

ЛЕТНЯЯ
СОВРЕМЕННАЯ



ШКОЛА
МАТЕМАТИКА

В. А. ВАСИЛЬЕВ

ВЕТВЯЩИЕСЯ ОБЪЁМЫ
И ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, 2013—2014

В. А. Васильев

Ветвящиеся объёмы и группы отражений

Издание второе, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2021

УДК 519.1
ББК 22.15
В19

*Издано при поддержке
Фонда развития теоретической
физики и математики «БАЗИС»*

- Васильев В. А.**
В19 Ветвящиеся объёмы и группы отражений. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2021. — 104 с.

ISBN 978-5-4439-4168-4

Рассматривается восходящая к Архимеду и Ньютону задача о зависимости объема, отсекаемого плоскостью от ограниченного тела, от этой плоскости. В частности, мы докажем гипотезу В. И. Арнольда о том, что для тела с гладкой границей в четномерном пространстве этот объем не может алгебраически зависеть от коэффициентов уравнения плоскости, и приведем геометрические препятствия к такой алгебраичности в нечетномерном случае.

В книге рассказано об истории вопроса и о методах, позволяющих решать такие и подобные задачи (включая задачи о разрешимости уравнений в радикалах): теории монодромии, аналитическом продолжении, группах преобразований, порожденных отражениями, и топологии комплексных многообразий.

Книга основана на курсах лекций, прочитанных на ЛШСМ в 2013 и 2014 гг.

Для старшеклассников и студентов младших курсов.

ББК 22.15

ISBN 978-5-4439-4168-4



© Васильев В. А., 2020.
© МЦНМО, 2021.

Содержание

§ 1. Введение	4
§ 2. История и постановка задачи	5
2.1. Одномерный случай	9
2.2. Трехмерный случай	10
§ 3. Двумерный выпуклый случай: теорема Ньютона	12
3.1. Теорема Ньютона	12
3.2. Условия и контрпримеры	14
3.3. Обобщения и вопросы	15
3.4. Локальная алгебраичность	17
§ 4. Выпуклый случай в $\mathbb{R}^{2k}$	19
4.1. Начало: сечения параллельными прямыми	19
4.2. Алгебраические функции комплексного переменного	20
4.3. Отступление: алгебраические функции нескольких переменных	25
4.4. Контуры интегрирования и гомологии	26
4.5. Ветвление отсекаемой площади рядом с критическим значением	31
4.6. Завершение доказательства в плоском выпуклом случае	35
4.7. Обобщение на случай $\mathbb{R}^n$	37
§ 5. Общий (невыпуклый) случай на плоскости	41
§ 6. Общий случай в $\mathbb{R}^{2k}$	47
6.1. Группы, порожденные отражениями	47
6.2. Группы Вейля	51
6.3. Группа монодромии	54
6.4. Теория Пикара—Лефшеца	56
6.5. Перестройки контуров	70
6.6. Исчезающие циклы на одной поверхности	72
6.7. Окончание доказательства теоремы 3	74
6.8. Обобщения и уточнения	78
6.9. Локальная алгебраичность	81
6.10. Геометрические признаки неалгебраичности: условие Давыдовой	87

§ 7. Случай нечетной размерности	89
7.1. Конечнократные параболические точки	90
7.2. Типичные ребра возврата	95
7.3. Пример	98

§ 1. Введение

Из одной теоремы Архимеда следует, что объем, отсекаемый плоскостью от шара или эллипсоида, алгебраически зависит от коэффициентов уравнения плоскости. Напротив, в двумерном случае Ньютон доказал, что такой зависимости не может быть ни для эллипса, ни для любой другой гладкой выпуклой фигуры.

В 1987 году, перечитывая главную книгу Ньютона [22], В. И. Арнольд предположил (см. [2] и [4]), что его теорема верна и для старших размерностей и любых областей: ни для какой области с гладкой границей в четномерном пространстве соответствующая функция объема не является алгебраической. Другая гипотеза Арнольда говорит, что в нечетномерных пространствах эта функция алгебраична только у эллипсоидов. Первая из этих гипотез — о четномерном случае — была окончательно доказана в 2013 году, вскоре после лекций на эту тему на ЛШСМ-2013; нечетномерная же задача еще ждет своего полного решения.

Эта книга посвящена рассказу про эти сюжеты и про набор соображений, позволяющих доказывать утверждения такого типа, — *теорию монодромии*. Эта теория описывает сложность продолжения функций объема (и многочисленных других функций математической физики, например поверхностных потенциалов и решений волновых уравнений) в комплексную область. Современный топологический аппарат этой науки называется *теорией Пукара—Лефшеца*, см. [18], [11]. Еще один увлекательный сюжет, возникающий в этих вычислениях и играющий ключевую роль в решении четномерной задачи, — теория групп преобразований, порожденных отражениями, о которой я тоже немного расскажу.

Благодарности. Я очень благодарен А. С. Роговой, расшифровавшей запись моих лекций на Летней школе «Современная математика» в 2013 и 2014 годах, а также В. А. Клепцыну за самоотверженный и щедрый труд по доводке и редактированию текста.

Моя работа над книгой была поддержана грантом Российского Научного Фонда № 16-11-10316.

§ 2. История и постановка задачи

Начнем с формулировки задачи, которая возникла у Ньютона в связи со вторым законом Кеплера. Пусть на вещественной плоскости нарисован *овал* (т. е. выпуклая гладкая замкнутая кривая), и мы, проводя прямую, отсекаем от ограниченной этим овалом фигуры сегмент (см. рис. 1). Сколь хорошей может быть функция на множестве всех прямых, сопоставляющая каждой прямой площадь отсекаемого ею сегмента? Например, может ли эта площадь быть многочленом от коэффициентов уравнения прямой?

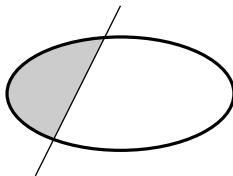


Рис. 1. Овал и отсекаемая прямой часть

Несложно увидеть, что многочленом эта функция быть не может. Действительно, попробуем немного пошевелить прямую и посмотреть, что при этом будет происходить. Ясно (хотя, конечно, формально это и нужно обосновывать), что если функция-многочлен задает площадь сегмента, лежащего слева от проводимого в данном направлении разреза, то при непрерывном движении разрезающей прямой мы всегда будем получать площадь сегмента, лежащего слева относительно выбранной ориентации нашей прямой.

Зафиксируем теперь какую-нибудь точку внутри области и будем вращать прямую, проходящую через эту точку. К моменту, когда мы развернем прямую на 180° от ее исходного положения (проводя разрез в противоположном направлении), остающейся слева от разреза окажется другая из двух частей, на которые разрезан наш овал (см. рис. 2). Получается, что наша функция-многочлен для одной и той же прямой должна принимать как значение, равное площади части, остающейся слева, так и значение, равное площади части, остающейся справа.

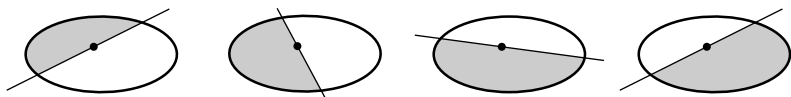


Рис. 2. Вращение прямой

Значит, такая отсекаемая площадь должна быть не совсем функцией, а чем-то, что может принимать в одной точке хотя бы два значения. Мы знаем такие «не то чтобы функции»: например, такова функция $\sqrt{x}$ от одной переменной. Конечно, можно рассматривать *арифметический* квадратный корень: положительный корень уравнения $y^2 = x$. Но применение положительности неестественно с алгебраической точки зрения (в частности, оно не обобщается на комплексные числа). Гораздо естественнее считать, что есть *два* равноправных решения уравнения $y^2 = x$ при данном x , и разрешить функции $\sqrt{x}$ принимать любое из этих значений. Как это сделать и почему это нам поможет — мы увидим чуть позднее.

Есть еще одна причина, по которой наша исходная функция, задающая площадь отрезаемого сегмента, не может быть многочленом. Рассмотрим прямые, которые вообще не проходят через нашу область. Для такой прямой значение нашей функции равно нулю или всей площади области S , в зависимости от выбора стороны.

Начнем теперь двигать прямую в сторону овала (см. рис. 3). До момента столкновения значение функции будет оставаться тождественно нулевым или тождественно равным S , а потом вдруг перестает быть таковым. Конечно, многочлены себя так не ведут — как и вообще никакие приличные функции.

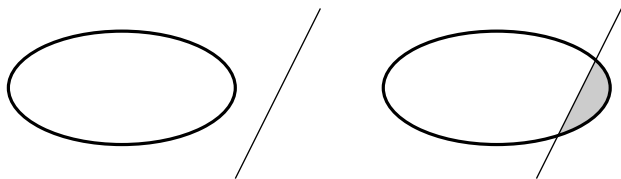


Рис. 3. Движение прямой и появление пересечения

Поэтому у нас возникает желание, чтобы каждой прямой соответствовало по крайней мере четыре значения: площадь слева и

площадь справа, если прямая проходит через область, и ноль и вся ограниченная овалом площадь, на случай, если прямая область не пересекает. А как это пожелание формализовать?

К счастью, в науке есть такой класс «как бы функций», которые могут иметь несколько значений: в случае функций от одной переменной он включает уже упомянутую выше функцию $\sqrt{x}$ и вообще корень любой степени из любого многочлена от x . Это — *алгебраические функции*.

Мы знаем, что обычная функция $f(x)$ — это все равно что ее график, т. е. множество пар (x, z) , связанных условием $z = f(x)$. В частности, график многочлена $f(x)$ задается уравнением $F(x, z) = 0$, где $F(x, z)$ — многочлен $z - f(x)$. Но пока функция была обычной, каждой точке x соответствовало одно значение z . А теперь, расширяя класс многочленов, мы откажемся от этого требования, попросив только, чтобы «график» новой функции задавался полиномиальным уравнением — уже от двух переменных x, z :

Определение 1. *Алгебраической функцией* от одной переменной x называется (отличный от тождественного нуля) многочлен $F(x, z)$ от двух переменных. Мы будем говорить, что z — одно из значений алгебраической функции в точке x , если $F(x, z) = 0$; см. рис. 4. Всё множество точек (x, z) , где выполнено это уравнение, называется графиком этой функции.

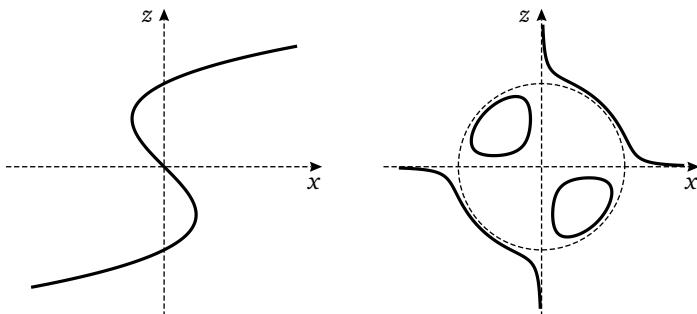


Рис. 4. Примеры алгебраических (многозначных) функций:
 $z^3 - z - x = 0$ слева и $(x^2 + z^2 - 1) \cdot xz - \varepsilon = 0$ справа

Так, мы сразу видим, что $\sqrt{x}$ — это алгебраическая функция: она задается многочленом $z^2 - x$. Понятно, что так же можно задать

кубический корень $\sqrt[3]{x}$, корень любой степени $\sqrt[k]{P(x)}$ из любого многочлена $P(x)$ и даже из рациональной функции $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Многомерный аналог этого понятия таков:

Определение 2. Алгебраической функцией от n переменных $x_1, \dots, x_n$ называется полином от $n + 1$ переменной $F(x_1, \dots, x_n, z)$, не равный тождественно нулю. Значениями этой «функции» в точке $(x_1, \dots, x_n)$ считаются все такие значения z , что $F(x_1, \dots, x_n, z) = 0$.

Используя вольность речи, часто в таком случае записывают эту функцию просто как $z(x_1, \dots, x_n)$, имея в виду, что она может принимать не одно значение. Выбор одного из этих значений называется выбором *ветви* алгебраической функции.

Во избежание недоразумений, заметим, что тот же термин «алгебраический» используется и в другой ситуации:

Определение 3. Подмножество в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$ называется *алгебраическим*, если оно состоит из всех точек, удовлетворяющих какой-нибудь системе уравнений $f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, где все $f_1, \dots, f_k$ — многочлены.

Подмножество в $\mathbb{R}^n$ называется *полуалгебраическим*, если оно состоит из всех точек, удовлетворяющих системе полиномиальных равенств и строгих полиномиальных неравенств, или является конечным объединением множеств, каждое из которых задано такой системой.

Теперь мы можем сформулировать вопрос, возникший у Ньютона:

Вопрос. *Существует ли на плоскости такая выпуклая гладкая замкнутая кривая, что функция, сопоставляющая прямой площадь сегмента, отсекаемого этой прямой от области, ограниченной этой кривой, алгебраична как функция от коэффициентов уравнения прямой?*

В соответствии с предыдущими определениями, такая алгебраичность означает, что существует ненулевая функция $F(a, b, c, V)$, которая обращается в 0 во всех таких точках (a, b, c, V) , что V — площадь сегмента, отсекаемого прямой, заданной уравнением $ax + by = c$.

Откуда у Ньютона взялась такая задача? Второй закон Кеплера говорит, что планета, движущаяся по эллиптической орбите под действием силы тяготения, за равное время заметает равные сек-

ториальные площади, если смотреть из центра притяжения. То есть зависимость между временем и площадью сектора очень простая — линейная. А не получится ли так, что зависимость координаты планеты от времени будет алгебраической?

Это эквивалентно алгебраической зависимости между тангенсом угла наклона прямой, соединяющей центр притяжения и планету, и площадью сектора эллипса, ограниченного этой прямой и фиксированным лучом, выходящим из центра притяжения.

В случае эллипса сразу стало ясно (это следовало из явных формул), что такого быть не может. И Ньютон задумался, существует ли хоть одна кривая, для которой такая зависимость все-таки будет алгебраической. Правда, при приходящей из небесной механики постановке вопроса возникает площадь сектора вместо площади сегмента. Но, как мы увидим в § 3, эта замена не очень существенна.

Такой же вопрос, конечно, можно рассматривать и в любой другой размерности. Назовем телом ограниченную область в $\mathbb{R}^n$, а гиперплоскостью — плоскость размерности $n - 1$.

Определение 4. Тело в $\mathbb{R}^n$ называется *алгебраически интегрируемым*, если функция, сопоставляющая любой гиперплоскости объем сегмента, отсекаемого этой гиперплоскостью от данного тела, оказывается алгебраической функцией от коэффициентов уравнения плоскости.

Вопрос Ньютона в таких терминах переформулируется так: существует ли на плоскости замкнутая выпуклая гладкая кривая, ограничивающая алгебраически интегрируемое тело? К тому, чтобы такая кривая нашлась, были некоторые оптимистические предпосылки, которые мы увидим в двух следующих пунктах.

2.1. Одномерный случай

Временно оставим плоский случай и перейдем к совсем игрушечной задаче: что происходит в одномерном случае, на прямой? Рассмотрим вместо овала отрезок, например, от точки m до M (см. рис. 5).

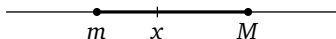


Рис. 5. Движение отрезающей точки x по отрезку $[m, M]$

Попробуем найти функцию, зависящую от x , которая удовлетворяет нашим условиям: она должна быть алгебраической и среди ее значений должны быть обе площади, отсекаемые этой точкой от всего отрезка. Это несложно сделать: рассмотрим многочлен

$$F(x, V) = V \cdot (V - V_0) \cdot (V - x + m) \cdot (V - M + x),$$

где $V_0 := M - m$ — полная длина исходного отрезка.

Заданная этим многочленом алгебраическая (четырёхзначная!) функция действительно удовлетворяет нашим условиям. Если для любой точки x обозначить через V длину части отрезка $[m, M]$, лежащей с любой стороны от x , и подставить ее в нашу формулу вместе с x , то получается 0.

В случае одной переменной нетрудно было ожидать, что все получится хорошо. Замечательно, что все будет хорошо и в размерности три.

2.2. Трехмерный случай

Если в качестве «овального тела» мы рассмотрим шар в $\mathbb{R}^3$, то соответствующая функция тоже будет алгебраической. А именно, есть теорема Архимеда (иллюстрация к которой вынесена на обложку брошюры [25]):

Теорема (Архимед). Пусть рядом поставлены шар и конус высоты, равной радиусу шара, опирающийся на окружность-основание, равное экваториальному плоскому сечению шара. Тогда для всех горизонтальных плоскостей, пересекающих конус, сумма площадей сечений конуса и шара будет одна и та же (см. рис. 6). В частности, эта сумма равна площади экваториального сечения.

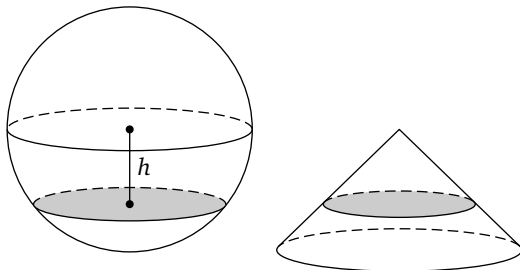


Рис. 6. Теорема Архимеда

Эта теорема легко позволяет найти объем сегмента, отсекаемого от шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии h от центра.

Задача 1. Найдите этот объем.

Указание. Из теоремы Архимеда следует, что объем такого сегмента равен разности объема цилиндра высоты $R - h$ и объема соответствующего усеченного конуса.

Ответ. $\pi R^2(R - h) - \frac{1}{3}\pi(R^3 - h^3)$.

Итак, ответ в этой задаче — многочлен от числа h — расстояния от секущей плоскости до центра сферы. А как это расстояние выражается через коэффициенты секущей плоскости? Несложно увидеть, что для выражения h нам понадобится одно извлечение квадратного корня (впрочем, что менее неприятно, и деление тоже).

Задача 2. Найдите расстояние h от плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, до точки (x_0, y_0, z_0) .

Ответ. $h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

В частности, расстояние от этой плоскости до начала координат равно $\sqrt{\frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$. Поэтому объем сегмента выражается через коэффициенты секущей плоскости уже не как многочлен, но все еще как алгебраическая функция. Полином $F(a, b, c, d, V)$, доказывающий это, полезно построить явно, но есть и такой общий факт: композиция алгебраических функций алгебраична. Например, подставляя алгебраическую функцию, выражающую h через коэффициенты плоскости, в многочлен, выражающий объем через h , мы получим алгебраическую функцию от этих коэффициентов. Читатель может попробовать доказать этот общий факт (это не очень сложно, но требует умения работать с симметрическими многочленами).

Функция объема сегмента будет алгебраической и если мы рассматриваем вместо шара произвольный эллипсоид. Действительно, задача об алгебраической интегрируемости *аффинно-инвариантна*. А именно, если мы сделаем какое-то линейное или аффинное преобразование нашего пространства, то плоскости перейдут в плоскости, все объемы умножатся на одну и ту же константу (определитель этого преобразования), и если наша функция была алгебраической, то она алгебраической и останется. А с другой стороны, любой эллипсоид можно аффинным преобразованием получить из шара.

§ 3. Двумерный выпуклый случай: теорема Ньютона

3.1. Теорема Ньютона

Итак, в одномерном и в трехмерном случаях алгебраически интегрируемые тела с гладкой границей существуют. А что будет в случае задачи Ньютона, на плоскости?

Оказывается, что двумерный случай гораздо хуже, чем одномерный и трехмерный. Так очень часто случается; другой пример подобной ситуации — волновое уравнение, которое описывает распространение звука. В размерности три оно ведет себя хорошо, поэтому люди в общем слышат друг друга и различают речь. Это связано с тем, что любой произнесенный звук в какой-то момент доходит до человека и сразу уходит дальше и больше не звучит. То же происходит и в одномерном пространстве. А вот если бы мы общались в двумерном пространстве, как, например, дельфины (они общаются звуком в достаточно узком акустическом слое в океане), то каждый произнесенный звук бы доходил до уха и продолжал звучать еще долго после того, как дошел. Это можно увидеть, если кинуть в воду камень (что будет аналогом одиночного «хлопка в ладоши»): побегавшие от него круги еще долго будут качать поплавок где-нибудь в стороне. Поэтому если в размерности два сказать какую-нибудь длинную фразу, то остаток от первого звука будет смешиваться со следующими звуками и получится что-то непонятное. Эта аналогия далеко не случайна: особенности поведения решений гиперболических дифференциальных уравнений (таких как уравнения распространения волн) и функций объема описываются с помощью одной и той же топологической техники, о которой мы расскажем ниже.

Возвращаясь к исходному вопросу Ньютона — оказывается, что «хороших» интегрируемых овалов на плоскости нет. А именно, Ньютон доказал следующую теорему:

Теорема 1 [22, Lemma XXVIII]. *Не существует гладких алгебраических выпуклых ограниченных овалов в $\mathbb{R}^2$, которые были бы алгебраически интегрируемыми.*

В этой теореме¹ есть одно дополнительное (относительно исходной постановки вопроса) предположение — овал предполагается алгебраическим, т. е. ограниченной кривой, задающейся полиномиальным уравнением $f(x, y) = 0$. На самом деле, от этого предположения можно (как мы обсудим после доказательства теоремы) избавиться, заменив его на бесконечную дифференцируемость. Но пока докажем теорему Ньютона в этой формулировке.

