для этого мы (что совершенно естественно в связи с появившимися сдвигами на  $2^n$ ) рассмотрим двоичные записи складываемых чисел.

**Предложение 2.7.** *Игра  $*t + *n$  равна ним-числу, получающемуся побитовой суммой чисел  $t$  и  $n$  (т. е. разряды его двоичной записи — это суммы по модулю 2 соответствующих двоичных разрядов чисел  $t$  и  $n$ ).*

Например, сумма  $*3 = *11_2$  и  $*5 = *101_2$  — это  $*110_2 = *6$ . С помощью этой легко вычисляемой операции мы можем быстро определять выигрышный ход при игре в ним.

**Пример 2.8.** Позиция  $*1 + *3 + *5 + *7$  (также называемая Мариенбадом в связи с фильмом «В прошлом году в Мариенбаде») — это ним-число  $*1_2 + *11_2 + *101_2 + *111_2 = 0$ . Поэтому первый игрок проигрывает.

**Пример 2.9.** Для позиции

$$*1 + *3 + *5 + *6 = *1_2 + *11_2 + *101_2 + *110_2 = *1$$

выигрышный ход должен привести ним-сумму к нулю, т. е. изменить единственный — последний — разряд в одном из составляющих ним-чисел. Это можно сделать тремя способами:  $*1 \mapsto 0$ ,  $*3 \mapsto *2$  и  $*5 \mapsto *4$ .

### 2.3. Голодный конь

Чтобы проиллюстрировать теорему Шпрага — Гранди, рассмотрим следующую игру.

**Правила 2.10** (Голодный конь с мешком яблок). *Позиции:* Шахматный конь с конечным числом яблок в мешке на конечной прямоугольной доске.

*Ходы:* Можно либо сделать ход по правилам шахмат, но только в четырёх направлениях:  $NNE$ ,  $NNW$ ,  $NWW$  и  $SWW$ , либо съесть любое количество яблок из мешка.



Наша теория здесь отлично применяется: эта игра есть сумма игры в ним с одним стеблем (игра в яблоки) и другой равноправной игры (перемещения коня без яблок). Поэтому любая позиция — это ним-число, равное сумме ним-числа, соответствующего яблокам, и ним-числа, соответствующего положению коня. Начиная с четырёх клеток в северо-западном углу (которые являются конечными позициями для коня), мы последовательно находим ним-числа, соответствующие каждой клетке.

0	0	*1	*1	0	0	*1	*1	0	0
0	0	*2	*1	0	0	*1	*1	0	0
*1	*2	*2	*2	*3	*2	*2	*2	*3	*2
*1	*1	*2	*1	*4	*3	*2	*3	*3	*3
0	0	*3	*4	0	0	*1	*1	0	0
0	0	*2	*3	0	0	*2	*1	0	0
*1	*1	*2	*2	*1	*2	*2	*2	*3	*2
*1	*1	*2	*3	*1	*1	*2	*1	*4	*3
0	0	*3	*3	0	0	*3	*4	0	0

**Упражнение 2.11.** Докажите, что получающаяся таблица периодична.

Теперь мы можем вычислить позицию голодного коня: это ним-сумма его положения и количества яблок. Например, если конь стартует с клетки с координатами (3, 6) с четырьмя яблоками в мешке, эта позиция равна

$$*2 + *4 = *10_2 + *100_2 = *110_2 = *6.$$

Соответственно, стратегия первого игрока состоит в поедании двух яблок, приводящем эту позицию к  $*2 + *2 = 0$ .

**Упражнение 2.12.** Как нужно играть первому игроку, если конь находится в клетке (3, 6) с одним яблоком в мешке?

### 3. Смешиваем числа и ним-числа

Сейчас мы попробуем смешать две рассмотренные теории. Мы уже знаем, что некоторые игры — числа, а некоторые — ним-числа. Что будет, если мы рассмотрим их вместе?

**Правила 3.1** (Трёхцветный хакенбуш). Теперь у нас есть синие, красные и зелёные рёбра. Левый может перерезать синие и зелёные, Правый может перерезать красные и зелёные. Условия победы те же самые: тот, кто не может сделать ход, проиграл.

Мы знаем, что в красно-синем хакенбуше выигрывает Левый, Правый или второй игрок, в то время как в зелёном хакенбуше для любой позиции выигрывает либо начинающий, либо второй игрок. Поэтому в трёхцветном хакенбуше возможны все четыре возможности. Напомним, что игра  $g$  называется *нечёткой*, если в ней выигрывает начинающий. Будем обозначать это  $g \parallel 0$ . В зелёном хакенбуше сумма двух нечётких игр или нечёткая, или нулевая. Остаётся ли это верным в трёхцветном хакенбуше?

#### 3.1. Числа и ним-числа

Для начала сравним ним-числа с обычными.

**Предложение 3.2.** Сумма положительного числа и ним-числа остаётся положительной игрой.

**Доказательство.** Мы хотим доказать, что выигрывает Левый (см. рис. 19). Пусть Левый ходит в ним-число, пока это возможно. Так как ходы Правого могут только увеличить число, после того как ним-часть

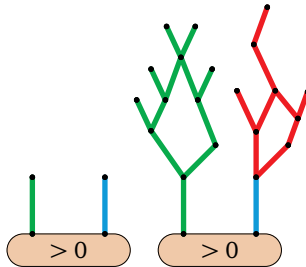


Рис. 19

игры закончится, останется положительное число, при игре в которое Левый выигрывает.  $\square$

Поэтому суммы чисел и ним-чисел устроены довольно просто: хотя они и не являются числами, победитель в них определяется числовой частью.

Упростим наши обозначения и будем писать  $*$  вместо  $*1$ . Мы уже знаем, что  $* + * = 0$  и  $* + 0 = *$ . А что можно сказать про игру  $x + *$ , где  $x$  — действительное число? Применяя наше определение суммы, получим

$$1 + * = \{0\} + \{0|0\} = \{\{0|0\}, \{0\}|\{0\}\} = \{*, 1|1\} = \{1|1\}.$$

Последнее равенство выполнено, поскольку  $1 > *$ , поэтому для Левого оптимален именно ход в позицию 1. Точно так же можно доказать, что для любого действительного числа  $x$  имеет место равенство  $x + * = \{x|x\}$ .

### 3.2. Странное поведение рядом с нулём

Рассмотрим следующие позиции (рис. 20). Первая игра — это

$$\{0, *|0\} = \{0, \{0|0\}|0\},$$

где всегда выигрывает начинающий. Но если мы её удвоим, несложно проверить, что Левый всегда выигрывает!

Этот пример показывает, что, вообще говоря, мы ничего не можем сказать о сумме одной нечёткой игры с другой.

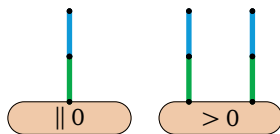


Рис. 20

**Правила 3.3** (Жабы и лягушки). *Позиции:* Конечный набор полосок, состоящих из конечного числа квадратов, в которых могут сидеть синие жабы или красные лягушки.

*Ходы:* Левый выбирает жабу и двигает её на один квадрат вправо, если это возможно, или перепрыгивает через квадрат справа от неё, если тот занят лягушкой, а следующий за ним свободный. Аналогично Правый выбирает лягушку и двигает на один квадрат влево, если это возможно, или перепрыгивает соседний слева квадрат, если тот занят жабой, а следующий за ним свободный.

Если в каждой полоске не больше одной лягушки и не больше одной жабы, то можно показать (см. [1]), что соответствующая игра является суммой числа и ним-числа. С такой ситуацией мы уже встречались.