Доказательство. Пусть, напротив, нашелся алгебраический выпуклый овал. Выберем точку O внутри него и проведем два секущих луча через нее до пересечения с овалом; обозначим точки пересечения через A_1 и A_2 . Зафиксируем один из этих лучей, проходящий через точку A_2 ; после этого мы будем менять луч OA_1 и смотреть на то, как от этого луча зависит площадь сектора A_1OA_2 (см. рис. 7).

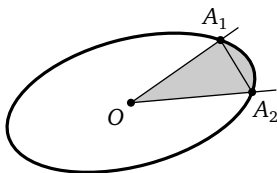


Рис. 7. Доказательство теоремы Ньютона

Возьмем точку O в качестве начала координат; тогда уравнение прямой OA_1 имеет вид $ax + by = 0$. Заметим, что точка A_1 (точнее, обе ее координаты x_1 и y_1) алгебраически зависит от коэффициентов a и b прямой. Поэтому алгебраически зависят от коэффициентов и (ориентированная) площадь треугольника OA_1A_2 , и коэффициенты, задающие уравнение прямой A_1A_2 . А значит, алгебраически от коэффициентов a и b будет зависеть и площадь сегмента, отсекаемого прямой A_1A_2 : по нашему предположению она алгебраически зависит от коэффициентов уравнения прямой A_1A_2 , а суперпозиция алгебраических функций алгебраична.

¹*Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissam possit per aequationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.* Перевод А. Н. Крылова: «Не существует такой замкнутой овальной кривой, для которой площадь, отсекаемая произвольно проводимыми прямыми, определялась бы в общем виде уравнениями с конечным числом членов и конечной степени» (цит. по [22, с. 153]).

Ньютон не уточняет, что имеется в виду под *figura ovalis*, но, анализируя свойства этой фигуры, используемые в его доказательстве, мы находим гладкость, выпуклость и ограниченность, перечисленные в теореме 1.

Тогда (как сумма алгебраических функций) алгебраической будет и сумма (ориентированной) площади треугольника OA_1A_2 и площади сегмента, отсекаемого прямой A_1A_2 . Но эта сумма в точности равна площади сектора A_1OA_2 . Тем самым, площадь такого сектора алгебраически зависит от прямой OA_1 .

Посмотрим теперь, что происходит с функцией $S(a, b)$ площади сектора, когда луч делает полный оборот. Незадолго до совпадения лучей сектор замечает почти всю площадь S_0 нашего овала. Поэтому сразу после оборота мы приходим не к тем значениям функции $S(a, b)$, с которых мы начинали, а к увеличенным на S_0 . Продолжая вращать луч, мы после еще одного оборота приходим к функции $S(a, b) + 2S_0$ и так далее. В итоге множество значений многозначной функции $S(a, b)$ для любого луча оказывается бесконечным.

Но алгебраическая функция не может принимать бесконечно много значений: количество значений многозначной функции, заданной полиномиальным уравнением $F(a, b, S) = 0$, не может превосходить степень многочлена F по переменной S . Мы получили желаемое противоречие. $\square$

3.2. Условия и контрпримеры

В этом доказательстве теоремы Ньютона многое требуется и используется. У Ньютона были дискуссии по поводу того, какие из этих условий (гладкость, выпуклость, ограниченность и так далее) можно отбросить. Например, условие гладкости ни в коем случае нельзя отбрасывать. Еще известный неприятель Ньютона Лейбниц критиковал его, говоря, что если взять треугольник, то функция отсекаемого объема получается алгебраической. Это случилось потому, что Ньютон в своей теореме написал просто «овал» — не уточнив, что под этим должно пониматься, и не выписав явно условие гладкости (хотя, несомненно, подразумевал его). Соответственно, Лейбниц к этому прицепился: если не сказано, что кривая гладкая, то почему бы этому «овалу» не быть треугольником?

Есть еще более скверный пример, чем пример Лейбница. В доказательстве важно, что овал ограничивает положительную площадь. Мы можем взять лемнискату — кривую в форме восьмерки, — которая ограничивает нулевую ориентированную площадь. Для такой кривой не просто не проходит предъявленное доказательство

(оно «ломается» еще и на том, что луч OA_1 в некоторый момент оказывается касающимся нашей кривой). Оказывается, существуют алгебраически интегрируемые лемнискаты! Одна из них задается уравнением $y^2 = x^2 - x^4$ (см. рис. 8). Эта лемниската была предложена Гюйгенсом, а впоследствии ее исследовал Жероно, и потому сейчас ее чаще называют лемнискатой Жероно.

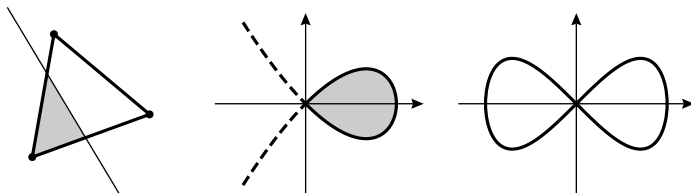


Рис. 8. Алгебраически интегрируемые примеры:
треугольник, рациональная кубика $y^2 = x^2(1 - x)$,
лемниската Гюйгенса—Жероно $y^2 = x^2 - x^4$

Еще один пример алгебраически интегрируемой фигуры с алгебраической — но, естественно, негладкой — границей — это область, ограниченная кривой третьей степени $y^2 = x^2(1 - x)$. А где для этой кривой «ломается» доказательство? Можно увидеть, что, когда мы рассматриваем точку A_1 как функцию от луча OA_1 — при прохождении точки самопересечения она «уйдет наружу», на другую ветвь граничной кривой (см. рис. 9). Соответственно, после «полного оборота» мы получим уже совсем другую функцию (а вовсе не старую, сдвинутую на константу) и не получим искомого противоречия.

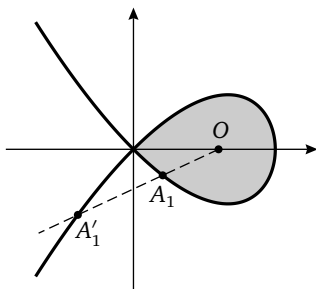


Рис. 9. Переход точки пересечения A_1
на другую ветвь граничной кривой

Обобщая эти примеры, нетрудно построить алгебраически интегрируемую фигуру, ограниченную алгебраической кривой любой заданной наперед *конечной* гладкости.

3.3. Обобщения и вопросы

А вот от предположения алгебраичности — если уже известно, что кривая бесконечно гладкая — можно избавиться. Дело в том, что касательная отсекает от нашей кривой нулевую площадь, поэтому если наша фигура алгебраически интегрируема, то соответствующая алгебраическая функция $V(a, b, c)$ (точнее, одна из ее ветвей) обращается в 0 во всех точках (a, b, c) , соответствующих таким касательным. Из этого следует, что множество касательных будет алгебраическим или по крайней мере полуалгебраическим подмножеством множества всех прямых в $\mathbb{R}^2$. (Легко видеть, что последнее множество является проективной плоскостью без одной точки: коэффициенты a, b, c уравнения прямой определяются ею с точностью до умножения на ненулевую константу, и из всех троек $(a : b : c)$ недопустимыми являются только тройки $(0 : 0 : c)$.)

Далее, по множеству касательных можно восстановить и саму исходную кривую как их *огibaющую* — и эта *огibaющая* также будет по крайней мере полуалгебраической.

Читатель, знакомый с проективной двойственностью, может убедиться в этом следующим образом: если исходная кривая γ расположена на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, то множество касательных к ней можно рассматривать как кривую γ^* на двойственной плоскости. Множество же точек γ в точности двойственно к множеству касательных к γ^* . Наконец, множество касательных к полуалгебраической кривой также полуалгебраично. Другое рассуждение можно найти в статье В. И. Арнольда в «Кванте» [2].

Итак, если гладкая кривая ограничивала бы алгебраически интегрируемую область, то она автоматически была бы алгебраической, поэтому последнее условие можно не указывать в формулировке теоремы. У нас остались еще два предположения: выпуклость области и ее двумерность. Можно ли избавиться и от них?

Как оказывается, от первого из них можно избавиться совсем. Второе же можно ослабить до предположения о четности размерности: аналогичное утверждение верно и для тел с гладкой границей

в $\mathbb{R}^{2k}$. В §4 мы начнем именно с этого второго обобщения (сохраня сначала условие выпуклости), а сейчас обсудим еще один круг возникающих вопросов.

3.4. Локальная алгебраичность

В задаче Ньютона—Арнольда речь идет о *глобальной* алгебраичности функции объема: может ли быть, что эта функция, определенная на пространстве гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{2k}$, всюду совпадает с какой-нибудь ветвью алгебраической функции? Мы покажем, что ответ на этот вопрос отрицателен для любой ограниченной области с гладкой границей. Локальный вариант того же вопроса состоит в следующем. Все пространство гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{2k}$ делится на области, состоящие из плоскостей общего положения (т. е. нигде не касательных к поверхности рассматриваемого тела); границы между этими областями состоят из касательных гиперплоскостей. Внутри каждой из этих областей функция объема — гладкая, а на границе возникает излом. Если бы внутри каждой области эта функция совпадала с алгебраической, то алгебраической была бы и функция на всем пространстве. Мы собираемся доказать, что такого не бывает. Но, может быть, эта функция может совпасть с алгебраической хотя бы в некоторых областях пространства неособых гиперплоскостей?

Одна такая область бросается в глаза: она состоит из плоскостей, вовсе не пересекающих данное тело, так что функция объема состоит там из двух постоянных функций (равных 0 и полному объему тела). Но есть ли примеры *нетривиальных* областей (т. е. состоящих из гиперплоскостей, пересекающих тело), в которых функция объема алгебраична (хотя, очевидно, и не равна константе)?

В п. 6.9 мы докажем, что таким примером является трубчатая окрестность стандартной двумерной сферы в $\mathbb{R}^4$, т. е. тело, ограниченное поверхностью $(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1)^2 + u^2 = \varepsilon^2$, где $\varepsilon < 1$. Удивительным образом, главным инструментом при нахождении этого *положительного* примера оказались (описываемые ниже) *запретительные* результаты, перечисляющие геометрические и топологические препятствия к свойству алгебраической интегрируемости. Дело в том, что найти тело, удовлетворяющее всем геометрическим ограничениям, и записать его уравнение несравненно легче, чем сразу угадать формулу фигуры, объем которой хорошо себя ведет.

§ 4. Выпуклый случай в $\mathbb{R}^{2k}$

В предыдущем разделе теорема Ньютона была доказана для выпуклых овалов на плоскости. Здесь мы обобщим ее на случай произвольной четной размерности:

Теорема 2 [7, 8]. *Ни в каком четномерном пространстве не бывает выпуклых гладких алгебраически интегрируемых тел.*

4.1. Начало: сечения параллельными прямыми

Доказательство теоремы Ньютона, проведенное в § 3, не обобщается на более высокие размерности. Поэтому сначала мы разберем другое доказательство этой же («двумерной») теоремы — такое, которое уже можно будет обобщить. При этом мы воспользуемся очень важным и часто используемым методом — *выходом в комплексную область*.

Итак, пусть у нас имеется выпуклая фигура в $\mathbb{R}^2$, ограниченная некоторым алгебраическим овалом, т. е. компактной компонентой множества, заданного условием $f(x, y) = 0$, где f — какой-то полином. Раньше мы рассматривали сечения овала прямыми, проходящими через одну и ту же точку O . Теперь же выберем какое-нибудь направление и будем рассматривать сечения прямыми этого направления.

Выберем систему координат так, чтобы эти прямые были параллельны оси ординат Oy . Каждая такая прямая задается уравнением $x = c$ для какой-то константы c и определяется точкой своего пересечения с осью абсцисс Ox (см. рис. 10).

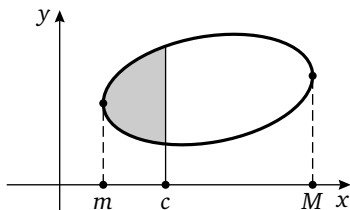


Рис. 10. Второе доказательство теоремы Ньютона

Пусть m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значение x -координаты на нашем овале. Тогда любая прямая $\{x = c\}$, где $m < c < M$, пересекает овал ровно в двух точках, причем каждая из этих точек «хорошо» (гладко) зависит от c . Иными словами, окрестность каждой из этих точек проецируется на ось абсцисс диффеоморфно.

Для $c = m$ или $c = M$ прямая $x = c$ касается нашего овала, поэтому зависимость точки пересечения от c вблизи этих значений будет «плохой» — а отображение проецирования, соответственно, будет устроено более сложно. Потребуем, чтобы касание в этих точках было простейшим, т. е. квадратичным, а не более высокого порядка, или, что то же самое, чтобы эти точки касания не были точками уплощения овала. (В таком случае говорят, что эти точки — *морсовские* для ограничения функции x на овал.) Мы всегда можем добиться этого выбором координаты x , т. е. направления прямых нашего семейства: направлений, касательных к овалу в точках уплощения, «мало», поэтому нужное нам направление всегда найдется. (В общем случае это утверждает *лемма Бертини—Сарда*; ее формулировку и доказательство можно посмотреть в [6, с. 26] или в [21].) Тогда вблизи такой точки касания координата y точек пересечения прямой $\{x = c\}$ с овалом зависит от c примерно как квадратный корень из $c - m$ или из $M - c$.

4.2. Алгебраические функции комплексного переменного

Теперь, как и было обещано, мы выйдем в комплексную область и будем рассматривать прямые $x = c$ не только с вещественным, но и с комплексным c . Давайте посмотрим, что нам это даст.

Если исходная функция отсекаемого объема была алгебраической функцией на пространстве всех прямых в $\mathbb{R}^2$, то алгебраично и ее ограничение на наше одномерное семейство прямых, зависящих от параметра c . Значит, эта функция $V(c)$ задается некоторым полиномиальным соотношением $F(c, V) = 0$. И нам ничто не мешает продолжить эту функцию в комплексную плоскость — считая и c , и V уже комплексными, а не вещественными переменными и подставляя их во все тот же многочлен F . Нигде же в записи многочлена F не сказано, что переменные вещественные!

Мы получаем алгебраическую функцию комплексного переменного и дальше будем пользоваться замечательными свойствами таких функций, связанными с понятиями *накрытия*, *ветвления* и *монотонности*.

Возьмем какое-нибудь (типичное) значение аргумента $c = c_1$; ему соответствуют несколько значений функции V . Если мы немного «пошевелим» c , перейдя к близкому значению $c = c_2$ (см. рис. 11), то у нас будет столько же значений. Здесь важно, что когда мы отошли недалеко, то мы хорошо понимаем, какой новый корень (новое значение функции) получился из какого предыдущего. Более того, если мы сделали такое маленькое шевеление много раз, проведя c вдоль какого-то непрерывного пути, то все равно будем понимать, какая точка в прообразе начала пути перешла в какую точку над его концом, даже если весь путь будет не таким и маленьким.

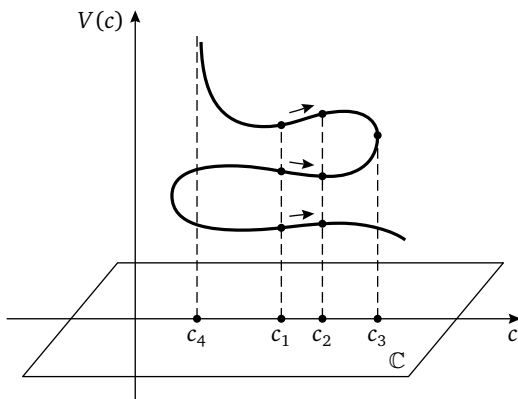


Рис. 11. Алгебраическая функция

Неприятности здесь могут возникнуть только вот отчего: двигаясь вдоль такого пути в множестве параметров c , мы можем дойти до точки c_3 , над которой два значения сольются, или до c_4 , когда значение «убегает» на бесконечность, подобно тому как убегает значение алгебраической функции $x \cdot z - 1 = 0$ при $x \rightarrow 0$.

Вспомним теперь, что множество прямых $\{x = c\}$ у нас является комплексной прямой, т. е. мы можем брать любое комплексное c . А множество таких точек c этой прямой, «над» которыми значения сливаются или убегает на бесконечность, маленькое: это конечное

число точек. Итак, на плоскости имеется конечное множество «плохих» точек, которые мы будем называть *точками ветвления*. Пока мы двигаем s , не заходя в них, у нас непрерывно двигаются корни V многочлена $F(s, V)$ — и мы знаем, какой из них получился из какого.

Если мы пройдем вдоль какого-нибудь достаточно длинного пути, не заходя в «плохие» точки, но обходя вокруг них, и вернемся обратно, то значения функции, которые мы так продолжали, могут как-то переставиться.

Например, рассмотрим простейший случай алгебраической функции: радикал $\sqrt{x}$, задающийся полиномом $F(x, z) = z^2 - x$ (см. рис. 12а). Над любой точкой $x \neq 0$ у него есть (в комплексной области) два корня. Когда мы обведем x вокруг точки ветвления 0, то эти два корня переставятся.

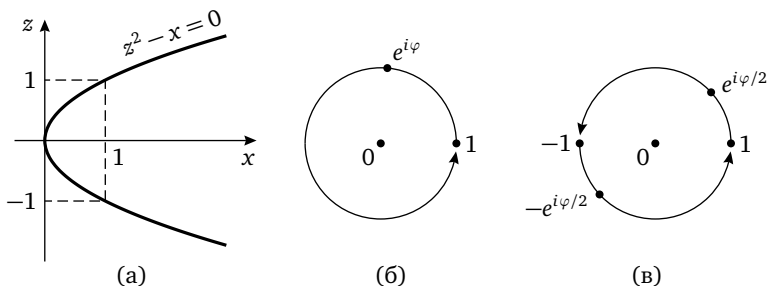


Рис. 12. Функция $z = \sqrt{x}$ и обход вокруг ее точки ветвления

Проще всего это увидеть на примере обхода по единичной окружности. Допустим, что начальной точкой была единица. Квадратные корни из нее — это 1 и -1 . Сдвинем точку x на угол φ : мы перейдем в точку $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (см. рис. 12б). Тогда каждый из корней повернется на $\varphi/2$ и перейдет в точку $e^{i\varphi/2}$ или $-e^{i\varphi/2}$ (см. рис. 12в). Обход точкой x полного круга соответствует φ , равному 2π . При этом каждый из корней повернется на угол π (домножившись на $e^{i\pi} = -1$), т. е. они поменяются местами.

В таких ситуациях произносится слово *монодромия*: оно означает перестановку значений алгебраической функции при обходе аргумента вокруг точек ветвления.

Нечто подобное происходит и для более сложных функций. Рассмотрим сначала такую ситуацию, когда ветвление простейшее

(квадратичное): при подходе к точке ветвления сливаются ровно два корня уравнения $F(x, z) = 0$. Тогда рядом с точкой слияния поверхность $F(x, z) = 0$ и в комплексной области напоминает поверхность квадратного корня, которую мы уже видели.

На плоскости $\mathbb{C}^1$ значений x пройдем вдоль следующего пути, начинающегося и заканчивающегося в некотором неособом значении x_0 (такие пути называются петлями); см. рис. 13. Во-первых, подойдем близко к точке ветвления c ; при этом все точки кривой с соответствующим значением координаты x взаимно однозначно сдвинутся в какие-то новые, причем две из них (B и C) окажутся близко к точке ветвления. Затем пройдем по маленькой окружности в комплексной области с центром в точке ветвления c . Тогда с точками, далекими от места слияния (типа точки A на рисунке), не происходит ничего, они обходят вдоль маленькой окружности и приходят обратно. А вот точки B и C поменяются местами точно так же, как в случае квадратного корня. И, наконец, вернемся обратно в точку x_0 вдоль того же пути, что в начале.

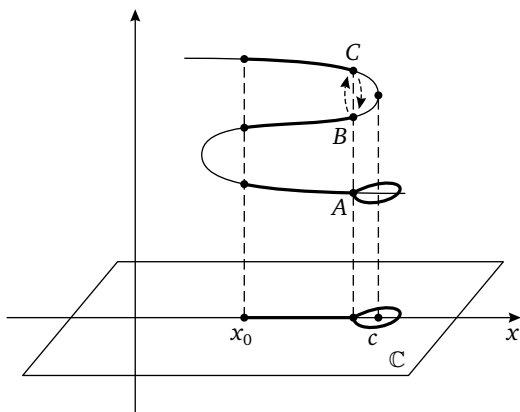


Рис. 13. Квадратичное ветвление; прообразы исходной точки x_0 и точки A , B и C , в которые они сдвигаются при подходе к критическому значению c

В результате, обойдя по такой петле в $\mathbb{C}^1$, мы получаем следующую перестановку: все точки типа A сохранятся и вернутся обратно, а точки, которые при подходе к точке ветвления сливались (B и C), поменяются местами.

Более того, мы можем проходить и по более сложным путям. Зафиксируем неособую начальную точку x_0 и любое значение z алгебраической функции F в ней (так что $F(x_0, z) = 0$). Тогда любой путь γ , начинающийся и заканчивающийся в x_0 и не заходящий в точки ветвления, определяет новую точку $\tilde{z}$, также лежащую над x_0 , — результат сдвига z над этой кривой. Поэтому каждому такому пути соответствует *перестановка* значений алгебраической функции в точке x_0 . Эта перестановка называется *преобразованием монодромии вдоль пути γ* .

При этом, если путь γ немного пошевелить (сохраняя в каждый момент времени оба свойства — начинаться и заканчиваться в x_0 и не заходить в точки ветвления), то соответствующая перестановка не изменится: действительно, при достаточно малом изменении пути, участвующего в ее определении, и результат продолжения изменится мало, а с другой стороны, он принимает значения в конечном множестве (всех перестановок значений).

Наконец, если пройти сначала по одной петле γ_1 , а потом по другой γ_2 , то перестановка, определяемая всем путем $\gamma_1 \cup \gamma_2$, будет композицией перестановок, определяемых этими путями. Поэтому множество всех перестановок, которые можно получить из всевозможных петель в множестве типичных точек (т.е. точек, не являющихся точками ветвления), образует группу — *группу монодромии* нашей алгебраической функции F .

Возникает увлекательная наука — теория монодромии алгебраических функций. Например, доказательство теоремы Руффини—Абеля о невозможности решения общего уравнения степени ≥ 5 в радикалах можно получить, рассматривая группу монодромии для алгебраических функций высокой степени (см., к примеру, [1]). А именно, если функция не очень вырожденная, то соответствующая группа монодромии будет совпадать со всей группой перестановок всех ее значений в этой точке. И оказывается, что группа перестановок из ≥ 5 элементов в некотором смысле сложнее, чем группа монодромии любой функции, которую можно получить последовательным добавлением радикалов.

Важное замечание, которое будет ключевым для нашего рассуждения, состоит в том, что группа монодромии алгебраической функции всегда конечна — ведь это подгруппа группы перестановок конечного множества прообразов!

Еще одно замечание: у общих алгебраических функций бывают точки ветвления более высокого порядка, обход вокруг которых задает не перестановку двух точек прообраза, а циклическую перестановку нескольких таких точек. Модельный пример задается функцией $z = x^{p/q}$, где дробь p/q несократима (соответствующий полином $F(x, z)$ равен $z^q - x^p$); в этом случае циклически переставляются q точек прообраза.

4.3. Отступление: алгебраические функции нескольких переменных

Хотя пока это нам не потребуется, расскажем об алгебраических функциях нескольких переменных, задаваемых полиномами $F(x_1, x_2, \dots, x_k, z) = 0$. Каждому набору $x_1, \dots, x_k$ такая «функция» ставит в соответствие набор чисел (те значения z , которые мы можем подставить в многочлен F вместе с $x_1, \dots, x_k$, получив в результате ноль).

Итак, множеством аргументов будет уже не $\mathbb{C}^1$, а $\mathbb{C}^k$. Над окрестностью точки общего положения в $\mathbb{C}^k$ многозначная функция по-прежнему распадается в набор обычных (однозначных непрерывных) функций. Но обычно имеется какое-то подмножество в $\mathbb{C}^k$, над которым будут вырождения примерно такого же вида, как и те, что мы видели для функции одной переменной.

Как правило, если пространство аргументов k -мерное, то это подмножество вырождения будет $(k - 1)$ -мерной гиперповерхностью. В вещественном смысле k -мерное комплексное пространство $2k$ -мерно, а эта гиперповерхность $(2k - 2)$ -мерна, т. е. она не разделяет наше пространство и ее можно обходить по замкнутым путям.

Здесь снова возникает группа монодромии. Выделив начальную точку $(x_1, \dots, x_k)$, мы берем всевозможные петли в $\mathbb{C}^k$ с началом и концом в этой точке, которые как-то огибают гиперповерхность ветвления Σ . Продолжая значения алгебраической функции над этими петлями, мы получаем перестановки значений функции в этой точке. При этом часто важна не только сама группа получаемых при этом перестановок значений (которая во всех достаточно сложных случаях просто совпадает со всей группой перестановок), но и то, какие перестановки порождаются какими петлями, по-разному обходящими множество ветвления.

Вообще, самое интересное, что можно сказать про алгебраические функции, вытекает из рассмотрения преобразований монодромии, получающихся при обходах вдоль путей в комплексной области (в которую очень полезно выходить, даже если исходная задача полностью формулировалась в терминах вещественных алгебраических функций вещественных переменных).

4.4. Контуры интегрирования и гомологии

Вернемся к нашим овалам. Допустим, что функция объема, определяемая каким-то алгебраическим овалом, алгебраическая. Выйдем в комплексную область и посмотрим, как она будет себя вести и ветвиться.

Давайте пройдем вдоль вот какого пути: подведем число c , задающее нашу прямую $x = c$, вдоль отрезка вещественной прямой совсем близко к минимальному значению m (но чуть выше его, скажем, к точке $m + \varepsilon$), обойдем точку m по маленькой окружности в комплексной области и наконец вернемся в исходное значение c по тому же отрезку $[m + \varepsilon, c]$. Что при этом произойдет с нашей функцией объема?

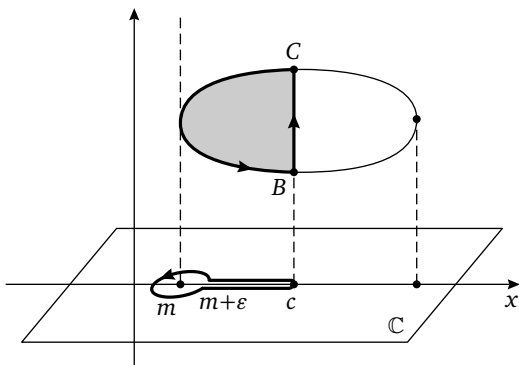


Рис. 14. Монодромия отсекаемого объема при обходе вокруг минимума

Здесь снова возникает слово *монодромия*, но в другом контексте. Выше это слово означало перестановку отдельных точек. Теперь нас интересует поведение некоторой функции — функции объема — и надо понять, как наш обход подействует на эту функцию.

Для этого нужно придать слову «объем» смысл, который мы могли бы применять и в комплексной области. Посмотрим на отсекаемую часть фигуры как на двумерную пленку с границей, состоящей из дуги границы овала и отрезка отсекающей прямой. Нельзя ли сопоставить «объем» (точнее, «площадь») вообще любому куску двумерной пленки, живущему в $\mathbb{C}^2$?

Оказывается, что можно! Строгое описание того, что происходит в этом разделе, формулируется в терминах дифференциальных форм, про которые можно прочесть в главе 7 книги [3] или в [9]. Я сейчас постараюсь объяснить происходящее «на пальцах», постоянно отсылая к этой теории.

Начнем с простого упражнения (которое предоставим читателю): если на обычной вещественной плоскости задан параллелограмм, стороны которого есть векторы (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (см. рис. 15), то его *ориентированная* площадь есть

$$S = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad (1)$$

т. е. определитель матрицы, состоящей из координат этих двух векторов; при этом ориентированной площадью называется его обычная евклидова площадь, взятая со знаком $+$ или $-$ в зависимости от ориентации репера в $\mathbb{R}^2$, заданного нашими двумя векторами, взятыми в этом порядке.

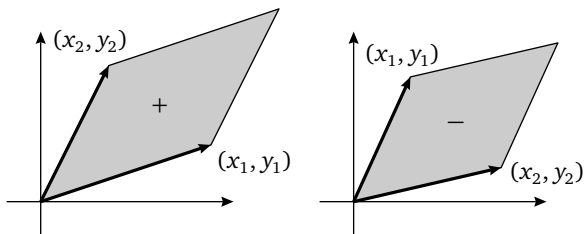


Рис. 15. Ориентированная площадь параллелограмма

Пусть теперь у нас есть какая-то вещественно-двумерная «пленка» в $\mathbb{C}^2$. Заметим, что ее можно («почти всю») разрезать на «почти параллелограммы». Действительно, раз пленка вещественно-двумерная, то о ней можно думать как об образе некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ под действием некоторого гладкого отображения φ (или,

по крайней мере, об объединении нескольких таких образов). Далее, разрежем область D на маленькие квадратики. Образы их под действием φ — это и есть искомые «почти параллелограммы». Действительно, если бы отображение φ было линейным, оно бы перевело квадрат в идеальный параллелограмм, но гладкое отображение на маленьком квадрате лишь приближается своей линейной частью, поэтому параллелограммы получаются неидеальные. Что мы, впрочем, сейчас будем игнорировать.

Посчитаем теперь для каждого такого параллелограмма по формуле (1) его «ориентированную площадь» (отметим, что результат применения — вообще говоря, комплексное число!). И сложим теперь все получившиеся величины. Предел таких сумм при измельчении и улучшении разбиения на параллелограммы — это и есть искомая величина «комплексифицированной площади». В курсе математического анализа доказывается, что этот предел действительно существует.

На ученом языке то, что мы только что проделали, называется «проинтегрировать 2-форму площади $dx \wedge dy$ по двумерной поверхности — по нашей ориентированной пленке».

Вообще говоря, интегрировать можно по любой пленке (ее при интегрировании называют *контуром*, хотя она и не одномерна). Но нас будут интересовать не любые контуры. А именно: пока мы рассматривали вещественную отсекаемую часть, ее граница состояла из дуги овала и отрезка прямой $x = c$. Обозначим через $\mathcal{A}$ комплексификацию нашего овала: если он задавался полиномиальным уравнением $f(x, y) = 0$, то $\mathcal{A}$ — множество *комплексных* пар точек, удовлетворяющих этому уравнению,

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Пусть также $X_c := \{(x, y) : x = c, y \in \mathbb{C}\}$ — комплексная прямая, заданная уравнением $x = c$. Так вот — нас будут интересовать только те контуры, граница которых лежит в объединении $\mathcal{A} \cup X_c$.

Такие объекты называются «относительными циклами». Слово «цикл» в теории гомологий означает «что-то, не имеющее границы» (например, параллель или меридиан в торе или замкнутый путь в графе); мы скоро увидим, почему такие объекты полезны и интересны. А слово «относительный» ослабляет это условие: границу относительному циклу иметь можно, но она должна целиком со-

держаться там, «относительно чего» это цикл (в данном случае — относительно $\mathcal{A} \cup X_c$).

Но в вещественной плоскости пленку — относительный цикл нельзя было «чуть-чуть пошевелить». А теперь у нас вещественно-двумерная пленка живет в вещественно-четырёхмерном $\mathbb{C}^2$ и, конечно, ее можно там немного продеформировать. Важно, что хотя пленка-контур и поменяется, ее «площадь» — результат интегрирования при малом шевелении (при котором граница остается в $\mathcal{A} \cup X_c$) — не изменится!

Читатель уже встречался с такой ситуацией, например, при вычислении работы потенциального поля сил: по какому бы пути мы ни несли пробное тело из точки P в точку Q , полная работа будет равна разности потенциалов в этих точках. И пока мы сохраняем начало и конец пути, при шевелении пути полная работа не меняется. Вторая аналогичная ситуация — поток несжимаемой жидкости (или поток магнитного поля!) через контур. Чтобы его найти, мы заклеиваем одномерный контур двумерной пленкой и считаем интеграл — но для двух разных заклеиваний интегралы совпадают. Так вот, наша 2-форма площади $dx \wedge dy$ тоже обладает такой же «потенциальностью»: ее интеграл не будет меняться при шевелении пленки.

Обоснование этого утверждения называется *формулой Стокса*. Она говорит, что если у нас есть какая-то дифференциальная k -форма ω и мы ее интегрируем по k -мерной границе ∂D некоторого $(k + 1)$ -мерного контура D , то результат интегрирования будет такой же, как если проинтегрировать дифференциал $d\omega$ этой k -формы (который является $(k + 1)$ -формой) по самому контуру D . (Точное определение дифференциальных форм и их дифференциалов см., например, в [9], [3]; нам нужен только один их представитель — форма объема $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ в $\mathbb{C}^k$, в частности форма $dx \wedge dy$ в $\mathbb{C}^2$.)

Простейшим случаем этой формулы является формула Ньютона—Лейбница. Если имеется функция (т. е. 0-форма) на отрезке I , то ее интеграл по границе ∂I отрезка I — это просто разность ее значений на концах отрезка. По формуле Ньютона—Лейбница она равна интегралу от производной функции (точнее, от дифференциальной 1-формы $df \equiv f' dx$) по самому отрезку I .

Можно применить эту формулу и к нашему интегралу. Но в нашем случае дифференциал $d(dx \wedge dy)$ равен нулю — как говорят, форма площади замкнута.

Возьмем теперь два двумерных контура K_0 и K_1 , затягивающих одну и ту же границу в $\mathcal{A} \cup X_c$, которые можно продеформировать один в другой, не двигая границу. Тогда все, что мы замечаем в процессе деформации, — это некоторый трехмерный контур D . А его граница ∂D — это «разность» $K_1 - K_0$ (контур K_0 там будет считаться с противоположной ориентацией, и это изменит знак интеграла).

Значит, по формуле Стокса

$$\int_{K_1} dx \wedge dy - \int_{K_0} dx \wedge dy = \int_{\partial D} dx \wedge dy = \int_D d(dx \wedge dy) = \int_D 0 = 0, \quad (2)$$

и интегралы от формы площади по K_0 и по K_1 совпадают.

А что, если в процессе деформации мы разрешим смещать и границу контура — с тем лишь условием, чтобы она всегда оставалась в $\mathcal{A} \cup X_c$? В этом случае у заматаемого трехмерного контура D к границе, по-прежнему включающей K_1 и взятый с противоположной ориентацией K_0 , добавится дополнительный двумерный контур K' , заматаемый в $\mathcal{A} \cup X_c$ при этой деформации одномерной границей контура. И применение формулы Стокса дает уже

$$\int_{K_1} dx \wedge dy - \int_{K_0} dx \wedge dy + \int_{K'} dx \wedge dy = 0.$$

Разобьем контур K' на два: $K' = K_{\mathcal{A}} \cup K_X$, где $K_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, а $K_X \subset X_c$. Мы хотим показать, что интегралы $\int_{K_{\mathcal{A}}} dx \wedge dy$ и $\int_{K_X} dx \wedge dy$ оба равны нулю. Как только мы это сделаем, мы получим искомое равенство «площадей» K_0 и K_1 .

Но поверхности $\mathcal{A}$ и X_c , хоть и являются вещественно-двумерными, с комплексной точки зрения одномерны. В частности, в любой точке $\mathcal{A}$ любые два касательных к $\mathcal{A}$ вектора пропорциональны — пусть и с комплексным коэффициентом. Значит, «площадь» $dx \wedge dy$, которую мы вычислим для натянутого на них параллелограмма, будет равна нулю! И, конечно, равен нулю и соответствующий интеграл.

Научно говоря, ограничение 2-формы площади на комплексно-одномерное многообразие $\mathcal{A}$ равно нулю — а значит, равен нулю и интеграл от нее по любому лежащему в $\mathcal{A}$ двумерному контуру (в частности, по $K_{\mathcal{A}}$). То же рассуждение, конечно, применимо и к

части $K_X \subset X_c$. Мы получили

$$\int_{K'} dx \wedge dy = \int_{K_{\mathcal{A}}} dx \wedge dy + \int_{K_X} dx \wedge dy = 0 + 0 = 0. \quad (3)$$

Сделаем еще один шаг в понимании того, от чего на самом деле зависит площадь относительного цикла, какие замены мы можем себе позволить. А именно, заметим, что в рассуждениях выше нам было неважно, что K_0 и K_1 можно именно продеформировать друг в друга: важно лишь, чтобы нашелся трехмерный контур D , граница которого, лежащая вне $\mathcal{A} \cup X_c$, есть объединение K_0 , взятого с противоположной ориентацией, и K_1 .

Если такой контур существует, то наши два относительных цикла называются *гомологичными*. Множество всех таких циклов, гомологичных друг другу, называется классом двумерных относительных гомотопий пространства $\mathbb{C}^2$ по модулю его подмножества $\mathcal{A} \cup X_c$. Все такие классы образуют абелеву группу (контуров можно складывать, и получающаяся операция не зависит от выбора контуров, представляющих складываемые классы гомотопий). Эта группа в нашем случае обозначается так: $H_2(\mathbb{C}^2, \mathcal{A} \cup X_c)$. Подробно о группах гомотопий см., например, в [20], [15].

Предыдущее рассуждение показывает, что интеграл формы площади по контуру — относительному циклу зависит только от класса относительных гомотопий этого контура, поэтому можно говорить об интегрировании этой формы по таким классам. Итак, этот интеграл задает функцию на только что определенной группе $H_2(\mathbb{C}^2, \mathcal{A} \cup X_c)$. Эта функция линейна: интеграл по сумме контуров равен сумме интегралов по слагаемым.

4.5. Ветвление отсекаемой площади рядом с критическим значением

Итак, отсекаемая площадь определяется контуром — относительным циклом, по которому мы интегрируем форму площади $dx \wedge dy$. Теперь понятно, как мы можем выходить в комплексную область: нужно двигать контур. А именно, если у нас есть контур с границей в $\mathcal{A} \cup X_c$ и мы немного пошевелили s , перейдя к какому-то близкому (но уже, может быть, не вещественному) значению s' , то можно взять близкий относительный цикл, получающийся из исходного

непрерывной деформацией. Действительно, если для начального значения $c = c_0$ поверхности $\mathcal{A}$ и X_c находились в общем положении (т. е. не касались в своих общих точках и прямая X_c не являлась асимптотой множества $\mathcal{A}$), то для c , достаточно близких к c_0 , геометрия картинки, состоящей из пространства $\mathbb{C}^2$ и его подмножества $\mathcal{A} \cup X_c$, остается прежней, если не думать о том, какие точки лежат в $\mathbb{R}^2$, а какие нет. В частности, между всеми группами $H_2(\mathbb{C}^2, \mathcal{A} \cup X_c)$, соответствующими таким близким c , имеются естественные взаимно однозначные соответствия: все эти группы *изоморфны* между собой.

А дальше мы можем пошевелить параметр c еще больше, двигая его вдоль какого-то пути в $\mathbb{C}$, начинающегося в точке c_0 , но так, чтобы $\mathcal{A}$ и X_c оставались в общем положении. Это в точности аналогично условию из п. 4.2, согласно которому мы должны были обходить «плохие» точки. И каждый раз для нового значения c из этого пути мы будем получать новый контур интегрирования, т. е. новый относительный цикл, вся граница которого лежит в объединении новой прямой X_c (вообще говоря, комплексной) и кривой $\mathcal{A}$, которая тоже воспринимается как комплексная кривая, лежащая в комплексном пространстве. Эти контуры интегрирования получаются друг из друга непрерывной деформацией, по мере того как c изменяется вдоль нашего пути. По каждому из них можно интегрировать форму площади $dx \wedge dy$; значения этого интеграла определяют функцию от точки c нашего пути.

Замечание 1. Вообще говоря, если говорить именно о контурах интегрирования, то выбор контура с границей в $\mathcal{A} \cup X_c$, в который сместится исходный контур при движении c_0 в c , неоднозначен: мы можем варьировать это смещение во внутренней части этого контура и даже двигать его границу по $\mathcal{A} \cup X_c$. Но от этой вариации значение площади зависеть не будет: все получающиеся так контуры для одной и той же точки c нашего пути *гомологичны* между собой, т. е. отличаются на добавление границы трехмерного контура. А, как мы уже обсудили выше, интеграл при этом не меняется (как и соответствующий контуру элемент группы $H_2(\mathbb{C}^2, \mathcal{A} \cup X_c)$).

Будем так двигать точку c вдоль произвольных путей, соединяющих c_0 со всеми точками некоторой ее окрестности в множестве «неплохих» точек в $\mathbb{C}$, и получим функцию на этой окрестности — значение интегралов формы площади по получающимся контурам.

Эта функция, как не очень сложно проверить, будет *аналитической*, т. е. в некоторой окрестности любой точки c' раскладывается в степенной ряд:

$$V(c) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_j (c - c')^j, \quad a_j \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Кроме того, мы знаем, что эта функция в ограничении на интервал (m, M) вещественной прямой совпадает с исходной функцией объема, которая также является аналитической функцией (вещественного аргумента). А если две аналитические функции от одной комплексной переменной совпадают на отрезке, то они совпадают везде.

Замечание 2 (о многозначных аналитических функциях). Получающаяся у нас функция, вообще говоря, многозначна: она зависит не только от «неплохой» точки $c \in \mathbb{C}^1$, но и от пути в множестве таких точек, над которым мы продолжали наш контур, начиная с точки c_0 . Нетрудно понять, что если два таких пути *гомотопны*, т. е. непрерывно соединяются однопараметрическим семейством путей, соединяющих c_0 и c в множестве «неплохих» точек, то задаваемые ими функции в точке c будут одинаковыми. Таким образом, возникающая функция фактически определена (как честная однозначная функция) на множестве пар, состоящих из точки c и класса гомотопных путей, идущих из c_0 в c . Для каждой же «неплохой» точки c она может иметь много разных значений, зависящих от таких классов путей, так что ее можно рассматривать как многозначную функцию на множестве таких точек c .

Аналогичную *многозначную аналитическую функцию* можно построить исходя из любого ряда вида (4), сходящегося в некоторой окрестности точки c' , продолжая ее над всевозможными допустимыми путями в $\mathbb{C}$, выходящими из точки c' (хотя в наиболее общем случае препятствия к допустимости таких путей, т. е. к возможности продолжения над ними, могут не исчерпываться запретом заходить в какой-то конечный набор точек, как в нашем случае).