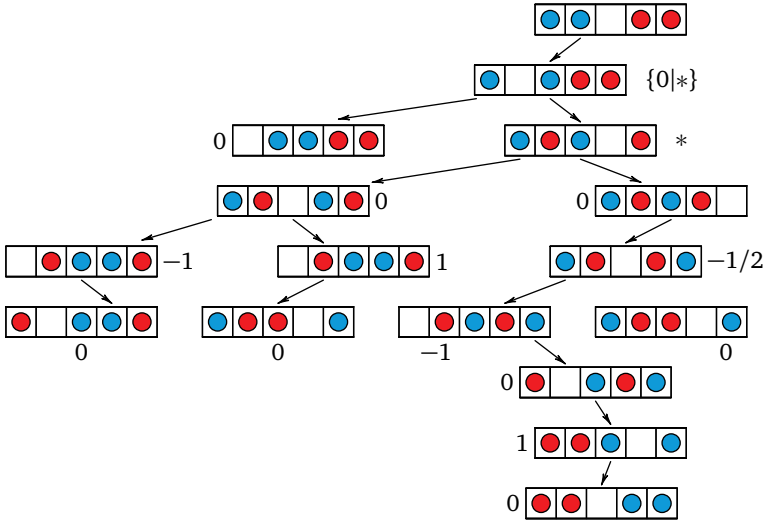


Рис. 21

Рассмотрим теперь позицию с пятью квадратами, двумя лягушками и двумя жабами. Построим полное дерево вариантов, точнее, одну из двух его симметричных половинок, соответствующую первому ходу Левого (рис. 21). Сразу же после первого хода Левого мы натываемся на новую для нас игру:  $\{0|*\}$ . Обозначим её  $\uparrow$ . Поскольку Левый в ней всегда выигрывает, это положительная игра. Является ли она числом? Нет, так как в ней возможный ход Левого — игра  $0$  — не меньше возможного хода Правого — игры  $*$ . Является ли она ним-числом? Нет, потому что она положительна.

**Предложение 3.4.** Для любого положительного сюрреального числа  $x$  выполнено неравенство  $\uparrow < x$ .

**Доказательство.** Сыграем в игру  $\uparrow - x$ . Так как  $\uparrow = \{0|\{0|0\}\}$ , Правый всегда может ходить в этой части игры, пока она не будет сведена к нулю. После чего останется только  $-x$  или меньшее сюрреальное число, если Левый уже ходил в этой части — и там побеждает Правый.  $\square$

### 3.3. Вполне малые игры

Является ли  $\uparrow$  отдельным явлением или существует много таких «бесконечно малых» игр? Как минимум, можно рассмотреть последовательность

$$\dots < -2\uparrow < -\uparrow < 0 < \uparrow < 2\uparrow < \dots$$

Позиция  $\{0, *|0\}$  в трёхцветном хакенбуше также меньше любого положительного числа, но больше любого отрицательного.

**Лемма 3.5.** *Имеет место равенство  $\{0, *|0\} = \uparrow + *$ .*

**Доказательство.** Сыграем в разность игр

$$\{0, *|0\} - \uparrow - * = \{0, *|0\} + \{*\mid 0\} + *.$$

Если Правый делает ход в первой игре, Левый отвечает ходом во второй, переходя к позиции  $* + * = 0$  — выигрышной для него. Если Правый делает ход во второй игре, Левый переходит к  $*$  в первой и побеждает по той же причине. Наконец, если Правый ходит в третьей игре — звёздочке, — Левый отвечает переходом к звёздочке во второй игре. После этого если Правый отвечает в первой игре, то позиция становится просто  $*$  при ходе Левого (и он её выигрывает), а если Правый отвечает «съедением» звёздочки во второй игре, то Левый в первой переходит к 0 и побеждает.

Аналогично разбирается случай, когда начинает Левый. □

Теперь понятно, что игра  $\{0, *|0\} + \{0, *|0\}$  положительна, потому что она равна

$$\uparrow + * + \uparrow + * = \uparrow + \uparrow.$$

Почему же эти игры такие маленькие и так близки к нечётким? Главное замечание состоит в том, что если все рёбра, связанные с землёй, в трёхцветном хакенбуше зелёные, то в конце игры не остаётся ни красных, ни синих рёбер.

**Определение 9.** Игра называется *вполне малой* (all small), если в ней нельзя достичь никакого числа, кроме 0.

**Предложение 3.6.** *Любая вполне малая игра меньше, чем любое положительное число, и больше, чем любое отрицательное число.*

**Доказательство.** Рассуждения такие же, как и в предложении 3.4. □

Как мы видели, игра  $\uparrow$  положительная, а игра  $\uparrow + *$  нечёткая, но если мы удвоим любую из них, то получится игра  $\uparrow + \uparrow$ , которая снова положительна. Дальше естественно задать вопрос про игру  $\uparrow + \uparrow + *$ .