Например, любая неприводимая алгебраическая функция задает (вообще говоря, многозначную) аналитическую функцию. С другой стороны, естественные продолжения в комплексную область таких функций, как логарифм, арксинус и арккосинус, являются многозначными аналитическими функциями, которые не сводятся

к алгебраическим, поскольку принимают в одной и той же точке бесконечно много разных значений. Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что многозначная аналитическая функция, являющаяся продолжением в комплексную область функции объема (т. е. заданная интегралами формы объема по всевозможным контурам, полученным из исходного плоского сегмента при продолжении над *разными* путями в $\mathbb{C}$), также обязательно будет иметь бесконечно много значений.

Теперь посмотрим, что именно будет происходить с контуром и с интегралом, когда точка c обойдет вокруг точки ветвления.

Для начала обойдем в $\mathbb{C}^1$ вокруг минимума m (см. рис. 16). Заметим, что относительный двумерный цикл в $\mathbb{C}^2$, рассматриваемый с точностью до гомологичности, характеризуется своей границей. Действительно, разниця двух контуров с одинаковой границей — это двумерный цикл в $\mathbb{C}^2$ вообще без границы. Любой такой цикл является границей трехмерного контура, заметаемого им при его гомотетическом стягивании в точку.

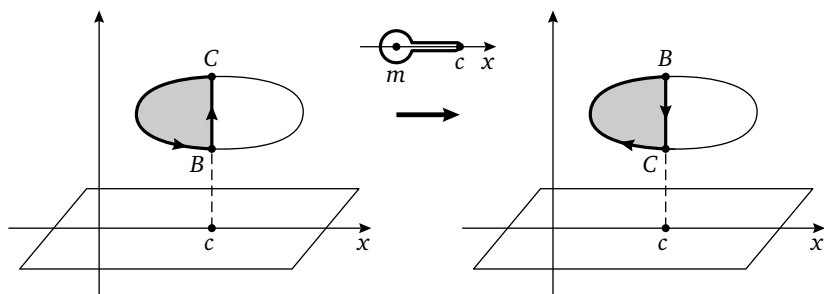


Рис. 16. Исчезающий цикл и его монодромия

Мы знаем, что вблизи критической точки проекция нашей кривой $\mathcal{A}$ на координатную ось x (равную $\mathbb{C}^1$) морсовская, т. е. топологически устроена точно так, как у функции квадратного корня. Когда c обошла вокруг критического значения, прямая X_c вернулась на место, т. е. кусок границы вернулся на место, но точки B и C поменялись местами (потому что так происходит в случае радикала; см. рис. 12).

А значит, каждая из частей границы, как «вертикальная» (лежащая в X_c), так и дуга, лежащая в $\mathcal{A}$, перешла в себя с изменением

ориентации: см. рис. 16. То есть вся граница контура K_c перешла в себя с обратной ориентацией. А значит, и сам контур K_c перешел в минус себя (естественно, с точностью до деформации).

На самом деле, вблизи критической точки существует очень немного разных (с точностью до гомологичности) относительных циклов. А именно, если мы зафиксируем малую шаровую окрестность B морсовской критической точки, то для любого c , достаточно близкого к критическому значению (но не равного ему), группа $H_2(B, \mathcal{A} \cup X_c)$ относительных циклов, заключенных в B и рассматриваемых с точностью до гомологичности, одномерна. Это означает, что существует один базисный относительный цикл, заключенный внутри B , такой, что все остальные такие циклы получаются из него умножением на константу (и гомологией).

Такой цикл называют *исчезающим*, потому что при подходе c к критическому значению он «исчезает», схлопывается в точку. И мы только что проверили, что при обходе вокруг критического значения соответствующий исчезающий цикл переходит в минус себя. Значит, и интеграл по нему умножится на -1 .

Как мы увидим далее, и для аналогичной задачи в $\mathbb{C}^n$ соответствующая группа $H_n(B, \mathcal{A} \cup X_c)$ относительных циклов, содержащихся в малой окрестности морсовской критической точки, тоже одномерна. Однако при обходе параметра c вокруг критического значения соответствующий базисный цикл ведет себя по-разному в зависимости от четности n .

4.6. Завершение доказательства в плоском выпуклом случае

Теперь мы знаем достаточно, чтобы доказать теорему Ньютона. Пусть $V(c)$ — площадь, отсекаемая от внутренности овала прямой $X_c \equiv \{(x, y) : x = c\}$, $c \in (m, M)$, и лежащая слева от нее (в области, где $x < c$). Начнем двигать параметр c этой прямой в сторону максимума M . Когда мы дойдем почти до самого M , так что $c = M - \varepsilon$, значение функции площади станет почти равно площади V_0 всей нашей области. Если мы в этот момент пойдем обратно, то это значение, конечно, начнет уменьшаться.

Мы вместо этого обойдем вокруг критической точки максимума в $\mathbb{C}^1$ и только после этого пойдем к минимуму. Нашу площадь $V(M - \varepsilon)$ можно представить как полную площадь V_0 минус «недо-

статок» — площадь луночки, отсекаемой прямой $X_{M-\varepsilon}$ от нашей области вблизи точки максимума. Но луночка — это тоже исчезающий цикл, который соответствует критическому значению M (см. рис. 17, слева). А значит, при обходе вокруг M он поменяет знак. Относительный же цикл, состоящий из всего овала, не зависит от c и перейдет при этом обходе сам в себя. Легко видеть, что отображение классов гомологий, задаваемое переносом над путями, линейно (это значит, что сумма двух циклов переходит в сумму того, во что переходят слагаемые). Поэтому класс относительного цикла «овал минус луночка» перейдет в класс цикла «овал плюс луночка».

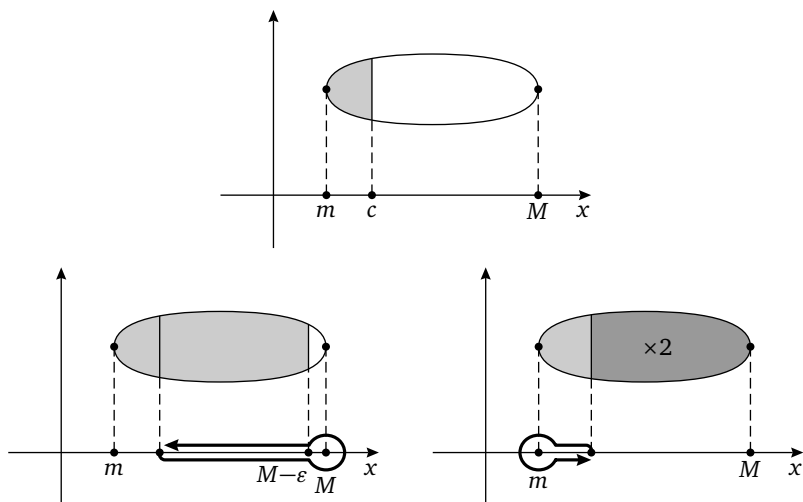


Рис. 17. Отсекаемая прямой $x = c$ площадь $V(c)$ (сверху) и ее продолжение: обход вокруг критических значений M (слева) и m (справа).

Иными словами, недостаток, которого не хватало до полной площади, превратится в избыток. Если после этого c пойдет к m , то функция площади (продолженная вдоль нашего пути) будет расти ровно на столько же, на сколько она убывала бы, если бы мы не обходили критическую точку M , а сразу пошли обратно.

Когда мы подойдем к минимуму m , у нас получится почти дважды площадь овала. Мы опять обойдем критическое значение и получим две полных площади плюс избыток от луночки (на этот

раз — у m). Итак, обход вокруг m заменяет нашу функцию $V(c)$ на $-V(c)$, а обход вокруг M — на $2V_0 - V(c)$. Поэтому, обойдя сначала вокруг M , а потом вокруг m , мы переходим от функции $V(c)$ к $V(c) + 2V_0$. А тогда, повторив такой парный обход N раз, мы получим $V(c) + 2NV_0$. Значит, в одной и той же точке c наша аналитическая функция — продолжение функции площади — принимает бесконечно много разных значений, а это противоречит гипотезе о ее алгебраичности.

Теорема Ньютона доказана.

4.7. Обобщение на случай $\mathbb{R}^n$

Предыдущее рассуждение почти не использовало двумерность нашей фигуры. Единственное, где мы ею пользовались, — когда обходили критическое значение и выясняли, что исчезающий цикл переходит в минус себя. А что будет в других размерностях?

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ есть выпуклое тело с алгебраической границей. Мы выбираем какую-то координату общего положения x и рассматриваем семейство гиперплоскостей, заданных условием $x = c$ (семейство вертикальных гиперплоскостей). Остальные, дополнительные к x , координаты обозначим через $y_1, \dots, y_{n-1}$. У проекции тела на ось Ox есть минимальное и максимальное значения, m и M соответственно.

По условию алгебраичности, граница тела задана условием

$$F(x, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0,$$

где F — какой-то многочлен. Рассматриваем этот многочлен как комплексный и обозначаем через $\mathcal{A}$ множество его нулей в $\mathbb{C}^n$; это комплексная гиперповерхность, т. е. множество комплексной размерности $n - 1$.

Пусть число c чуть больше минимального значения m координаты x на границе тела. Рассмотрим соответствующую гиперплоскость $X_c = \{x = c\}$ и сегмент, который она отсекает от нашего тела. Как и раньше, о нем можно думать как об относительном цикле в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$ с границей в $\mathcal{A} \cup X_c$, а его объем есть интеграл по нему от формы объема $dx \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}$. Это означает, что мы можем нарезать контур на параллелепипеды и просуммировать их «ориентированные объемы».

Теперь рассмотрим прямую значений s как комплексную и в ней заставим s обойти вокруг минимума t . Пока оно будет «обходить», для каждого s будем рассматривать контур уже в $\mathbb{C}^n$, который получается из исходного контура непрерывной деформацией (так, чтобы он все время был относительным циклом, граница которого лежит в $\mathcal{A} \cup X_c$). Во что он превратится после обхода?

Это понять довольно просто, если рассмотреть все в *стандартных морсовских координатах*. А именно: если мы рассмотрим координату x как функцию на границе нашего тела, то в точке, проектирующейся в t , у нее локальный (и даже глобальный) минимум. Сдвинем в эту точку начало отсчета (в частности, на время положим $t = 0$). Простейшая гиперповерхность, на которой координата x имеет в начале отсчета локальный минимум, — это параболоид

$$x = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2. \quad (5)$$

Конечно же, параболоид неограничен и потому не может быть границей нашей области. Но мы на это временно закроем глаза и разберемся с тем, что происходит, на этом модельном примере — а потом выясним, почему мы и в общем случае получаем правильный ответ.

Итак: возьмем малое $\varepsilon > 0$, параболоид

$$\mathcal{A} = \{(x, y_1, \dots, y_{n-1}) : x = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2\}$$

и отсекаемый плоскостью $X_\varepsilon = \{x = \varepsilon\}$ контур — луночку

$$\begin{cases} x \leq \varepsilon, \\ y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 \leq x. \end{cases} \quad (6)$$

Теперь мы начинаем менять уравнение плоскости, двигая точку s по окружности радиуса ε в $\mathbb{C}^1$: мы берем $c_\varphi = \varepsilon e^{i\varphi}$ и рассматриваем соответствующие плоскости X_φ , заданные условием $x = c_\varphi$. Нам нужно понять, как будет деформироваться наш контур. Оказывается, что контуры, которые будут опираться на $\mathcal{A} \cup X_\varphi$, можно получить из исходного контура простым семейством преобразований.

А именно, при каждом φ сопоставим каждой точке $(x, y_1, \dots, y_{n-1})$ исходного контура точку

$$(x \cdot e^{i\varphi}, y_1 \cdot e^{i\varphi/2}, \dots, y_{n-1} \cdot e^{i\varphi/2}). \quad (7)$$

Иными словами, координата x поворачивается в соответствующей координатной оси на угол φ , а все остальные координаты — на угол $\varphi/2$. Легко понять, что такое преобразование сохраняет уравнение поверхности $\mathcal{A}$ и переводит исходную плоскость $X_\varepsilon = X_{c_0}$ в плоскость X_{c_φ} , и потому весь контур интегрирования (6) будет переходить в контур, который опирается уже не на $\mathcal{A} \cup X_{c_0}$, а на $\mathcal{A} \cup X_{c_\varphi}$. Поэтому полученное семейство контуров, зависящих от φ , действительно является искомой непрерывной деформацией. А в результате полного оборота (когда φ достигнет 2π) к исходному контуру применится преобразование

$$(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \mapsto (x \cdot e^{2i\pi}, y_1 \cdot e^{i\pi}, \dots, y_{n-1} \cdot e^{i\pi}) = (x, -y_1, \dots, -y_{n-1}).$$

Итак, в результате нашего непрерывного движения контур перешел в себя под действием следующего преобразования: его сечение каждой гиперплоскостью $x = \text{const}$ переходит в себя, но внутри этого сечения отображение устроено как центральная симметрия относительно горизонтальной оси Ox . Как это преобразование действует на ориентацию контура?

Несложно понять, что ориентация сохраняется, если $n - 1$ чётно, и меняется, если нечётно. Например, разобранный выше случай двумерный, т. е. в ней $n - 1 = 1$, и ориентация меняется. А если $n = 3$, то в сечении $x = \text{const}$ будет двумерный диск; его центральная симметрия — это все равно что поворот на π , который, конечно, сохраняет ориентацию диска. При произвольном n эту центральную симметрию можно задать как композицию $n - 1$ обычных симметрий, изменяющих знаки каждая у своей координаты, так что в результате ориентация меняется $n - 1$ раз.

Поэтому при нечётном n исчезающий цикл переходит сам в себя, а при чётном переходит в минус себя. Соответственно, функция объёма при аналитическом продолжении вокруг точки минимума ведёт себя следующим образом. При нечётном n она не изменяется, при чётном n она переходит в интеграл по противоположному циклу, т. е. в минус себя. Именно поэтому, кстати, наше рассуждение не мешает этой функции быть алгебраической в трёхмерном случае, — а ведь она там для эллипсоида и впрямь алгебраическая, как нам объяснил Архимед.

Итак, при любом чётном n исчезающий цикл при обходе с во-круг соответствующего критического значения умножается на -1 .

Поэтому мы можем дословно повторить рассуждения для двумерного выпуклого случая из п. 4.6: протащить значение s почти до максимума M , увидеть, что значение функции есть полный объем V_0 минус объем лунки, обойти M , получить полный объем плюс объем лунки, пройти обратно почти до m , получить $2V_0$ минус объем лунки, обойти m и так далее.

Осталось понять, почему наше рассуждение, проведенное для модельного случая параболоида, правильно говорит нам, что будет с исчезающим циклом при обходе критического значения. Для этого есть замечательная *лемма Морса* (см., например, [15], [20]), утверждающая, что для невырожденной точки минимума функции от $n - 1$ переменных локально, в небольшой окрестности нашей точки, можно выбрать такие новые аналитические координаты $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}$, в которых наша поверхность $\mathcal{A}$ и впрямь будет задаваться уравнением

$$x - m = \tilde{y}_1^2 + \dots + \tilde{y}_{n-1}^2. \quad (8)$$

«Невырожденность» здесь означает, что вблизи нашей точки в первом приближении эта функция является положительно определенной квадратичной функцией. Выполнения этого условия вблизи точки минимума (и аналогичного условия вблизи точки максимума) можно добиться выбором «типичной» координаты x , что мы и сделали в самом начале этого пункта.

Поэтому мы можем применять преобразование (7) в этих координатах (при достаточно малом ε , чтобы исчезающий цикл полностью помещался в ту окрестность, где они у нас есть). А вывод — что контур перешел в себя или в минус себя — от системы координат не зависит. Следовательно, вышеприведенные рассуждения завершают доказательство теоремы 2.

§ 5. Общий (невыпуклый) случай на плоскости

Итак, в случае выпуклых тел мы можем в условии теоремы Ньютона заменить двумерность на четномерность. Теперь покажем, как, наоборот, сохраняя двумерность, избавиться от условия выпуклости.

Рассмотрим ограниченную фигуру в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей и будем считать, что ограничение координаты x на эту границу является морсовской функцией, но число критических точек у этой функции уже может быть больше двух.

Можно ли теперь доказать, что функция объема по-прежнему не будет алгебраической? Да, можно, при помощи примерно такого же рассуждения, но нам придется рассмотреть больше обходов и больше критических точек. Сначала разберем один конкретный пример: возьмем контур, изображенный на рис. 18. Спроецируем его на ось Ox и отметим все критические значения на нашей прямой.

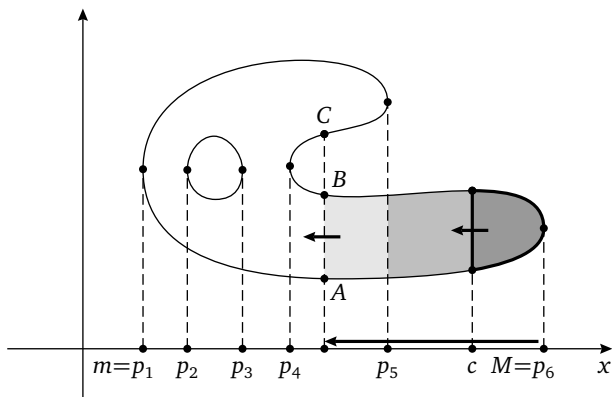


Рис. 18. Деформация контура для невыпуклой области

Начнем с луночки у максимального критического значения $M=p_6$ и будем двигаться влево. Когда мы в первый раз пересекли критическое значение p_5 , нас это не испугало, контур даже не «почувствовал», что где-то есть критическая точка с таким значением.

Продолжаем двигаться. Когда мы почти дойдем до второго критического значения p_4 , необходимо выйти в комплексную область, обойти вокруг этого критического значения и пойти обратно. Что при этом произойдет с контуром интегрирования?

Достаточно посмотреть, что произойдет с точками пересечения нашей кривой и прямой, соответствующей некритическому значению. С точкой A ничего не произойдет, потому что там нет никакой особенности, а вот точка B перейдет в C . Поэтому легко угадать, что наш контур, который опирался на отрезок AB , перейдет в контур, который опирается на отрезок AC . То есть это будет контур, который был до обхода, но к нему еще нужно прибавить луночку точки p_4 с обратной ориентацией (см. рис. 19).

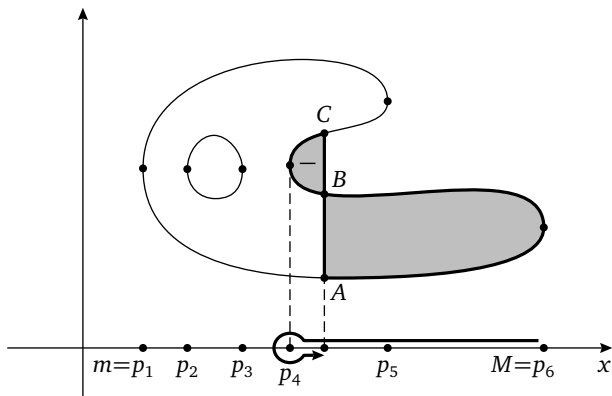


Рис. 19. После первого обхода

После этого нужно пойти назад. Тогда площадь нижней части с правильной ориентацией начнет убывать, а площадь луночки с обратной ориентацией — расти. Отметим, однако, что последняя луночка участвует в нашем контуре с обращенной ориентацией, поэтому при вычислении продолжаемой функции объема ее растущую площадь надо будет вычитать, а не прибавлять к площади нижней области. В частности, производная этой функции по s будет равна минус длине всего граничного отрезка, аналогичного AC .

Подойдем к критическому значению p_5 и обойдем вокруг него в комплексной области. Тогда точка C перейдет в точку L (см. рис. 20),

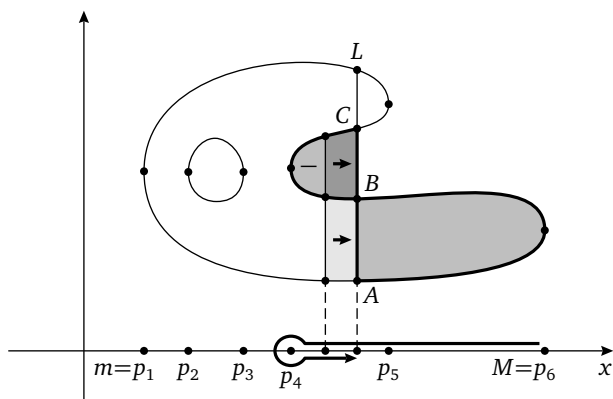


Рис. 20. Второй обход

и контур, который опирается на AC , перейдет в контур, который опирается на AL . Иными словами, ко всему, что было, у нас добавится еще одна луночка, соответствующая точке p_5 , — но уже с правильной ориентацией (см. рис. 21).