**Упражнение 3.7.** Игра  $\uparrow + \uparrow + *$  положительна.

На диаграмме ниже (рис. 22) положительные игры изображены синим цветом, отрицательные красным, а нечёткие зелёным.

Отметим, что если стрелочки появляются в качестве возможных ходов, выяснение, равны ли две игры, оказывается совершенно нетри-

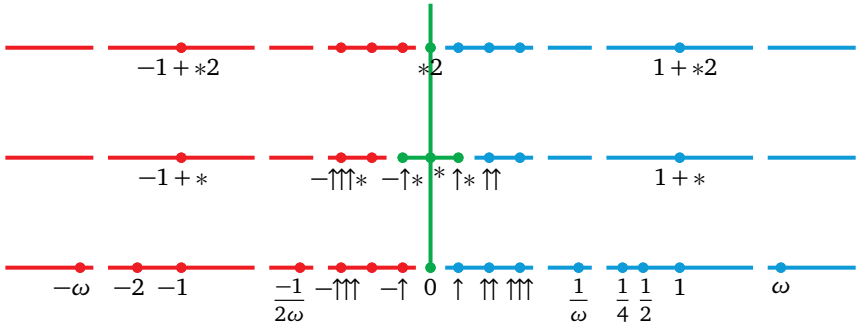


Рис. 22

виальным! К примеру, следующие равенства мы оставим в качестве упражнения:

**Предложение 3.8.**  $\{\uparrow|-\uparrow\} = \{0|-\uparrow\} = \{\uparrow|0\} = *$ .

## 4. Горячие игры. Температура

В играх, с которыми мы работали до этого, ни один из игроков не получал значительного преимущества в процессе игры. Эта ситуация не очень типичная, во многих играх удачный ход может сильно улучшить положение. К таким играм мы сейчас и переходим.

При этом мы столкнёмся с играми, быстрый анализ позиций в которых невозможен.

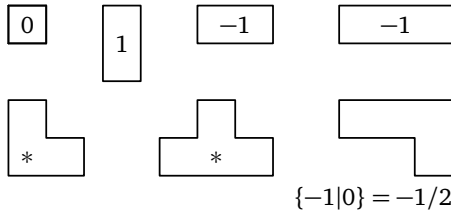
С этого момента мы будем считать, что игра останавливается, как только игроки оказываются в позиции, являющейся числом (если оно положительно, то выиграл Левый, если отрицательно — Правый, если равно нулю — не тот, чей в этот момент ход).

### 4.1. Горячие игры

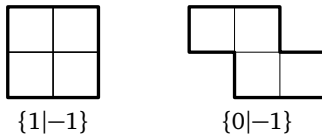
**Правила 4.1** (Разрезание на доминошки). *Позиции:* Конечный набор конечных полимино (полимино — фигурка, составленная из единичных квадратиков, примыкающих по рёбрам).

*Ходы:* Левый и Правый ставят на доску вертикальные и горизонтальные домино соответственно, причём домино не могут перекрываться. Иными словами, ход Левого — удаление пары клеток, соседних по вертикали, а Правого — пары клеток по горизонтали.

Игра на наборе полимино — это сумма игр, соответствующих отдельным полимино. На нескольких небольших полимино мы без труда опознаём игры, с которыми уже сталкивались.



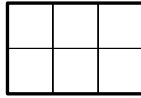
Перейдя к большим полимино, мы обнаружим игры, которые нам раньше не встречались.



Игра  $\{1|-1\}$ , соответствующая тетрамино-квадрату, нечёткая, т. е. в ней выигрывает начинающий. Но эта игра более нечёткая, чем, например,  $*$ : даже если мы прибавим к ней (или вычтем из неё) игру  $1/2$ , эта игра останется нечёткой!

**Определение 10.** Игра называется *горячей*, если некоторый вариант хода Левого строго больше, чем варианты Правого. Примером горячей игры является игра  $\{x|y\}$ , где  $x > y$ . Мы будем называть такую игру *переключателем*.

Следующая позиция является примером несимметричного переключателя.



Исключая неоптимальные варианты, можем видеть, что эта позиция равна

$$\left\{2, \{1|-1\} \mid -\frac{1}{2}\right\} = \left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\}.$$

**Предложение 4.2.** Рассмотрим переключатель  $\{x|y\}$ . Для любого числа  $z$

- если  $z < y$ , то  $z < \{x|y\}$ ;
- если  $y \leq z \leq x$ , то  $z \parallel \{x|y\}$  (в том смысле, что разность левой и правой частей — нечёткая игра);
- если  $x < z$ , то  $\{x|y\} < z$ .

#### 4.2. Прибавление переключателей

Что происходит, когда мы прибавляем переключатели? Во-первых, в позиции, являющейся суммой числа и переключателя, всегда выгоднее делать ход в одном из переключателей. Такой ход улучшает положение игрока, в то время как ход в части-числе его положение ухудшает.

**Предложение 4.3** (теорема об избегании чисел). Если  $\{x|y\}$  — переключатель, а  $z$  — число, то  $\{x|y\} + z = \{x + z \mid y + z\}$ .

**Пример 4.4.** Что происходит в игре

$$\left\{\frac{1}{2} \mid -2\right\} + \left\{1 \mid -\frac{1}{3}\right\}?$$

Опять-таки, выигрывает начинающий. Заметим, что лучший ход Левого — это ход, переводящий первый переключатель в  $1/2$ , а не второй в  $1$ , несмотря на то, что  $1 > 1/2$ .



**Определение 11.** *Температура переключателя  $\{x|y\}$  — это число  $\frac{x-y}{2}$ .*

Температура выражает степень привлекательности игры для обоих игроков: чем жарче игра, тем сильнее игроки будут стремиться сделать в ней ход.

**Предложение 4.5.** *Для суммы переключателей наилучшим ходом будет ход в переключателе с наибольшей температурой.*

Поэтому любая сумма переключателей равна некоторой игре вида

$$z + \{a| - a\} + \{b| - b\} + \{c| - c\} + \dots,$$

где  $a \geq b \geq c \geq \dots \geq 0$ . Если начинает Левый, игроки остановятся на числе  $z + a - b + c - \dots$ , а если Правый, то на числе  $z - a + b - c + \dots$

### 4.3. Переключатели как возможные ходы

Чему равна игра  $\{3|\{1|0\}\}$ ? Больше ли она, чем 2? Чем  $\{2|1\}$ ? Нетрудно проверить, что она несравнима с ними обеими: начинающий выигрывает при игре в разность. Тем не менее, встречаясь со сложной игрой — суммой отдельных игр, в которых переключатели являются возможными позициями, мы бы хотели знать, кто в ней выигрывает и каким будет наилучший ход. К сожалению, простого ответа на этот вопрос не существует, как показывает следующая теорема, доказанная в работах Лауры Йедваб<sup>1</sup> и Давида Моуса<sup>2</sup>.

**Теорема 4.6.** *Задача о том, есть ли у Левого выигрышная стратегия в сумме нескольких игр вида  $\{a|\{b|c\}\}$ , где  $a \geq b \geq c$  — числа, NP-трудна и, более того, PSPACE-полна.*

О классе NP и других понятиях теории сложности алгоритмов можно прочитать в популярной статье [7]. Отметим, что хотя любая задача из класса NP сводится к задаче из теоремы, сама эта задача может не принадлежать (и, скорее всего, не принадлежит) классу NP.

Поскольку эта задача PSPACE-полна, к ней сводится любая задача, разрешимая на полиномиальной памяти. Если бы такая задача принадлежала классу NP, это означало бы совпадение классов NP и PSPACE, а они, скорее всего, не совпадают.

Поэтому трудно надеяться на полную классификацию или на быстрое нахождение оптимальной стратегии. Тем не менее мы завер-

---

<sup>1</sup> Yedwab L. On playing well in a sum of games. Master's Thesis. MIT, 1985.

<sup>2</sup> Moews D. On some combinatorial games connected with Go. Ph. D. thesis. Mathematics Department, University of California at Berkeley, 1993.

шим этот конспект, приведя красивый эвристический способ оценки позиции.