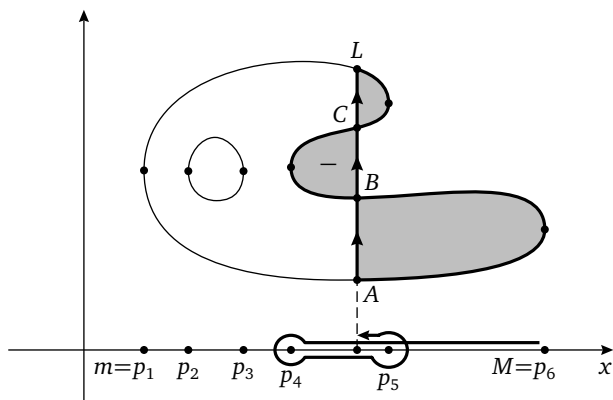


Рис. 21. После второго обхода

Теперь пойдем влево. Граница нашего контура состоит из отрезка AL вертикальной прямой и кривой LA на границе «овала». Когда мы дойдем до «среднего» критического значения p_4 , то ни отрезок, ни дуга этого просто не почувствуют: наша граница с этой кри-

тической точкой никак не связана. Поэтому мы сможем спокойно пройти сквозь нее (см. рис. 22).

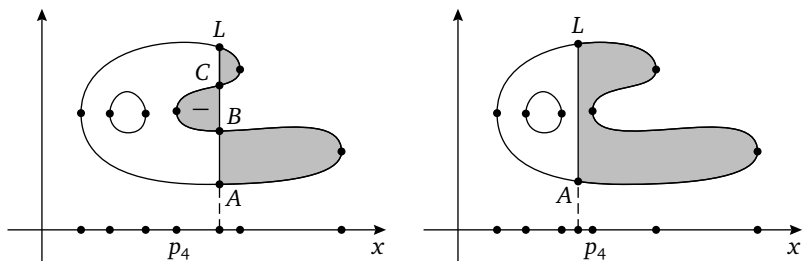


Рис. 22. Продолжение за p_4

Следующие две особые точки, p_2 и p_3 , нас никак не волнуют по тем же причинам — контур с ними никак не связан и мы спокойно сквозь них проходим, «не замечая».

А дальше как обычно: почти доходим до самой левой точки p_1 , обходим вокруг нее, получаем полную площадь области V_0 плюс площадь соответствующей луночки и идем вправо. Итак, пройдя по пути, изображенному на рис. 23, мы из луночки самой правой точки $M = p_6$ получили полную площадь плюс площадь луночки самой левой точки $m = p_1$.

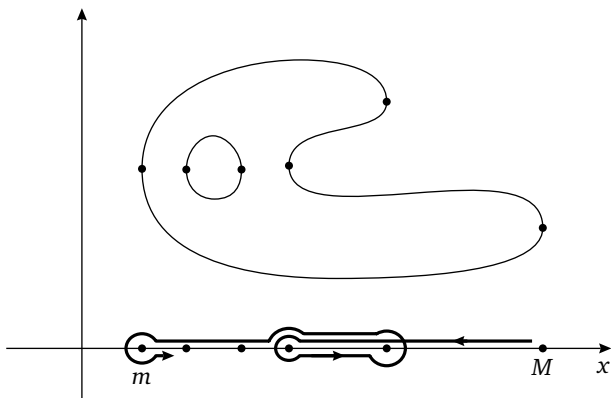


Рис. 23. Полная траектория обхода

Мы уже получили в наш актив всю площадь V_0 (ограниченную внешней границей, без вырезания дырок). Эта площадь вообще не зависит от вертикальных прямых. Единственный кусочек, который зависит от прямой X_c , — это луночка. Мы так же, как и раньше, ведем ее вправо, доводим до критической точки и повторяем все то же самое, но в обратном порядке. Когда мы дойдем до самой правой точки, у нас получится вся площадь плюс почти вся площадь, в которой недостает лишь площади луночки, связанной с точкой p_6 . Обойдя эту точку, мы получим $2V_0$ плюс площадь последней луночки (с которой мы когда-то и начинали).

Повторяя вышеописанный обход снова и снова, мы сможем добавить к этой луночке еще $2V_0$ и сделать это сколько угодно раз, что опять-таки противоречит гипотезе об алгебраичности функции объема.

Теперь проделаем такое же рассуждение в общем случае. Пусть у нас есть связная область на плоскости с алгебраической границей; выберем линейную систему координат на плоскости так, чтобы все критические точки координаты x как функции на границе были невырожденными и чтобы соответствующие критические значения не совпадали (т. е. чтобы не было вертикальных бикасательных).

Возьмем лунку наибольшего критического значения M , ограниченную в $\mathbb{R}^2$ границей $\mathcal{A}$ и прямой X_c , где $c = M - \varepsilon$. Попытаемся продеформировать ее, двигая c до минимального критического значения m , так чтобы получить почти всю площадь V_0 (ограниченную внешней границей нашей области) за вычетом лунки при точке минимума. Если у нас это получится, то, обойдя вокруг m , мы получим V_0 плюс площадь лунки при m ; пройдя по тому же пути назад, мы получим $2V_0$ за вычетом лунки при M , а обойдя вокруг M — константу $2V_0$ плюс площадь этой же лунки. После чего, как и раньше, повторяя эти проходы снова и снова, мы сможем набрать сколь угодно большую площадь и получить противоречие с предположением об алгебраичности.

Почему мы всегда сможем так сделать? Рассмотрим внешнюю границу нашей области. Топологически это — окружность S^1 , и можно рассматривать x -координату точки как функцию на ней. Точки окружности, где x принимает наименьшее и наибольшее значение, разбивают ее на две дуги; пусть I_+ — такая дуга, лежащая над областью, а I_- — под областью. Рассмотрим множество пар точек с

одинаковой x -координатой, из которых первая лежит на I_- , а вторая — на I_+ :

$$T := \{(s, t) \in I_- \times I_+ : x(s) = x(t)\}.$$

Это подмножество прямоугольника $I_- \times I_+$ является гладкой кривой. Действительно, раз все критические значения функции x на граничной кривой $I_- \cup I_+$ разные, то у любой точки $(s, t) \in T$, отличной от двух концевых (которым соответствуют минимум m и максимум M), хотя бы одна из двух точек s и t не критическая — а тогда можно взять параметр кривой S^1 вблизи другой точки в качестве локальной координаты искомой кривой.

Эта гладкая кривая компактна, а следовательно, топологически эквивалентна набору окружностей и отрезков. В рассмотренных выше примерах вся кривая сводилась к одному отрезку; на рис. 24 показан пример, когда дополнительно возникает одна окружность. Поскольку концов у этой кривой всегда только два (они соответствуют максимуму и минимуму), то отрезок в ней только один. Теперь мы просто идем по нему: как несложно видеть, продолжая лунку из максимума M , мы всегда будем получать контур, опирающийся на вертикальный отрезок от одной из точек нашей пары до другой.

Когда какая-то из точек нашей пары доходит до критического значения, мы выходим в комплексную область, обходим там это значение и идем обратно, продолжая движение по единственному отрезку множества T . А если мы вышли из одного конца отрезка, то уж точно придем ко второму, получив почти всю ограниченную внешней границей область за вычетом лунки у этого конца.

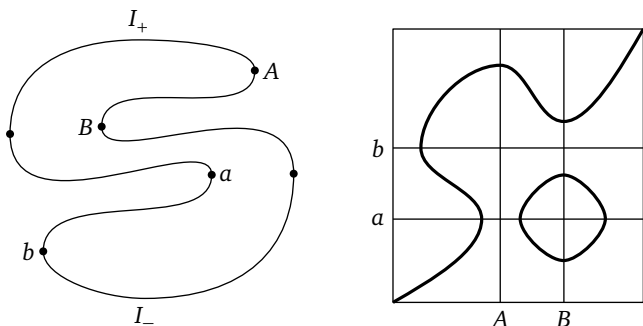


Рис. 24. Кривая отношений

§ 6. Общий случай в $\mathbb{R}^{2k}$

В случае общих (не обязательно выпуклых) областей в $\mathbb{R}^{2k}$ нет общего способа явно предъявить путь в пространстве плоскостей X_c , по которому надо двигаться, чтобы нарастить бесконечно много значений функции объема. Поэтому доказательство следующего основного результата менее конструктивно.

Теорема 3 [13]. *В четномерном пространстве не бывает алгебраически интегрируемых ограниченных областей с бесконечно дифференцируемой границей.*

Замечание 3. Достаточно доказывать эту теорему только для областей, граница которых не только бесконечно дифференцируема, но и полуалгебраична, т. е. является компонентой многообразия, заданного каким-то полиномиальным уравнением $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}^{2k}$. Действительно, рассуждение из п. 3.3 непосредственно переносится на многомерный случай и доказывает, что если область с бесконечно гладкой границей алгебраически интегрируема, то эта ее граница автоматически полуалгебраична. При доказательстве теоремы мы будем использовать это предположение.

Для доказательства теоремы нам потребуются вспомогательные сведения о группах, порожденных отражениями. Примеры таких групп мы уже видели в п. 4.6. А именно, преобразования монодромии при обходе вокруг критических точек превращали функцию $V(c)$ в $-V(c)$ и в $2V_0 - V(c)$ — т. е. эти преобразования действовали как отражения (симметрии) относительно точек 0 и V_0 на прямой. Доказательство теоремы получалось из того, что группа преобразований прямой, порожденная этими двумя отражениями, бесконечна. Аналогичная (но более сложная) группа преобразований связана с любой областью с гладкой границей в $\mathbb{R}^{2k}$ (в частности, порождающие ее симметрии соответствуют всем критическим точкам ограничения координаты x на границу области), и мы докажем, что эта группа всегда бесконечна.

6.1. Группы, порожденные отражениями

Начнем не с общего определения, а с простейшего примера.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ есть две прямые. Рассмотрим отражения плоскости относительно каждой из них. Это — два отображения плоскости в себя. Какое множество преобразований мы получим, если будем применять их в любом порядке и в любом количестве? Говоря более высоким языком — какую группу они порождают?

Если взять композицию этих отражений, то получится какое-то третье преобразование. Можно взять его композицию с любым из отражений, и так далее. Заметим, кстати, что получается действительно группа. (Вообще говоря, для группы, порожденной произвольными преобразованиями, нужно оговаривать еще существование обратных отображений, но здесь это не нужно: каждое отражение обратно само себе.)

Пример 1. Пусть исходные прямые перпендикулярны. Тогда композиция соответствующих им двух отражений, взятых в любом порядке, — это центральная симметрия. Больше ничего в нашей группе не будет: композиция симметрии с одним из отражений — это другое отражение. Поэтому получается группа *порядка 4*, т. е. состоящая из 4 элементов: тождественное отображение, две симметрии относительно прямых и центральная симметрия (см. рис. 25).

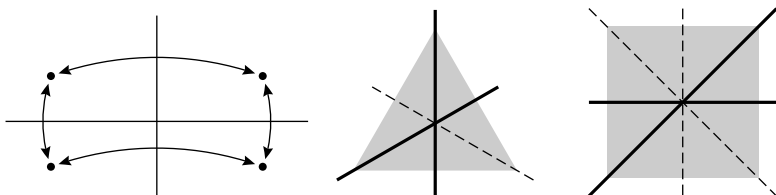


Рис. 25. Примеры группы симметрий

А что будет при других углах между прямыми? Первое отображение, которое мы увидим при построении группы, — это их композиция. Несложное упражнение по геометрии говорит, чем она будет:

Задача 3. Композиция двух симметрий относительно прямых, угол между которыми равен α , — это поворот на угол 2α вокруг точки пересечения этих прямых.

Следствие 1. Если этот угол α несоизмерим с π , то порождаемая симметриями относительно этих прямых группа бесконечна.

Поэтому если мы хотим получить конечную группу, нам нужно, чтобы угол между прямыми был соизмерим с π .

Пример 2. Пусть угол между исходными прямыми равен $\pi/3$. Тогда соответствующая группа — группа симметрий правильного треугольника, в котором эти прямые содержат две из трех осей; см. рис. 25. Эта группа имеет порядок 6 и совпадает с группой перестановок вершин этого треугольника: любая перестановка реализуется сохраняющим треугольник движением, и притом ровно одним.

Пример 3. Пусть угол между исходными прямыми равен $\pi/4$. Тогда соответствующая группа — группа симметрий квадрата, у которого одна из этих прямых является серединным перпендикуляром к стороне, а другая содержит диагональ (см. рис. 25).

Теперь уже понятно, что будет в общем случае: если угол между прямыми равен $\frac{p}{q}\pi$, где дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то порождаемая соответствующими отражениями группа будет группой симметрий правильного q -угольника. Эта группа состоит из $2q$ элементов, из которых одно тождественное, $q - 1$ поворотов на углы $\frac{2}{q}\pi, \frac{4}{q}\pi, \dots, \frac{2(q-1)}{q}\pi$ (образующих вместе подгруппу порядка q) и q симметрий относительно прямых, идущих последовательно под углом π/q предыдущая к следующей. Эта группа называется *группой диэдра*.

Прежде чем переходить к случаю произвольной размерности, посмотрим еще на пример 1. Введем систему координат с осями, направленными по нашим прямым. В ней наши четыре отображения имеют вид $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$; при этом знаки можно выбирать независимо друг от друга. Поэтому наша группа оказывается *декартовым произведением* групп из двух элементов, действующих каждая на своей координате: $x \mapsto \pm x$ и $y \mapsto \pm y$.

Такая конструкция возможна и в более высоких размерностях: если у нас есть какая-то группа G_1 линейных преобразований $\mathbb{R}^m$ и группа G_2 линейных преобразований $\mathbb{R}^k$, то им можно сопоставить группу $G_1 \times G_2$ линейных преобразований $\mathbb{R}^{m+k} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, где пара (g_1, g_2) действует как

$$(g_1, g_2): (v, w) \mapsto (g_1(v), g_2(w)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^k.$$

Но эта конструкция «неинтересная»: она не добавляет ничего нового по сравнению с тем, что было в действиях групп G_1 и G_2 .

Заметим, что в самой конструкции декартова произведения пространства $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ и $\{0\} \times \mathbb{R}^k$ получались *инвариантными*: их сохраняли все преобразования из полученного произведения $G_1 \times G_2$.

И обратно, если для действия какой-то группы G нашлись два дополнительных инвариантных подпространства, то, взяв их за координатные, мы можем «развалить» это действие в действие G по отдельности на этих пространствах (и G будет подгруппой соответствующего декартова произведения). Более того, если действие всех элементов группы сохраняет расстояния (а мы здесь будем работать только с такими действиями), то достаточно найти одно такое пространство: его ортогональное дополнение автоматически окажется инвариантным. В таких случаях говорят, что группа преобразований *приводима*.

Теперь мы готовы к тому, чтобы дать общее определение и привести еще несколько примеров. А именно, рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^k$ произвольной размерности k , и пусть в нем задано несколько гиперплоскостей, проходящих через начало координат; мы будем называть их *зеркалами*. Каждой из этих гиперплоскостей соответствует отражение относительно нее; это — линейные отображения (для этого мы потребовали, чтобы зеркала проходили через ноль). Теперь рассмотрим порожденную ими *группу отражений* — всевозможные композиции этих отображений. Один из вопросов, который нас будет интересовать, — когда эта группа конечна?

Пример 4. В $\mathbb{R}^{m+1}$ группа перестановок $m + 1$ элемента действует перестановками координат. Оказывается, это — группа отражений. Действительно, как мы знаем, любая перестановка разлагается в произведение транспозиций. А все элементарные перестановки координат являются отражениями: перестановка i -й и j -й координат — это отражение относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору $e_i - e_j$, где e_i — i -й базисный вектор.

Эта группа приводима: действительно, вектор $(1, \dots, 1)$ всегда остается на месте — а значит, остается на месте и проходящая через него прямая. Причем она не просто инвариантна как множество — остаются неподвижными по отдельности все ее точки; как говорят, действие на ней *тривиально*.

Поэтому естественно ограничить это действие на ортогональное дополнение к этому вектору, на n -мерную гиперплоскость

$$\{(x_1, \dots, x_{m+1}) : x_1 + \dots + x_{m+1} = 0\}.$$

Выбрав на ней координаты, ее можно отождествить с $\mathbb{R}^m$ и тем самым получить в $\mathbb{R}^m$ некоторую группу отражений.

Задача 4. Проверьте, что ограничение группы отражений на инвариантное подпространство тоже является группой отражений.

Мы получили замечательную группу; например, при $m + 1 = 3$ это в точности группа из примера 2. Более того, она допускает красивое описание и в любой размерности:

Задача 5. Заданная выше группа является группой симметрий правильного симплекса («гипер-тетраэдра») в $\mathbb{R}^m$.

Указание. В качестве вершин симплекса можно взять проекции концов базисных векторов e_i , $i = 1, \dots, m + 1$, пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ на инвариантную гиперплоскость.

Полученная группа называется группой *типа* A_m . Тут есть небольшой терминологический конфликт: обозначение A_m используется еще и для (абстрактной) группы четных перестановок m элементов, но эти два объекта — разные (увы, букв в латинском алфавите слишком мало!).

Обозначение A_m восходит к классификации всех конечных групп отражений: их оказывается несколько серий (A_m , B_m , D_m , $I_2(k)$) и несколько исключительных групп (E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , H_3 и H_4). Мы не будем здесь рассказывать детали этой классификации; упомянем только одно ее применение: классификацию правильных многогранников в любой размерности. Имеет место следующий факт:

Предложение 1. *Группа симметрий правильного многогранника — всегда группа отражений.*

Соединяя его с классификацией конечных групп отражений, можно получить классификацию всех правильных многогранников в любой размерности. Мы не будем приводить ее здесь, отсылая заинтересованного читателя к брошюре [24]; упомянем только, что в размерности 4, кроме обычных для любой размерности симплекса и двойственных друг другу гиперкуба и гипероктаэдра, есть еще три(!) красивых правильных многогранника.

6.2. Группы Вейля

Чтобы задать группу отражений, нужно задать ее зеркала. А как удобно задавать гиперплоскость? Проще всего — каким-нибудь ортогональным ей вектором e (не обязательно единичной длины); тогда плоскость задается как

$$\{v \in \mathbb{R}^m : \langle v, e \rangle = 0\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Как будет устроено соответствующее отражение?

Задача 6. Пусть в $\mathbb{R}^m$ задан вектор e . Найдите образ вектора $v \in \mathbb{R}^m$ при отражении относительно перпендикулярной вектору e гиперплоскости.

Ответ.
$$v - 2 \frac{\langle v, e \rangle}{\langle e, e \rangle} e. \quad (9)$$

Действительно, преобразование, заданное формулой (9), оставляет зеркало на месте, а вектор e под его действием переходит в минус себя.

У ответа (9) есть одна важная черта: он не требует, чтобы «скалярное произведение» было положительно определено. В качестве $\langle \cdot, \cdot \rangle$ может выступать и любая другая билинейная симметричная форма (т. е. функция от пар элементов, линейная по каждому из двух аргументов и не изменяющаяся при их перестановке), лишь бы $\langle e, e \rangle$ не равнялось нулю.

Можно рассмотреть даже *вырожденную* билинейную форму. В этом случае в формуле (9) важен сам вектор e , а не только ортогональное к нему «зеркало»: если форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ вырождена, то два разных вектора могут определять одну и ту же ортогональную плоскость, но соответствующие этим векторам преобразования (9) будут разными.

Задача 7. Рассмотрим билинейную форму $\langle (x, y), (x', y') \rangle_1 = xx'$. Как устроены отражения относительно векторов $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (1, V_0)$? Чему равна их композиция?

Ответ. Эти отражения действуют по правилам $(x, y) \mapsto (-x, y)$ и $(x, y) \mapsto (-x, y - 2V_0x)$. Их композиция переводит (x, y) в $(x, y + 2V_0x)$, в частности, вектор $(1, V)$ в вектор $(1, V + 2V_0)$.

Позже мы увидим, что этот пример не случайно похож на композицию двух симметрий, которую мы разбирали в разделе 4.6.

Среди всех групп, порожденных отражениями, выделяются так называемые *группы Вейля*. По определению, группа Вейля состоит из:

- векторного пространства V ;
- решетки Ξ в V , т. е. множества *целочисленных* линейных комбинаций $\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_m g_m$ для некоторого базиса $g_1, \dots, g_m$ пространства V ;

- билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на V ;
- конечного набора векторов $e_1, \dots, e_k \in \Xi$ с $\langle e_i, e_i \rangle \neq 0$, такого, что порождаемая ими группа отражений, действующих по формуле (9), конечна, любое отражение сохраняет решетку Ξ , и пространство V порождено этими векторами (т. е. состоит из их линейных комбинаций с вещественными коэффициентами).

Выбрав в V координаты, отвечающие базису $g_1, \dots, g_m$, можно отождествить V с $\mathbb{R}^m$, а Ξ с $\mathbb{Z}^m$. Конечно, при таком отождествлении билинейная форма, участвующая в определении отражений, не обязана задаваться обычной формулой скалярного произведения на $\mathbb{R}^m$.

Не любая конечная группа отражений является группой Вейля: должна еще найтись сохраняемая отражениями решетка.

Пример 5. Из групп диэдра группами Вейля являются группы симметрий правильного треугольника, квадрата и шестиугольника; см. рис. 26.