**Пример 4.7.** Пусть  $h$  — игра  $\{2|1\} - 1$ . Эта игра нечёткая: если начинает Левый, игра сойдётся к 1, если Правый, то к  $-1$ . Можно ли сказать, что среднее значение  $h$  равно 0, что бы это ни значило?

На самом деле  $h$  удовлетворяет уравнению  $h + h + h + h = 1$ . Действительно, оба игрока будут предпочитать делать первые ходы в  $h$ , а не в остающихся после предыдущих ходов частях. Поэтому через четыре хода игроки приходят к позиции  $\{2|1\} + \{2|1\} + (-1) + (-1)$ . Теперь каждый из игроков сделает по ходу в переключателе, приведя позицию к  $2 + 1 + (-1) + (-1) = 1$ .

Поэтому среднее значение  $h$ , если оно каким-то образом определено, должно равняться  $1/4$ , а не 0.

**Определение 12.** Пусть  $g$  — такая игра, что для некоторого целого числа  $n$  сумма  $n$  экземпляров  $g$  оказывается равна вещественному числу  $x$ :  $ng = x$ . Тогда мы определим *среднее значение* игры  $g$  как  $\frac{x}{n}$ .

Конечно, среднее значение скорее соответствует игре  $ng$ , чем «одиночному экземпляру»  $g$ . Но какую-то оценку позиции оно даёт.

К сожалению, среднее значение определено далеко не для всех игр. Дальше мы введём более слабое понятие, определённое для всех конечных игр, — *мачту*.

#### 4.4. Охлаждаем игру

Поскольку температура описывает желание игроков делать ходы, естественно возникает идея остудить накал эмоций, введя цену, которую игрокам за ходы придётся платить. Тогда игроки будут делать ходы, только если те существенно улучшают их положение.

**Пример 4.8.** Рассмотрим игру  $g = \{2|1\}$  и определим игру  $\tilde{g}_t$  как  $\{2 - t | 1 + t\}$ . Тогда при  $t < 1/2$  игра  $\tilde{g}_t$  — это всё ещё переключатель, но его температура с ростом  $t$  уменьшается — она равна  $1 - 2t$ . При  $t = 1/2$  получается игра

$$\left\{1\frac{1}{2} \mid 1\frac{1}{2}\right\} = 1\frac{1}{2} + *.$$

При  $1/2 < t \leq 1$  эта игра становится числом  $1\frac{1}{2}$ . Для больших  $t$  она становится равной 1, а затем равной нулю.

Поскольку мы договорились, что игроки соглашаются прекратить игру, как только она достигает позиции-числа, логично определить среднее значение  $g$  как первое число, встреченное в ходе её охлаждения.

Далее мы будем рассматривать только *короткие* игры — игры, в которых может быть достигнуто (с учётом того, что мы договорились останавливаться, достигнув числа) только конечное число позиций.

**Определение 13.** Для коротких игр  $g$  и для каждого неотрицательного числа  $t$  определим рекурсивно игры  $\tilde{g}_t$  и  $g_t$ .

Пусть  $g = \{g_1^L, \dots | g_1^R, \dots\}$ . Положим  $\tilde{g}_t = \{(g_1^L)_t - t, \dots | (g_1^R)_t + t, \dots\}$ , а игру  $g_t$  определим следующим образом:

- если для некоторых  $t' \leq t$  существует такое число  $m$ , что игра  $\tilde{g}_{t'} - m$  меньше любого положительного числа, но больше любого отрицательного, то выберем  $t_g$  — наименьшее из таких  $t'$  и определим  $g_t$  как соответствующее число  $m =: m_g$ ;

- если такого  $t' \leq t$  не существует, то положим  $g_t = \tilde{g}_t$ .

Число  $t_g$  будем называть *температурой* игры  $g$ , а число  $m_g$  *мачтой* этой игры.

Отметим, что если игра  $g$  уже является числом, то  $g_t = g$  при всех  $t$ .

**Пример 4.9.** Посмотрим, как эти определения работают для игры  $h = \{\{2|1\} | -1\}$ . При  $t < 1/2$  получаем  $\{2|1\}_t = \{2-t | 1+t\}$ . Поскольку игра

$$\left\{2 - \frac{1}{2} \mid 1 + \frac{1}{2}\right\}$$

бесконечно близка к  $1\frac{1}{2}$ , при  $t \geq 1/2$  имеем  $\{2|1\}_t = 1\frac{1}{2}$ .