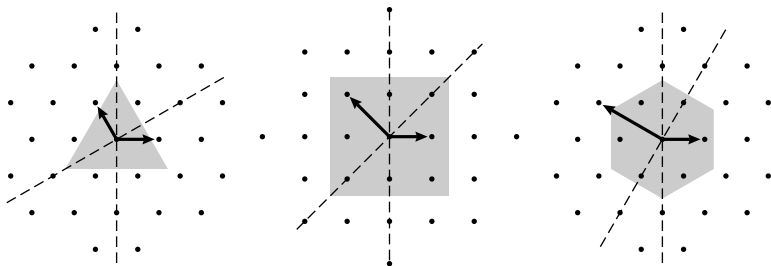


Рис. 26. Примеры групп Вейля: группы симметрий треугольника, квадрата и шестиугольника

Группа типа A_m , напротив, всегда является группой Вейля: достаточно спроецировать решетку $\mathbb{Z}^{m+1}$ на инвариантное m -мерное пространство (и проверить, что образ действительно является решеткой).

Список всех групп Вейля хорошо известен. Непосредственно из этого перечисления вытекает следующее их общее свойство. Пусть группа Вейля неприводима (т. е. пространство V не раскладывается в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств, в каждом из которых действует своя подгруппа группы Вейля, действующая тривиально на остальных подобных подпространствах). Тогда ска-

лярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ знакоопределено: для всех $w \in V \setminus \{0\}$ выполнено либо $\langle w, w \rangle > 0$, либо $\langle w, w \rangle < 0$. В частности, это условие нарушается в группе из задачи 7: указанная там форма вырождена, скалярное произведение вектора $(0, 1)$ с любым вектором равняется нулю.

6.3. Группа монодромии

Поищем теперь все эти вещи в задаче Ньютона. Как и раньше, рассмотрим в $\mathbb{R}^n$, где n четно, какое-то тело с гладкой границей, заданной полиномиальным уравнением. Выбрав линейную систему координат «типичным образом», мы можем добиться, чтобы функция x — первая новая координата, рассматриваемая как функция на границе нашего тела — была *строго морсовской*. Это значит, что все ее критические точки невырождены (т. е. квадратичные части их разложения в ряд Тейлора являются невырожденными квадратичными формами от $n - 1$ переменных), а все соответствующие критические значения $c_1, \dots, c_N$ различны.

Как и раньше, мы будем рассматривать сечения параллельными гиперплоскостями $\{x = c\}$ и приводить к противоречию предположение даже о том, что алгебраична функция $V(c)$ одной переменной c , задающая объем, отсекаемый этими плоскостями. Для начала нам надо научиться описывать, как именно перестраиваются контуры интегрирования при движении секущей гиперплоскости $\{x = c\}$, когда параметр c обходит точки ветвления.

Полиномиальное уравнение, задающее границу тела, имеет смысл в комплексной области и определяет там поверхность $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^n$ комплексной размерности $n - 1$, т. е. вещественной размерности $2n - 2$. Отсекаемой части мы, как и раньше, сопоставим n -мерный контур с границей в $\mathcal{A} \cup X_c$, где

$$X_c = \{(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : x = c\}.$$

Тогда отсекаемый объем равен интегралу по этому контуру от формы объема $dx \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}$.

По-прежнему мы будем рассматривать контур не сам по себе, а лишь как элемент группы относительных гомологий $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$. Два контура в $\mathbb{C}^n$ с одинаковой границей гомологичны — и потому, аналогично двумерному случаю (2), интегралы от формы объема по

ним совпадают. Кроме того, деформация границы контура внутри $\mathcal{A} \cup X_c$ (или вообще ее изменение на гомологичную внутри $\mathcal{A} \cup X_c$) также, аналогично (3), не изменяет значение соответствующего интеграла.

Если двигать значение c по комплексной плоскости так, что оно не заходит в точки ветвления, то можно непрерывно деформировать соответствующие контуры так, чтобы их границы оставались лежать в множествах $\mathcal{A} \cup X_c$. При этом, хотя сама такая деформация не единственна, любые две такие деформации, в свою очередь, можно продеформировать друг в друга. А это означает, что мы получаем один и тот же элемент относительных гомологий $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$.

Строго говоря, здесь есть небольшое осложнение: топология множества $\mathcal{A} \cup X_c$ может меняться не только из-за касаний в вещественных точках (соответствующих критическим значениям $c_1, \dots, c_N$ ограничения координаты x на $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^n$), но и из-за вырождений взаимного расположения $\mathcal{A}$ и X_c в мнимой области. Однако за счет правильного («типичного») выбора координаты x можно добиться, чтобы все дополнительные особые значения параметра c , при которых происходят эти вырождения, также были не вещественными. В дальнейшем мы будем двигать c только в малой окрестности вещественной оси, не охватывая такие значения.

Поэтому для любого пути γ в $\mathbb{C} \setminus \{c_1, \dots, c_N\}$ (лежащего в малой окрестности вещественной оси) определена «деформация контуров при движении сечения $x = c$ вдоль этого пути»; если путь начинается в точке c' , а заканчивается в точке c'' , то мы получаем взаимно однозначное отображение h_γ из группы $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{c'})$ в $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{c''})$.

Далее, если мы непрерывно деформируем уже сам путь γ , не трогая его начало и конец и не заходя в особые точки c_i , то эти деформации контуров при движении c вдоль этих путей также непрерывно деформируются — а значит, результат деформации любого контура, рассматриваемый как класс относительных гомологий, опять же не изменяется. Поэтому не изменяется при такой деформации пути и всё отображение h_γ .

Выберем и зафиксируем неособую точку $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{c_1, \dots, c_N\}$ и будем рассматривать соответствующие петли в множестве комплексных некритических значений c , т.е. пути, начинающиеся и заканчивающиеся в этой точке. Тогда каждой такой петле сопоставляется отображение из $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$ в себя. При этом мы можем рас-

смаатривать петли γ лишь с точностью до непрерывной деформации, оставляющей начало-конец петли на месте и не заходящей в особые точки.

Множество таких классов эквивалентности петель с фиксированным началом-концом называется *фундаментальной группой* того множества, в котором эти петли гуляют (см., например, [15]), и это совершенно замечательное общее понятие, которое тут у нас естественным образом возникло. Это действительно группа — для перемножения двух путей можно сначала пройти один путь, потом другой, а обращение пути выполняется прохождением его от конца к началу.

Итак, фундаментальная группа множества $\mathbb{C}^1$, из которого выкинуты точки ветвления, *действует* на множестве классов относительных гомологий $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$, т. е. любой элемент группы определяет какое-то взаимно однозначное отображение этого множества в себя. Посмотрим, как устроено это действие, т. е. как меняется контур при движении s в комплексной плоскости $\mathbb{C} \setminus \{c_1, \dots, c_N\}$.

Несложно увидеть, что любая петля в плоскости с проколами в точках c_j может быть продеформирована в последовательность элементарных петель такого вида: мы подходим от x_0 к одной из точек c_j по некоторому пути, затем обходим вокруг этой точки по маленькой окружности и возвращаемся обратно по старому пути. Поэтому первые и естественные кандидаты на исследование — это такие обходы: собственно, композицию таких обходов (только не возвращаясь каждый раз к начальной точке) мы применяли и раньше. В следующем разделе мы поймем, что происходит с контуром интегрирования (как с элементом группы $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$) при обходе вдоль такой петли.

6.4. Теория Пикара—Лефшеца

6.4.1. *Постановка задачи.* Пусть мы уже поднесли параметр s плоскости X_c , ограничивающей наш контур интегрирования, совсем близко к одному из критических значений c_j . Ответ на вопрос, что будет с этим контуром при обносе s вокруг этого значения, дается *формулой Пикара—Лефшеца*, которую мы обсудим в этом разделе. Однако сначала мы исследуем чуть другую — но связанную с исходной — задачу.

Как мы уже обсуждали, от всего контура D — рассматриваемого как элемент группы относительных гомологий $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$ — можно оставить только его границу ∂D , рассматриваемую как элемент группы $H_{n-1}(\mathcal{A} \cup X_c)$: отображение, сопоставляющее контуру его границу, задает взаимно однозначное соответствие между этими двумя группами, и действие монодромии на одной из них восстанавливается по действию на другой.

В свою очередь, эту границу можно разделить на две части: $\partial_{\mathcal{A}} D \subset \mathcal{A}$ и $\partial_c D \subset X_c$; эти две части склеиваются друг с другом по общей границе-циклу l :

$$l = p(D) := \partial(\partial_{\mathcal{A}} D) = -\partial(\partial_c D),$$

являющейся $(n - 2)$ -мерным циклом в $\mathcal{A} \cap X_c$. Класс этого цикла

$$[l] \in H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c)$$

также однозначно определяется классом исходного цикла D в $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$ или классом его границы $[\partial D] \in H_{n-1}(\mathcal{A} \cup X_c)$, но уже не определяет их. Например, если два относительных цикла $D, \tilde{D}$ различаются на цикл, кратный классу $[V]$ нашей области (вся граница которой лежит в $\mathcal{A}$), то соответствующие им циклы в $H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c)$ будут равны.

Тем не менее, для вычисления действия монодромии на группе гомологий $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$ полезно сначала выяснить, как обход вокруг критического значения c_j преобразует цикл l . Чтобы представить себе это действие, разберем следующий пример для случая $n = 3$ — пусть даже эта размерность не той четности, которая нас в первую очередь интересует в этой главе.

Замечание 4. Операция, сопоставляющая классу ∂D класс $[l]$, в науке называется дифференциалом точной последовательности Майера—Вьеториса.

6.4.2. Перестройки одномерных циклов на поверхности.

Пример 6. Пусть $n = 3$. Рассмотрим седловую точку ограничения координаты x на $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^3$. Для простоты будем считать, что значение x в этой точке равно 0. В силу леммы Морса, в окрестности этой точки можно задать локальные координаты $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$, в которых поверхность задается уравнением $x = \tilde{y}_1 \tilde{y}_2$. Пусть исходный цикл

$l \in H_1(\mathcal{A} \cap X_c)$ при $c = \varepsilon$ рядом с этой точкой — это одна из двух ветвей вещественной гиперболы $\tilde{y}_1 \tilde{y}_2 = \varepsilon$ (см. рис. 27, слева). Во что он превратится при обходе c вокруг критического значения — нуля?

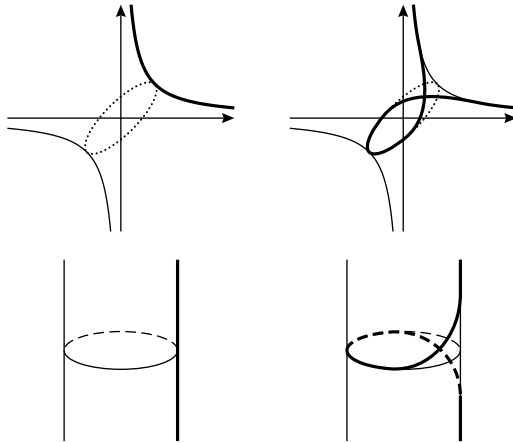


Рис. 27. Перестройка цикла при обходе вокруг критического значения

Пусть этот обход задается как $c = \varepsilon e^{i\varphi}$, где φ пробегает отрезок от 0 до 2π . Попробуем выбрать деформацию цикла l так, чтобы $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ на что-нибудь домножались: для каждого φ мы будем сопоставлять его точке $(\varepsilon, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ какую-нибудь точку вида $(\varepsilon e^{i\varphi}, e^{i\varphi_1} \tilde{y}_1, e^{i\varphi_2} \tilde{y}_2)$, где φ_1 и φ_2 зависят от $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ и $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$. Но при этом мы не хотим сильных шевелений далеко от особой точки — поэтому мы хотим, чтобы φ_1 сходило на нет при больших $\tilde{y}_1$, а φ_2 — при больших $\tilde{y}_2$. Этому будет удовлетворять вот такое сопоставление:

$$T_\varphi : (\varepsilon, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \mapsto (\varepsilon e^{i\varphi}, e^{i\varphi f(|\tilde{y}_2|/|\tilde{y}_1|)} \tilde{y}_1, e^{i\varphi(1-f(|\tilde{y}_2|/|\tilde{y}_1|))} \tilde{y}_2), \quad (10)$$

где $f(r)$ — гладкая функция, тождественно равная 1 при $r > 2$ и тождественно равная 0 при $r < 1/2$.

Как устроены поверхности $\mathcal{A} \cap X_c$, $|c| = \varepsilon$, содержащие все эти циклы? При любом $c \neq 0$ поверхность в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $\tilde{y}_1 \tilde{y}_2 = c$, топологически эквивалентна (гомеоморфна) проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ или, что то же самое, цилиндру $S^1 \times (0, \infty)$: эта эквивалентность задается просто проекцией на ось $\tilde{y}_2$. Правда, нас интересует

только окрестность начала координат, в которой мы можем привести функцию x к виду $\tilde{y}_1 \tilde{y}_2$. Будем считать, что эта окрестность выделена условиями $|\tilde{y}_1| \leq 1, |\tilde{y}_2| \leq 1$ (этого всегда можно добиться растяжением координат). Тогда любая из наших поверхностей при проекции на ось $\tilde{y}_2$ взаимно однозначно отображается на кольцо, ограниченное окружностями радиуса 1 и ε , а начальное положение цикла l в этой области переходит в отрезок $[\varepsilon, 1]$ вещественной оси. Несложно увидеть, что семейство деформаций (10) «скручивает» этот цилиндр: кольцо $|\tilde{y}_2| \in [\varepsilon, \sqrt{\varepsilon/2}]$ делает полный оборот, кольцо $|\tilde{y}_2| \in [\sqrt{2\varepsilon}, 1]$ не двигается с места, а разделяющие их окружности радиуса от $\sqrt{\varepsilon/2}$ до $\sqrt{2\varepsilon}$ поворачиваются на разные промежуточные углы. В результате цикл l , заданный отрезком $l = [\varepsilon, 1]$, тоже «скручивается» и переходит в цикл, эквивалентный разности $l - \Delta$, где Δ — цикл, заданный окружностью радиуса $\sqrt{\varepsilon}$, см. рис. 28. (По тради-

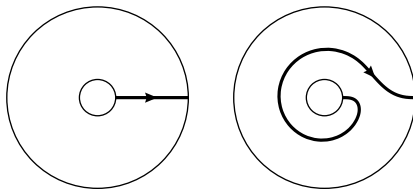


Рис. 28. Скручивание

ции эта окружность ориентируется против часовой стрелки, именно этим объясняется знак минус в предыдущей формуле, поскольку при скручивании у нас добавилась эта окружность, проходимая с противоположной ориентацией.) Возвращаясь к трехмерной картине, это скручивание полезно представлять примерно так, как показано на рис. 27 справа; при этом в действительности добавившийся цикл $(-\Delta)$ реализуется подходящим образом ориентированной окружностью, состоящей из таких точек (y_1, y_2) , что $y_1 = y_2$, $|y_1| = \sqrt{\varepsilon}$ (на рис. 27 она изображена пунктиром).

Этот цикл Δ называется *исчезающим*: когда s приближается к критическому значению, он «исчезает», «схлопываясь» в эту точку. Мы уже видели такие циклы раньше — ровно они будут соответствовать луночкам для минимумов и максимумов, которые появлялись в п. 4.7 (опять-таки, «схлопываясь» в точку при подходе значения s к критическому).

А как будет перестраиваться какой-нибудь другой цикл $\tilde{l} \in H_1(\mathcal{A} \cap X_c)$? Если он не заходит в окрестность особой точки, то и перестраиваться он не будет: чем мы ближе к критическому значению, тем меньшую окрестность особой точки мы тревожим при нашей деформации.

Если же этот цикл $\tilde{l}$ проходит вдоль «гиперболы» l дважды, то к нему в результате скручивания добавится -2Δ ; если он проходит в обратную сторону — то $+\Delta$, и вообще, к нему столько раз добавится цикл $-\Delta$, «сколько раз» он равен циклу l . Как выразить это число формулой?

Есть такая операция на циклах — *индекс пересечения* (см., например, [20], [15]). В простейшем случае, когда у нас два одномерных цикла $\tilde{l}$ и Δ в ориентированной двумерной поверхности, ее результат — число $\langle \tilde{l}, \Delta \rangle$ — определяется так. Мы берем все точки пересечения $\tilde{l}$ и Δ и считаем их количество с учетом знаков. Чтобы определить знак каждой точки пересечения, берем два упорядоченных вектора, касательных к этим циклам в этой точке и направленных в соответствии с ориентацией этих циклов, и сравниваем ориентацию в точке, заданную этой парой векторов, с ориентацией объемлющего многообразия. Знак точки равен $+$ или $-$ в зависимости от результата сравнения. Искомый индекс равен разности числа «положительных» точек и числа «отрицательных». Если циклы в какой-то точке касались, то мы сначала немного шевелим их, чтобы все пересечения стали общего положения; довольно естественно (хотя это, конечно, и нужно доказывать), что от выбора шевеления результат не зависит.

В нашем случае каноническая ориентация объемлющего многообразия $\mathcal{A} \cap X_c$ задается ее комплексной структурой: в каждой точке положительной считается пара касательных векторов, первый из которых можно взять произвольным образом, а второй получается из него умножением на i . В частности, для наших двух циклов мы имеем $\langle l, \Delta \rangle = 1$. Также легко видеть, что $\langle \Delta, \Delta \rangle = 0$. А чему равно $\langle l, l \rangle$? Казалось бы, для ответа на этот вопрос у нас недостаточно данных: ведь цикл l как-то расположен во всем многообразии $\mathcal{A} \cap X_c$, в котором мы наблюдаем только маленькую часть, расположенную вблизи нашей критической точки. Тем не менее, имеется точный ответ на этот вопрос, который оставляется читателю для самостоятельных раздумий.

Так вот, любой другой цикл $\tilde{l}$ с точки зрения нашей задачи есть «столько раз l », каков его индекс пересечения с Δ . На этом языке перестройка цикла, заданная обносом с вокруг нуля, задается очень простой и естественной формулой

$$\tilde{l} \mapsto \tilde{l} - \langle \tilde{l}, \Delta \rangle \Delta; \quad (11)$$

это — простейший случай формулы Пикара—Лефшеца.

Например, из равенства $\langle \Delta, \Delta \rangle = 0$ следует, что при $n = 3$ монодромия переводит исчезающий цикл Δ в себя (как мы уже видели в п. 4.7).

В следующем разделе мы увидим, как выглядит формула Пикара—Лефшеца, описывающая монодромию при обходе вокруг критических значений функции $x|_{\mathcal{A}}$ при других n . По-прежнему мы будем считать, что соответствующие критические точки функции $x|_{\mathcal{A}}$ — морсовские; в частности, по лемме Морса выбором локальных вещественных координат эту функцию всегда можно свести к виду

$$x = \pm \tilde{y}_1^2 \pm \dots \pm \tilde{y}_{n-1}^2$$

для какого-то выбора знаков. Если все знаки в такой формуле — плюсы, то это точка локального минимума, если все минусы — то максимума, остальные варианты соответствуют точкам, не являющимся локальными экстремумами. В случае $n - 1 = 2$ такой вариант один, это седловая точка, и она задается уравнением

$$x = \tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2 = (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2).$$

Поэтому любая седловая точка заменой координат может быть приведена к виду из примера 6.

Более того, с комплексной точки зрения нет разницы между квадратом с плюсом и квадратом с минусом: они переходят друг в друга при умножении координаты на i , так что все невырожденные критические точки оказываются одинаковыми: любую такую точку комплексной заменой координат можно привести к виду

$$x = \tilde{y}_1^2 + \dots + \tilde{y}_{n-1}^2. \quad (12)$$

Поэтому понятие исчезающего цикла определено для любой критической точки при $n - 1 = 2$. Более того, как мы увидим вскоре, оно определено и вообще при всех n — и точно так же для любого n есть соответствующая формула Пикара—Лефшеца.

6.4.3. *Формула Пикара—Лефшеца для произвольного n .* Итак, с комплексной точки зрения все невырожденные критические точки одинаковы: заменой координат их можно привести к виду (12). Если c близко к 0, то на сечении $\mathcal{A} \cap X_c$ легко увидеть *исчезающий цикл* Δ — $(n-2)$ -мерную сферу, сжимающуюся в точку, когда c стремится к критическому значению 0. При вещественном $c = \varepsilon > 0$ этот цикл можно представить как

$$\{(x, y_1, \dots, y_{n-1}) : x = \varepsilon, y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 = \varepsilon, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}\}.$$

В п. 6.4.1, когда наша критическая точка была точкой экстремума, именно этот цикл получался из области луночки (6)

$$D = \{(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq \varepsilon, y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 \leq x\}$$

взятием «ребра» $\partial D \cap \mathcal{A} \cap X_c$ ее границы (см. рис. 29).

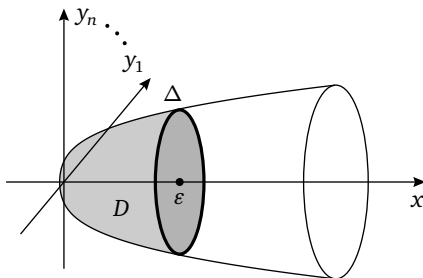


Рис. 29. Исчезающий цикл Δ

Ориентируем этот исчезающий цикл произвольным образом. Тогда, продолжая его на не вещественные значения c при помощи деформации (7), мы видим, что он (так же, как и контур-луночка) в случае нечетного n при обходе вокруг критического значения переходит в себя, а в случае четного n — в минус себя.

Общая формула Пикара—Лефшеца выглядит так: при обходе значения c против часовой стрелки вокруг критического значения любой цикл $l \in H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c)$ перестраивается по правилу

$$l \mapsto l + (-1)^{n(n-1)/2} \langle l, \Delta \rangle \Delta, \quad (13)$$

где Δ — соответствующий исчезающий цикл.