На *термограмме* (рис. 23) мы видим, как меняется с ростом  $t$  (по вертикали) исход игры (по горизонтали). Напомним, что мы считаем, что игроки останавливаются, как только достигают числа. На графике мы отмечаем это число синим цветом, если начинал Левый, красным, если начинал Правый, и чёрным, если эти два числа совпадают (что соответствует тому, что  $t \geq t_g$ ). Пунктиром мы изобразили термограммы игр  $(-1)_t + t$  и  $\{2|1\}_t - t$ , входящих в определение игры  $h_t$ .

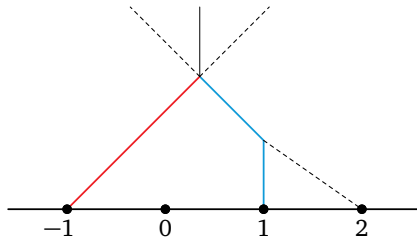


Рис. 23

Если начинает Левый, он делает ход, переводящий в  $\{2|1\}_t - t$ , после чего ход переходит к Правому. Аналогично если начинает Правый, он переводит игру в  $-1 + t$ , и ход переходит к Левому. Поэтому (пока  $t < t_g$ ) у термограммы для игры  $h$  правая граница — это левая граница термограммы игры  $\{2|1\}_t - t$ , а левая граница — это правая граница для термограммы игры  $-1 + t$ . Эти две линии пересекаются при температуре  $t = 1\frac{1}{4}$ , и соответствующая игра равна  $\frac{1}{4}$ .

Хотя игра  $h$  сложнее простого переключателя, у неё есть вполне определённая температура ( $1\frac{1}{4}$ ), а её мачта ( $\frac{1}{4}$ ) равна среднему значению, которое мы определили ранее.

Достоинство понятий температуры и мачты в том, что они определены для любой короткой игры и позволяют качественно оценить её позицию. Подчеркнём, что эти результаты (предложение 4.12 и следствие 4.14) совершенно не очевидны. Впервые они были доказаны Ханнером, доказательство в этой брошюре следует Конвею и Нортону.

**Лемма 4.10.** *Для любых игр  $g$  и  $h$  имеет место равенство*

$$(g + h)_t = g_t + h_t.$$

Докажите эту лемму самостоятельно; не забудьте, что определение  $g_t$  меняется, когда  $t$  становится достаточно большим!

Объясним, как строить термограмму короткой игры  $g = \{g^L | g^R\}$ , если уже известны термограммы всех игр из  $g^L$  и  $g^R$ . Пусть начинает Левый. Если он ходит в игру  $(g_i^L)_t - t$ , то дальше игра заканчивается на числе, задаваемом левой (красной) границей термограммы игры  $g_i^L$ , уменьшенном на  $t$ .

То есть правая (синяя) граница термограммы при данной температуре получается так:

- для каждой из игр  $g_i^L$  посмотреть на значение левой (красной) границы, соответствующее температуре  $t$ ;
- выбрать из этих значений максимум;
- вычесть из него  $t$ .

Аналогично для левой границы. И это правило работает до температуры, при которой синяя и красная граница начинают совпадать — и начиная с этой температуры термограмма становится вертикальной.

Из этого рекурсивного описания термограммы несложно получить следующие два утверждения.

**Предложение 4.11.** *Термограмма короткой игры представляет собой набор отрезков, причём все синие отрезки либо вертикальны,*

либо имеют наклон  $-1$ , а все красные — либо вертикальны, либо имеют наклон  $+1$ .