В этой формуле снова используется индекс пересечения, который можно определить для любых двух $(n - 2)$ -мерных циклов на (вещественно) $2(n - 2)$ -мерной поверхности. Это делается следующим образом. Эти циклы на поверхности имеют дополнительную размерность, и поэтому (быть может, после небольшого шевеления) пересекаются в конечном числе точек. Будем считать эти точки опять с учетом знака. В каждой точке пересечения мы берем положительно ориентированный базис касательных векторов к первому циклу, дописываем к нему положительно ориентированный базис касательных векторов ко второму, и если получился положительно ориентированный базис касательного пространства всей поверхности, то точку пересечения считаем с весом $+1$, а иначе -1 . Если же полученные $2n - 2$ вектора окажутся линейно зависимыми, то надо еще немного пошевелить наши многообразия; таким шевелением всегда можно привести их в общее положение, гарантирующее линейную независимость этих векторов во всех точках пересечения.

При этом мы пользуемся тем, что $\mathcal{A} \cap X_c$ — комплексное многообразие, а следовательно, имеет некоторую стандартную ориентацию.

Правая часть в (13) не зависит от выбора ориентации исчезающего цикла: смена ориентации заменяет Δ на $-\Delta$ и меняет знак у индекса пересечения, так что эти две замены сокращаются.

6.4.4. Топология поверхности. Посмотрим, как устроена поверхность $\mathcal{A} \cap X_c$, $c = c_j + \varepsilon$, в окрестности морсовской критической точки функции $x|_{\mathcal{A}}$ (т. е. ограничения функции x на комплексную поверхность $\mathcal{A}$), соответствующей критическому значению c_j . Сначала разберем модельный пример — множество

$$V_\varepsilon = \{(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : x = \varepsilon, y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 = \varepsilon\}$$

(в частности, в этом случае $c_j = 0$). Вещественная часть $V_\varepsilon \cap \mathbb{R}^n$ этой поверхности — это сфера радиуса $\sqrt{\varepsilon}$ — тот самый исчезающий цикл. А как устроена вся (комплексная) поверхность? Пусть $y_j = u_j + iv_j$, тогда комплексное уравнение нашей поверхности в плоскости X_ε превращается в систему вещественных уравнений

$$\begin{cases} \sum_j u_j^2 - \sum_j v_j^2 = \varepsilon, \\ \sum_j u_j v_j = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Второе уравнение системы показывает, что векторы $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$ и $v = (v_1, \dots, v_{n-1})$ перпендикулярны. Первое же — что длина $|u| = \sqrt{\varepsilon + |v|^2}$ однозначно определяется вектором v . Поэтому множество точек такой поверхности взаимно однозначно соответствует множеству пар (P, v) , где $P = u/|u|$ — точка единичной сферы $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, а $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ — касательный вектор к сфере в этой точке. Множество таких пар называется *касательным расслоением* к сфере и обозначается TS^{n-2} .

В частности, при $n = 3$ мы получаем касательное пространство к окружности. В этом случае касательный вектор v в любой точке P окружности однозначно задается одним вещественным числом: он равен вектору скорости стандартного равномерного движения по окружности в положительном направлении, умноженному на такое число. Поэтому $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$, т. е. касательное пространство к окружности является цилиндром.

Далее, шаровая окрестность критической точки высекает из множества всех точек, удовлетворяющих уравнениям (14), только часть — где вектор v «не слишком длинный», т. е. не длиннее некоторой положительной константы, которую за счет растяжения можно считать единицей. Поэтому наше множество V_ε в этой окрестности топологически эквивалентно множеству

$$T_{\leq 1}S^{n-2} = \{(P, v) : P \in S^{n-2}, (P \cdot v) = 0, |v| \leq 1\}, \quad (15)$$

т. е. множеству только тех касательных векторов к $(n - 2)$ -мерной сфере, длина которых не превосходит 1. Из леммы Морса следует, что и в общем случае рядом с критической точкой множество $\mathcal{A} \cap X_\varepsilon$ устроено топологически точно так же. При этом исчезающий цикл соответствует «нулевому сечению» касательного расслоения, т. е. подмножеству в (15), состоящему из пар (P, v) , где вектор v — нулевой.

А как устроены циклы на этом множестве?

Есть два типа циклов на многообразии (15): абсолютные и относительные (по модулю края, т. е. пересечения с границей области: в терминах касательного расслоения этот край соответствует парам (P, v) с векторами v ровно единичной длины). Абсолютные циклы полностью лежат в нашем множестве (15) и не имеют границы (даже на его краю). Два таких цикла эквивалентны («гомологичны»), если разность между ними равна границе какой-то $(n - 1)$ -мерной

поверхности в нашем множестве (15). Типичным примером абсолютного цикла является исчезающий цикл. Легко видеть, что любой цикл в нашем многообразии можно продеформировать на нулевое сечение (эта деформация задается просто равномерным укорочением векторов v). Однако при этом продеформированный цикл может накрыть это сечение с произвольной целой кратностью (напомним, что умножение на -1 соответствует смене ориентации), поэтому множество всех классов эквивалентности (т. е. элементов группы $(n-2)$ -мерных гомологий нашего множества) равно группе целых чисел.

Другой важный класс циклов — относительные — интересен нам по следующей причине. Пусть имеется $(n-2)$ -мерный цикл l , лежащий во всем множестве $\mathcal{A} \cap X_c$, и нам надо вычислить результат его монодромии при обходе параметра c вокруг какого-то критического значения. Тогда полезно сразу проверить, нельзя ли вытолкнуть этот цикл из окрестности соответствующей критической точки, т. е. нельзя ли добиться того, чтобы при подходе c к этому критическому значению наш продеформированный цикл (или цикл, гомологичный ему — ведь поведение интегралов зависит только от класса гомологий) оставался вне некоторой такой окрестности. Если цикл выталкивается, то можно сразу сказать, что монодромия на него не действует, аналогично тому, как на рис. 13 она не действовала на точку A . Что может помешать такому выталкиванию? Возьмем при $c = \varepsilon$ пересечение цикла l с нашей окрестностью критической точки, т. е. с множеством (15). Это пересечение является относительным циклом: вся его граница лежит на краю этого множества. Цикл l можно вытолкнуть из нашей окрестности тогда и только тогда, когда это пересечение эквивалентно (т. е. гомологично) контуру в $T_{\leq 1} S^{n-2}$, целиком лежащему на краю.

Основной пример нетривиального относительного цикла в множестве (15) — любой касательный диск к сфере, т. е. множество всех векторов (P, v) в (15), где P — какая-то одна точка сферы, а v — все возможные касательные векторы длины ≤ 1 в этой точке. Все остальные относительные циклы сводятся (гомологичны) к этому, опять-таки взятому с некоторой кратностью, так что группа относительных гомологий тоже равна $\mathbb{Z}$. Действительно, мы всегда можем слегка пошевелить цикл l так, чтобы он пересекался с нулевым сечением Δ лишь в конечном числе точек. После этого на цикл l можно

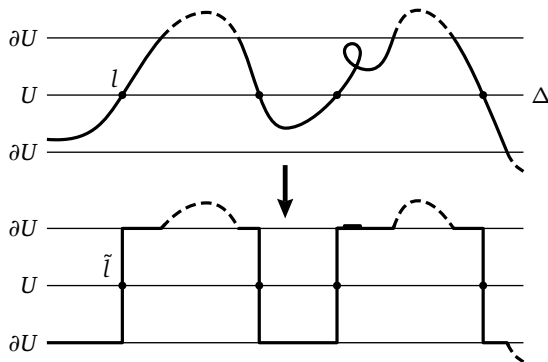


Рис. 30. Выталкивание цикла на границу

подействовать радиальным векторным полем, отталкивающим его от нулевого сечения Δ . Это поле вытолкнет почти все его точки на границу, и только окрестности точек пересечения с Δ превратятся в экземпляры касательного диска над этими точками, см. рис. 30. Наконец, такие экземпляры с противоположными ориентациями можно «сократить»: для любой такой пары дисков найдется $(n - 1)$ -мерный контур, граница которого равна разности этих дисков плюс нечто на границе множества U . А именно, такой контур замечается семейством касательных дисков над точками любого пути в S^{n-2} , соединяющего две наши точки.

Теперь заметим, что индекс пересечения определен не только для пары обычных циклов, но и в случае, когда один из этих циклов — обычный (абсолютный), а второй — относительный по модулю границы. Например, индекс пересечения двух описанных базисных циклов — абсолютного (нулевого сечения) и относительного (касательного диска) равен ± 1 (где знак зависит от выбора ориентаций этих циклов). Индексы пересечения двух эквивалентных (гомологических друг другу) циклов с каким-нибудь третьим одинаковы, поэтому чтобы понять, какому количеству базисных относительных циклов эквивалентен наш цикл l , достаточно посчитать его индекс пересечения $\langle l, \Delta \rangle$ с базисным абсолютным циклом.

6.4.5. *Индекс самопересечения исчезающего цикла.* Посмотрим, будет ли базисный абсолютный цикл Δ эквивалентен пустому, если

рассматривать его как относительный (попросту говоря, можно ли его целиком выдавить из нашей области U). В случае $n=3$, когда U — обычный цилиндр, это верно: экватор цилиндра легко сдвигается за его пределы. То же самое будет верно и для любого нечетного n . Действительно, на нечетномерной сфере S^{n-2} существует всюду ненулевое векторное поле $\{\nu(P)\}$: ограниченного ею $(n-1)$ -мерного «ежа» можно причесать! Поэтому достаточно сдвинуть любую точку $(P, 0)$ нулевого цикла вдоль отрезка, состоящего из точек $(P, \lambda\nu(P))$, где $\lambda \geq 0$.

В частности, индекс самопересечения $\langle \Delta, \Delta \rangle$ при нечетных n равен 0. Это и неудивительно: из определения индекса пересечения легко следует, что эта операция *косокоммутативна*. Это означает, что если α, β — два k -мерных цикла в $2k$ -мерном ориентированном многообразии, то $\langle \beta, \alpha \rangle = (-1)^k \langle \alpha, \beta \rangle$, поэтому при нечетном k индекс самопересечения любого k -мерного цикла равен 0.

Из этого еще раз следует, что при таких n монодромия вокруг критического значения c_j переводит цикл, исчезающий в соответствующей критической точке, в себя.

Напротив, при четных n этот индекс самопересечения не равен 0. Прежде чем говорить о том, чему же он равен, надо договориться о выборе ориентации в объемлющем множестве $\mathcal{A} \cap X_c$: смена этой ориентации меняет знаки всех точек пересечения.

Здесь имеются два конкурирующих подхода. С одной стороны, на $\mathcal{A} \cap X_c$ есть естественная ориентация, возникающая из-за того, что это комплексное многообразие: если $\xi_1, \dots, \xi_{n-2}$ — *комплексный* базис касательных векторов в какой-нибудь точке, то положительно ориентированным считается вещественный базис $\xi_1, i\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, i\xi_{n-2}$. Это соответствует тому, что положительно ориентированной системой координат будет, например, набор

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{n-2}, v_{n-2} \quad (16)$$

(локально, в области, где u_{n-1} выражается через $u_1, \dots, u_{n-2}$).

С другой стороны, на касательном расслоении любого вещественного многообразия, в частности на TS^{n-1} , есть другая стандартная ориентация, устроенная следующим образом: сначала идут координаты на сфере, потом дублирующие их координаты касательного вектора. Это соответствует тому, что положительно

ориентированной локальной системой координат будет

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}. \quad (17)$$

Эти две ориентации, вообще говоря, не совпадают: они отличаются перестановкой координат. Число беспорядков в такой перестановке равно $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Соответственно, индексы пересечения одной и той же пары $(n-2)$ -мерных циклов относительно этих двух ориентаций отличаются на множитель $(-1)^{(n-2)(n-3)/2}$. В частности, для индекса пересечения $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, отвечающего ориентации U как касательного расслоения, обещанная выше формула Пикара—Лефшеца (13) примет совсем простой вид:

$$l \mapsto l - \langle l, \Delta \rangle' \Delta.$$

В теории Пикара—Лефшеца приходится использовать только первую (комплексную) ориентацию, поскольку там речь идет и об индексах пересечения циклов в произвольных многообразиях, подобных $\mathcal{A} \cap X_c$, при c , не обязательно близких к критическому значению, так что стандартной структуры касательного расслоения там нет, комплексная же ориентация определена всегда.

Вычислим индекс самопересечения $\langle \Delta, \Delta \rangle'$ исчезающего цикла относительно второй ориентации. Прodeформируем один из экземпляров Δ , так что он станет графиком некоторого векторного поля на сфере S^{n-2} ; точки же его пересечения с недеформированным Δ , т. е. нулевым сечением, соответствуют *особым точкам* (нулям) этого векторного поля. Несложно посчитать, что вклад каждой такой точки в индекс самопересечения нулевого сечения равен *индексу* соответствующей особой точки векторного поля (см., например, [15]). Следовательно, весь индекс самопересечения равен сумме индексов всех этих точек. Известная теорема Пуанкаре утверждает, что *сумма индексов особых точек векторного поля на замкнутом многообразии равна эйлеровой характеристике этого многообразия*. В частности, в случае сферы это 2 для сферы четной размерности и 0 для нечетномерной.

Если вернуться к индексу самопересечения исчезающего цикла относительно комплексной ориентации в $\mathcal{A} \cap X_c$, то получим соответственно $(-1)^{(n-2)(n-3)/2} \cdot 2$ при четном n и 0 при нечетном.

6.4.6. *Общий вид формулы Пикара—Лефшеца.* Уже из общих соображений видно, что эта формула должна иметь следующую структуру.

Предложение 2. При обходе параметра с против часовой стрелки вокруг критического значения, соответствующего морсовской критической точке функции $x|_{\mathcal{A}}$, класс любого $(n-2)$ -мерного цикла $l \in \mathcal{A} \cap X_c$ преобразуется по формуле

$$l \mapsto l + \lambda(n)\langle l, \Delta \rangle \Delta, \quad (18)$$

где Δ — класс цикла, исчезающего в этой критической точке, а $\lambda(n)$ — какое-то целое число, зависящее только от n .

Доказательство. Во-первых, результат монодромии зависит только от поведения цикла l в окрестности критической точки, т. е., как мы видели выше, от класса этого цикла в группе относительных гомотопий $H_{n-2}(U, \partial U)$. Действительно, если у двух разных циклов $l, \tilde{l}$ эти классы совпадают, то разность этих циклов выталкивается вдалеке от критической точки, и с ней при монодромии ничего не происходит. Но такой класс цикла l полностью определяется индексом пересечения $\langle l, \Delta \rangle$.

Далее, все преобразование монодромии происходит в малой окрестности критической точки, а следовательно, всё, что может произойти с циклом l , — это добавление некоторого цикла, полностью лежащего в такой окрестности. Как мы видели, все такие циклы имеют вид (с точностью до гомотопии) $k \cdot \Delta$, где k — какое-то целое число (которое, вообще говоря, зависит и от вида нашей критической точки, и от класса нашего цикла l , т. е. числа $\langle l, \Delta \rangle$). Из леммы Морса (утверждающей, что все критические точки от одинакового числа комплексных переменных топологически эквивалентны) следует, что k зависит только от n и $\langle l, \Delta \rangle$. Наконец, легко видеть, что преобразование монодромии — линейный оператор, поэтому зависимость числа k от $\langle l, \Delta \rangle$ будет тоже линейной: k имеет вид $\lambda(n)\langle l, \Delta \rangle$. $\square$

Остается понять, чему равно $\lambda(n)$ при различных n . Проще всего сделать это, если n чётно. Действительно, раньше мы видели, что при таких n сам исчезающий цикл Δ , соответствующий этой критической точке, переходит в $-\Delta$. Сопоставляя этот результат с формулой (18) (в которую в качестве l подставлено опять-таки Δ),

получаем

$$-\Delta = \Delta + \lambda(n) \langle \Delta, \Delta \rangle \Delta.$$

Сокращая на Δ и используя наши знания об индексе самопересечения, получаем, что $-1 = 1 + \lambda(n) \cdot (-1)^{(n-2)(n-3)/2} \cdot 2$, что дает нам значение $\lambda(n)$ (совпадающее с обещанным в формуле (13)).

Проверить формулу Пикара—Лефшеца при произвольном нечетном n сложнее, поскольку исчезающий цикл имеет нулевое самопересечение, и мы здесь этого делать не будем; впрочем, в случае $n = 3$ это было сделано в п. 6.4.2. Полное доказательство можно найти в [6] или в [11].

6.5. Перестройки контуров

Вернемся к контурам интегрирования. Как мы уже видели, любому n -мерному контуру Z , как элементу группы относительных гомологий $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$, можно сопоставить его границу $\partial Z \in \in H_{n-1}(\mathcal{A} \cup X_c)$, а ей, в свою очередь, общую границу $p(Z)$ компонент $\partial_c Z$ и $\partial_{\mathcal{A}} Z$. В частности, луночке L , отвечающей критическому значению, сопоставляется исчезающий цикл $\Delta = p(L)$, соответствующий этому же критическому значению. Из построения легко следует, что эта операция p коммутирует с монодромией: эти слова означают, что если монодромия над какой-то петлей в $\mathbb{C}$ переводит относительный цикл $Z \in H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$ в относительный цикл $\tilde{Z}$, то класс $p(Z) \in H_{n-2}(\mathcal{A} \cap V_c)$, полученный этой операцией из Z , переводится монодромией над той же петлей в цикл $p(\tilde{Z})$, полученный из $\tilde{Z}$. Ученые математики в подобных случаях любят рисовать так называемые коммутативные диаграммы, т. е. картинки примерно такого вида:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c) & \xrightarrow{M} & H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c) & \xrightarrow{M} & H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c). \end{array} \quad (19)$$

На этой картинке вертикальные стрелки изображают нашу операцию, понижающую размерность циклов на 2, а горизонтальные — преобразование монодромии над одной и той же петлей в $\mathbb{C}$. «Коммутативность» диаграммы означает, что, начав с любого элемента Z группы, изображенной в левом верхнем углу, и двигаясь последова-

тельно вдоль пары стрелок в правый нижний угол, мы получим один и тот же результат независимо от того, пойдём мы сначала направо или сначала вниз.

Введём на группе $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$ билинейную форму Q , индуцированную при помощи этой операции из индексов пересечения на группе $H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c)$: это означает, что для пары элементов $Z, Z' \in H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$ значение $Q(Z, Z')$ этой билинейной формы по определению равно индексу пересечения $\langle p(Z), p(Z') \rangle$ двух циклов в $\mathcal{A} \cap X_c$, полученных с помощью этой процедуры из Z и Z' .

Теперь мы готовы понять следующий «относительный» вариант формулы Пикара—Лефшеца, описывающей преобразование монодромии самих контуров интегрирования.

Предложение 3. При обходе параметра с вокруг критического значения против часовой стрелки любой элемент $Z \in H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$ перейдет в элемент

$$Z + (-1)^{n(n-1)/2} Q(Z, L)L, \quad (20)$$

где L — класс луночки, соответствующей этой критической точке.

Действительно, из сказанного выше (в частности, из коммутативности диаграммы (19)) следует, что при этом обходе к Z добавится какой-то цикл Γ , образ которого $p(\Gamma) \in H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c)$ равен добавку из обычной формулы Пикара—Лефшеца, т. е. циклу $(-1)^{n(n-1)/2} \langle p(Z), \Delta \rangle \Delta$.

Как мы видели выше, эта информация еще не определяет полностью наш добавок. А именно, для любого относительного цикла, граница которого полностью лежит в поверхности $\mathcal{A}$, операция p дает нулевой элемент группы $H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c)$, хотя исходный относительный цикл может быть и ненулевым: например, как раз таким будет класс всей области, ограниченной нашим овалом. Соответственно, если два цикла Γ, Γ' различаются на цикл, граница которого лежит в $\mathcal{A}$, то $p(\Gamma) = p(\Gamma')$.

Однако у нас есть еще одно соображение: преобразование монодромии тривиально действует вне окрестности критической точки, а следовательно, наш добавок должен полностью лежать в этой окрестности. А все относительные циклы, заключенные в такой окрестности, эквивалентны классу луночки, взятому с какой-то кратностью. Поэтому относительный класс гомологий, удовлетворяющий обоим этим условиям (что он реализуется циклом, лежащим

в этой окрестности, и что операция p делает из него $(n - 2)$ -мерный класс, указанный выше), уже определен однозначно и равен тому, что обещано в формуле (20).

6.6. Исчезающие циклы на одной поверхности

Вернемся к исходному вопросу об алгебраичности функции объема. Пусть $c_1, \dots, c_N$ — все критические значения ограничения координаты x на вещественную поверхность $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^n$. Если координата x общего положения, то для всех точек $c \in \mathbb{C}^1 \setminus \{c_1, \dots, c_N\}$, лежащих в достаточно малой окрестности вещественной прямой $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{C}^1$, комплексные множества $\mathcal{A} \cup X_c$ устроены топологически одинаково, и все группы $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_c)$ изоморфны друг другу. Более того, для c , близких между собой (скажем, лежащих в одном диске, не содержащем точек c_j), все такие группы стандартным образом отождествляются. Точно так же отождествляются между собой все группы $H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_c)$ для таких c .