**Предложение 4.12.** Любая короткая игра  $g$  имеет температуру и мачту.

**Доказательство.** Ключевое соображение индуктивного доказательства: при достаточно большой температуре левая граница термограммы имеет наклон  $+1$ , а правая граница имеет наклон  $-1$ , поэтому в некоторой точке они пересекаются. Координаты этой точки — это и есть температура и мачта нашей игры.  $\square$

**Предложение 4.13.** Для любой короткой игры  $g$  при  $t < t_g$  имеем

$$m_g - (t_g - t) \leq g_t \leq m_g + (t_g - t).$$

**Доказательство.** По доказанному выше термограмма любой игры лежит внутри прямоугольного равнобедренного треугольника с вершиной  $(m_g, t_g)$ .  $\square$

**Следствие 4.14.** Для любой короткой игры  $g$  имеем

$$nm_g - t_g \leq ng \leq nm_g + t_g.$$

**Доказательство.** Температура суммы не превосходит наибольшей из температур слагаемых, поэтому температура  $ng$  не превосходит  $t_g$ . А из аддитивности мачт (которая следует из леммы 4.10) мачта  $ng$  равна  $nm_g$ . Остаётся воспользоваться предыдущим утверждением.  $\square$

Это следствие показывает, что с точностью до ограниченной ошибки сумма большого числа копий  $g$  (да и вообще большого числа игр ограниченной температуры) — это сумма их мачт. Поэтому, хоть нам и не удалось удовлетворительно определить значение произвольной короткой игры, для примерной оценки позиции можно использовать мачту.

\* \* \*

В заключение упомянем, что методы, которые мы обсуждали, применяются к изучению игры го. В частности, вполне малые игры и теория температуры оказались эффективным средством для поиска стратегии в конце игры, когда разные части доски разделены, а игрокам нужно решать, в каких из них делать ходы. Подробности можно найти в книге [2] Берлекэмп и Вульфа. Обобщение и развитие этих идей последние 20 лет является активной темой исследований и уже привело к большому прогрессу в компьютерном го.

## Литература

- [1] *Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K.* Winning Ways for your Mathematical Plays. Second Edition, vol. 1. Natick: A K Peters, 2001.
- [2] *Berlekamp E. R., Wolfe D.* Mathematical Go: Chilling Gets the Last Point. Natick: A K Peters, 1994.
- [3] *Conway J. H.* On Numbers and Games. London: Academic Press Inc., 1976.
- [4] *Верещагин Н. К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. М.: МЦМО, 2012.
- [5] *Гарднер М.* От мозаик Пенроуза к надёжным шифрам. М.: Мир, 1993.
- [6] *Кнут Д.* Сюрреальные числа. М.: Бином, 2014.
- [7] *Разборов А. А.* О сложности вычислений // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 3. М.: МЦМО, 1999. С. 127–141.
- [8] *Яценко И. В.* Парадоксы теории множеств. М.: МЦМО, 2002.

## Оглавление

Введение . . . . .	3
1. Пристрастные игры и числа . . . . .	6
1.1. Игра хакенбуш . . . . .	6
1.2. Сумма игр. Нулевые, положительные и отрицательные игры . . . . .	7
1.3. Целые значения . . . . .	9
1.4. Позиция $\frac{1}{2}$ . . . . .	10
1.5. Двоично-рациональные позиции . . . . .	11
1.6. Новая конструкция для чисел . . . . .	14
1.7. Вещественные и сюрреальные числа . . . . .	16
2. Беспристрастные игры и ним-числа: теория Шпрага — Гранди . . . . .	20
2.1. Ним-числа . . . . .	21
2.2. Покерный ним и правило наименьшего исключённого . . . . .	21
2.3. Голодный конь . . . . .	24
3. Смешиваем числа и ним-числа . . . . .	26
3.1. Числа и ним-числа . . . . .	26
3.2. Странное поведение рядом с нулём . . . . .	27
3.3. Вполне малые игры . . . . .	28
4. Горячие игры. Температура . . . . .	31
4.1. Горячие игры . . . . .	31
4.2. Прибавление переключателей . . . . .	32
4.3. Переключатели как возможные ходы . . . . .	33
4.4. Охлаждаем игру . . . . .	34
Литература . . . . .	38

Научно-популярное издание

*Пьер Деорнуа (Pierre Dehornoy)*

**Комбинаторная теория игр**

Подписано в печать 06.06.2017 г. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 2,5. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «ПринтСервисГрупп».  
105187, Москва, Борисовская ул., 14.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 745–80–31.  
E-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru), <http://biblio.mccme.ru>

---