Выберем неособую точку $x_0 \in \mathbb{R}^1 \setminus \{c_1, \dots, c_N\}$. Зафиксируем пути γ_j , $j = 1, \dots, N$, соединяющие точку x_0 с этими критическими значениями c_j в нашей окрестности вещественной прямой и не заходящие в другие точки c_k . А именно, от каждого из значений c_j такой путь γ_j сначала чуть-чуть продвигается по вещественной оси (вдоль отрезка $[c_j, c_j + \varepsilon]$), затем сдвигается в мнимую область вдоль отрезка $[c_j + \varepsilon, c_j + \varepsilon(1 + i)]$, затем идет вдоль вещественной оси до точки $x_0 + \varepsilon i$ и спускается в x_0 по отрезку $[x_0, x_0 + \varepsilon i]$; см. рис. 31.

Над каждой из точек $c_j + \varepsilon$ есть своя луночка L_j^0 (т. е. элемент группы $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{c_j + \varepsilon})$, реализованный относительным циклом, лежащим в малой окрестности соответствующей критической точки), а стало быть и свой $(n - 2)$ -мерный исчезающий цикл Δ_j^0 , получающийся из нее операцией p . Пользуясь тем, что над всеми точками c пути γ_j (кроме их начала, т. е. точки c_j) множества $\mathcal{A} \cup X_c$ устроены топологически одинаково, перенесем эти циклы вдоль этого пути. Получаем набор контуров $L_j \in H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$ и циклов $\Delta_j = p(L_j) \in H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_{x_0})$, где $j = 1, \dots, N$. Отметим, что эти циклы уже не будут «маленькими», как в начале соответствующих путей.

Каждому нашему пути γ_j соответствует петля $\hat{\gamma}_j$, начинающаяся и заканчивающаяся в x_0 : она проходит вдоль этого пути от x_0 к $c_j + \varepsilon$, затем обходит вокруг c_j и возвращается обратно вдоль γ_j в точку x_0 .

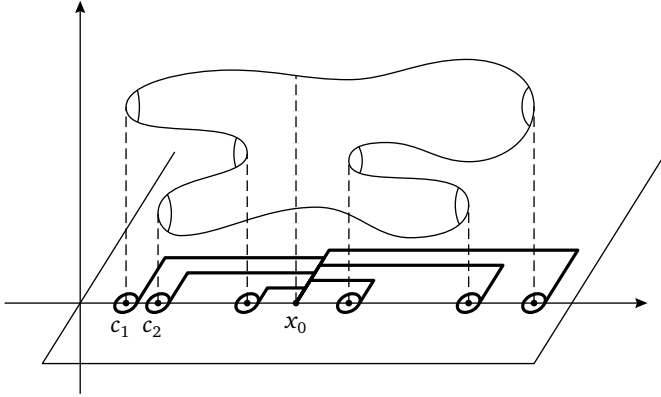


Рис. 31. Тело в $\mathbb{R}^n$, лунки и пути их продолжения

А как перестраивается какой-нибудь контур $Z \in H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$ при переносе над $\hat{\gamma}_j$?

Когда мы принесем контур Z к $c_j + \varepsilon$, он перейдет в некоторый контур Z' . Перестройка этого контура при обходе вокруг c_j задается формулой Пикара—Лефшеца (20): к нему добавится луночка L_j^0 с коэффициентом $(-1)^{n(n-1)/2} \langle p(Z'), p(L_j^0) \rangle$. Значит, когда мы вернемся обратно вдоль пути γ , к исходному контуру Z добавится продолжение этой лунки с этим коэффициентом, т. е. контур

$$(-1)^{n(n-1)/2} \langle p(Z'), p(L_j^0) \rangle \cdot L_j.$$

Но операция переноса не изменяет индекса пересечения, поэтому $\langle p(Z'), p(L_j^0) \rangle = \langle p(Z), p(L_j) \rangle$. В итоге, при обходе вокруг петли $\hat{\gamma}_j$ контур Z перестраивается по правилу

$$h_j : Z \mapsto Z + (-1)^{n(n-1)/2} Q(Z, L_j) L_j, \quad (21)$$

где Q — наша билинейная форма, заданная как

$$Q(Z_1, Z_2) := \langle p(Z_1), p(Z_2) \rangle.$$

Тем самым, на пространстве $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$ действует группа монодромии, для которой обходы критических значений c_j определяют отображения h_j . При четных n эти отображения — это «отражения», заданные по формуле (9) симметрической билинейной формой Q и «нормальными векторами» L_j .

6.7. Окончание доказательства теоремы 3

В этом пункте мы будем рассматривать только случай четного n .

Основным элементом доказательства теоремы 3 будет некоторая группа, порожденная отражениями, которую мы определим чуть ниже для каждой гладкой полуалгебраической поверхности $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^n$. Если бы выполнялось предположение об алгебраичности области в $\mathbb{R}^n$, ограниченной этой поверхностью, то эта группа оказалась бы конечной (и даже группой Вейля). Но мы предъявим ненулевой *нейтральный* элемент этой группы (т. е. элемент, ортогональный ко всем элементам группы в смысле ее основной билинейной формы) и получим противоречие со свойством групп Вейля, сформулированным в конце п. 6.2. Итак, определим эту группу.

При определении групп Вейля мы начинали с векторного пространства $\mathbb{R}^m$, в котором лежит целочисленная решетка с какими-то свойствами. Теперь мы пойдем в обратном направлении: сначала построим такую решетку (т. е. группу $\mathbb{Z}^m$, элементы которой — наборы из m целых чисел) вместе с подходящей билинейной формой на ней, а $\mathbb{R}^m$ определим просто как пространство с тем же базисом, элементы которого можно брать не только с целыми, а с любыми вещественными коэффициентами.

Начнем с пространства $\mathbb{Z}^N$, элементы которого — любые *формальные* линейные комбинации (с целыми коэффициентами) исчезающих контуров $L_j \in H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$, принесенных в точку x_0 над путями γ_j из окрестностей прообразов соответствующих критических значений c_j , $j = 0, \dots, N$. Слово «формальные» здесь означает, что мы не будем волноваться, если какая-то линейная комбинация на самом деле определяет нулевой класс в группе $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$: элемент нашей решетки — это произвольная запись вида

$$\alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_N L_N, \quad (22)$$

определяемая только своими коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{Z}$. На этом пространстве имеется билинейная форма, определенная индексами пересечения соответствующих циклов в $H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_{x_0})$: на базисных элементах она задается формулой

$$\tilde{Q}(L_j, L_{j'}) \equiv \langle p(L_j), p(L_{j'}) \rangle,$$

а на всю решетку $\mathbb{Z}^N$ распространяется по линейности. Поскольку n четно, то эта форма симметрична.

Каждая такая линейная комбинация (22) очевидным образом определяет некоторый элемент группы $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$, а следовательно, и некоторую функцию, определенную в малой окрестности точки x_0 в $\mathbb{C}^1$. Именно, для любого $\hat{x}$, близкого к x_0 , мы можем по непрерывности перенести этот элемент над отрезком, соединяющим x и $\hat{x}$, в группу $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{\hat{x}})$ и проинтегрировать форму объема $dx \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-1}$ по полученному контуру. Значения этих интегралов, зависящие от $\hat{x}$, образуют функцию от $\hat{x}$ в нашей окрестности. Все такие пути, соединяющие точки x_0 и $\hat{x}$ внутри маленькой окрестности, гомотопны друг другу, а следовательно, эта функция — однозначная в этой окрестности.

Назовем линейную комбинацию (22) *незначимой*, если полученная функция окажется тождественно нулевой. Множество всех незначимых линейных комбинаций, очевидно, является подгруппой в $\mathbb{Z}^N$. Легко понять, что факторгруппа по этой подгруппе тоже изоморфна решетке $\mathbb{Z}^M$ для некоторого $M \leq N$: действительно, если цикл tL является незначимым для какого-то целого $t \neq 0$, то и сам цикл L незначим.

Кроме того, если элемент Z незначим, то $\tilde{Q}(Z, L_j) = 0$ для любой лунки L_j . Действительно, в силу формулы Пикара—Лефшеца обход вокруг c_j заменяет Z на $Z \pm \tilde{Q}(Z, L_j)L_j$. Если цикл Z незначим, то незначим и этот цикл $Z \pm \tilde{Q}(Z, L_j)L_j$ (продолжение аналитической функции, тождественно равной нулю в некоторой окрестности, вдоль любого пути остается тождественным нулем). Значит, незначима и разность $\tilde{Q}(Z, L_j) \cdot L_j$ этих двух циклов. Но лунка L_j незначимой быть не может. Действительно, вблизи соответствующей точки c_j интеграл по ней в первом приближении ведет себя как объем луночки для стандартной морсовской особенности (этот объем пропорционален $(x - c_j)^{(n+1)/2}$), умноженный на (не равный 0) коэффициент сравнения объемов (так называемый якобиан), возникающий при замене координат из леммы Морса, сводящей нашу особенность к стандартной. Однако аналитическая функция, заданная интегралом по контуру Z , не может быть тождественно нулевой в окрестности точки x_0 , но не тождественно нулевой вблизи c_j .

Стало быть, $\tilde{Q}(Z, L_j) = 0$ для всех j , если элемент Z незначим. Из этого следует, что нашу билинейную форму $\tilde{Q}$ можно опустить на факторгруппу $\mathbb{Z}^M$, т. е. определить на ней билинейную форму Q таким образом: для любой пары элементов Λ, Λ' этой факторгруппы

$Q(\Lambda, \Lambda') \equiv \tilde{Q}(L, L')$, где $L, L' \in \mathbb{Z}^N$ — произвольные представители смежных классов Λ и Λ' . Заметим, что $Q(\Lambda_j, \Lambda_j) = 2(-1)^{n/2-1}$ для всякого образующего элемента $\Lambda_j \equiv \{L_j\}$.

На этой группе $\mathbb{Z}^M$ действует группа отражений, соответствующих всем элементам $\{L_j\}$ (т. е. смежным классам элементов L_j). Отражение относительно такого элемента задается монодромией вдоль петли $\hat{\gamma}_j$, соответствующей этому элементу и обходящей критическое значение c_j , и описывается формулой Пикара—Лефшеца

$$\Lambda \mapsto \Lambda + (-1)^{n/2} Q(\Lambda, \Lambda_j) \Lambda_j \equiv \Lambda - 2 \frac{Q(\Lambda, \Lambda_j)}{Q(\Lambda_j, \Lambda_j)} \Lambda_j,$$

имеющей в этом случае в точности вид (9).

Решетка $\mathbb{Z}^M$ однозначно достраивается до M -мерного векторного пространства, в котором действует эта же группа отражений: это пространство состоит просто из *вещественных* линейных комбинаций базисных элементов решетки $\mathbb{Z}^M$. (Такое очевидное достраивание решетки $\mathbb{Z}^M$ до содержащего ее пространства $\mathbb{R}^M$ по-научному называется *тензорным умножением на $\mathbb{R}$* .)

Итак, мы получили группу преобразований пространства $\mathbb{R}^M$, порожденную отражениями в каком-то наборе элементов целочисленной решетки $\mathbb{Z}^M \subset \mathbb{R}^M$. Допустим, что эта группа конечна (т. е. является группой Вейля).

Как уже говорилось в конце п. 6.2, из (общеизвестной) классификации групп Вейля вытекает такой важный факт. Скалярное произведение, отвечающее неприводимой группе Вейля, всегда знакоопределено. А если группа Вейля приводима, то знакоопределенными (вообще говоря, с разными знаками) будут ограничения этого скалярного произведения на все подпространства в $\mathbb{R}^M$, на которых эта группа действует уже неприводимо, при этом каждое из этих подпространств порождается каким-то поднабором нашего набора элементов Λ_j , с помощью которых определяются отражения. Но в нашем случае все индексы самопересечения базисных циклов Δ_j имеют один и тот же знак, следовательно, форма все-таки будет знакоопределенной. В частности, в $\mathbb{R}^M$ нет ненулевых нейтральных элементов (т. е. таких элементов Λ , что $Q(\Lambda, \Lambda_j) = 0$ для всех j).

Но такой элемент существует для любой алгебраической области в $\mathbb{R}^n$! Ключевое замечание тут состоит в следующем. Для каждого вещественного критического значения c_j рассмотрим контуры

в $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{c_j - \varepsilon})$ и $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{c_j + \varepsilon})$, отсекаемые от нашей области в $\mathbb{R}^n$, ограниченной поверхностью $\mathcal{A}$, условиями $x \leq c_j - \varepsilon$ и $x \leq c_j + \varepsilon$. Перенесем первый из них над дугой радиуса ε в верхней полуплоскости (т. е. над дугой, состоящей из точек вида $c_j + \varepsilon e^{i\tau}$, $\tau \in [0, \pi]$). Мы получим два разных контура с границей в $\mathcal{A} \cup X_{c_j + \varepsilon}$.

Оказывается, что классы гомологий этих двух контуров отличаются ровно на (взятую с подходящей ориентацией) луночку $L_j^\varepsilon \in H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{c_j + \varepsilon})$, лежащую вблизи критической точки, соответствующей критическому значению c_j . Это легче всего увидеть в случае, когда это точка экстремума (например, минимума): контур для $c_j - \varepsilon$ попросту пуст, а контур для $c_j + \varepsilon$ сам является такой луночкой. Доказательство этого равенства в общем случае см., например, в [11] (лемма 3.2 на стр. 121 английской книги или лемма 2 на стр. 186 русской).

Перенеся это равенство вдоль пути γ_j , мы получаем, что разница между соответствующими продолжениями контуров равна луночке L_j . В частности, сумма всех таких луночек по всем c_j (как сумма «приращений») — это просто исходное тело $D \subset \mathbb{R}^n$, рассматриваемое как элемент группы $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_{x_0})$. Но класс тела D лежит в ядре билинейной формы Q , поскольку граница D принадлежит $\mathcal{A}$, и $p(D) = 0$. С другой стороны, этот элемент, конечно, не является незначимым: ведь объем всего тела в $\mathbb{R}^n$ — положительное число.

Следовательно, наша группа, порожденная отражениями, не может быть группой Вейля.

Предположим теперь, что исходная функция объема была алгебраична. Тогда каждая луночка L_j , являющаяся разницей продолжений двух отсекаемых контуров, тоже задает алгебраическую функцию. Поэтому орбита ее класса Λ_j в пространстве $\mathbb{R}^M$ под действием группы монодромии конечна. Действительно, любое продолжение Λ_j обходами вокруг критических значений принадлежит решетке $\mathbb{Z}^M \subset \mathbb{R}^M$. Если орбита элемента Λ бесконечна, то бесконечно и число ветвей функции объема, что противоречит предположению об алгебраичности.

Но элементы Λ_j порождают всю решетку $\mathbb{Z}^M$. Если орбита любого из этих элементов под действием группы отражений конечна, то и сама эта группа конечна: число разных преобразований, принадлежащих этой группе, оценивается сверху произведением мощностей орбит всех элементов любого базиса этой решетки. Значит,

это группа Вейля. Это противоречие возникло из предположения об алгебраичности функции объема; тем самым, теорема 3 доказана.

6.8. Обобщения и уточнения

В конце предыдущего доказательства мы рассмотрели N функций, определенных вблизи точки x_0 и заданных интегралами по продолжениям луночек L_j от всех критических значений c_j ограничения координаты x на поверхность $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^n$; мы показали, что все эти функции не могут оказаться одновременно алгебраическими. Но, может быть, хотя бы некоторые из этих луночек определяют алгебраические функции? Например, если бы это было верно для луночки L_1 , соответствующей абсолютному минимуму этого ограничения, то такая функция совпадала бы с алгебраической вблизи соответствующей точки $X_{c_1+\varepsilon}$ пространства гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$.

Оказывается, это невозможно: если бы это было верно хотя бы для одной из луночек L_j , то сразу было бы верно и для всех остальных.

Действительно, рассмотрим опять множество всех комплексных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$. Для почти всех таких плоскостей X множество $\mathcal{A} \cup X$ расположено в $\mathbb{C}^n$ топологически одним и тем же способом. В частности, все соответствующие группы контуров $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X)$ изоморфны друг другу. Более того, при близких положениях плоскостей X между ними имеется стандартное отождествление, позволяющее делать такие отождествления и для неблизких плоскостей X, X' , если соединить их непрерывным путем в множестве всех таких «регулярных» (т. е. стандартно расположенных) плоскостей. Множество остальных — нерегулярных — плоскостей образует в пространстве всех гиперплоскостей алгебраическое подмножество положительной комплексной коразмерности, поэтому любые две регулярные плоскости действительно можно соединить путем в множестве регулярных плоскостей (хотя и не однозначно, и соответствующее отождествление групп $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X)$ зависит от выбора соединяющего пути). В частности, группа всех петель в пространстве регулярных плоскостей, начинающихся и кончающихся в выбранной плоскости X_0 , действует монодромиями на группе $H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X_0)$. Выше мы рассматривали лишь ограниченное подмножество в множестве всех таких петель, разрешая плоскостям

X двигаться только параллельно себе (т.е. задаваясь уравнениями вида $x = c$, где x — выбранная координата, а c пробегает комплексную прямую), и при этом параметру c запрещалось далеко уходить от вещественной оси, а разрешалось только обегать вещественные критические значения функции $x|_{\mathcal{A}}$. (Конечно, такие критические значения соответствуют «нерегулярным» положениям гиперплоскости по отношению к $\mathcal{A}$.)

Так вот, если поверхность $\mathcal{A}$ неприводима (т.е. задающее ее уравнение $f(x, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$ нельзя представить в виде $f = f_1 \cdot f_2 = 0$, где f_1, f_2 — полиномы положительной степени), то любые две наши луночки $L_j, L_{j'}$ переводятся друг в друга движением вдоль некоторого пути в «большом» пространстве всех регулярных положений гиперплоскости. Соответственно, и алгебраические свойства функций, задаваемых интегралами по циклам, полученным продолжением из этих луночек, полностью совпадают.

Действительно, рассмотрим на (комплексной) поверхности $\mathcal{A}$ множество (комплексно) эллиптических точек, т.е. точек, в которых эта поверхность «не уплощается» (или, как в этом случае говорят в дифференциальной геометрии, ее вторая квадратичная форма невырождена). Строго это свойство определяется так. Пусть $a \in \mathcal{A}$ — точка, в которой $\mathcal{A}$ не имеет особенностей (т.е. частные производные задающего ее полинома f не все равны 0, а следовательно, $\mathcal{A}$ гомеоморфна области пространства $\mathbb{C}^{n-1}$ вблизи этой точки). Пусть $\chi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ — комплексная линейная функция, такая, что касательная гиперплоскость к $\mathcal{A}$ в точке a задается уравнением $\chi = 0$. Дополним эту функцию до аффинной системы координат $(\chi, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ с центром в точке a . Тогда поверхность $\mathcal{A}$ локально задается каким-то уравнением вида

$$\chi = \varphi(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}), \quad (23)$$

где функция φ бесконечно дифференцируема, причем первый дифференциал функции φ в точке a равен 0. Требование неуплощаемости состоит в том, что второй дифференциал, т.е. квадратичная часть разложения Тейлора функции φ , должен быть невырожденной квадратичной формой.

Все наши критические точки функции $x|_{\mathcal{A}}$, в которых поверхность $\mathcal{A}$ касается соответствующих плоскостей $\{x = c_j\}$, принадлежат этому множеству (поскольку эта функция — морсовская). Но

множество неэллиптических точек в $\mathcal{A}$ (а также особых, если они есть) является комплексным алгебраическим подмножеством, оно задается (комплексным) уравнением. Поэтому его вещественная ко-размерность не меньше двух — и значит, любые две эллиптические точки в $\mathcal{A}$ можно соединить путем, полностью лежащим в множестве эллиптических точек. Сделаем это с критическими точками функции $x|_{\mathcal{A}}$, соответствующими луночкам $L_j, L_{j'}$. Затем возьмем путь в пространстве гиперплоскостей, состоящий из всех плоскостей, касающихся $\mathcal{A}$ в точках этого пути. Конечно, он весь лежит в множестве нерегулярных плоскостей.

Наконец, сдвинем этот путь в множество регулярных плоскостей, т. е. возьмем однопараметрическое семейство плоскостей $X(t)$, $t \in [0, 1]$, с такими свойствами:

- 1) для любого $t \in [0, 1]$ плоскость $X(t)$ параллельна плоскости предыдущего семейства, соответствующей тому же значению параметра t ;
- 2) $X(0)$ задана условием $x = c_j + \varepsilon$, $X(1)$ задана условием $x = c_{j'} + \varepsilon$.

Если при этом сдвиг достаточно слабый, то при каждом t в окрестности соответствующей точки касания множество $\mathcal{A} \cup X(t)$ устроено стандартным образом, в частности имеется относительный цикл — луночка $L(t) \in H_n(\mathbb{C}^n, \mathcal{A} \cup X(t))$, — лежащий в этой окрестности. Это семейство плоскостей и является почти что искомым семейством, соединяющим луночки L_j и $L_{j'}$. «Почти что» здесь означает следующее. Исчезающие луночки геометрически определены с точностью до знака (т. е. до выбора ориентации цикла), поэтому может оказаться, что при перенесении вдоль нашего пути луночка L_j перейдет в луночку $L_{j'}$, взятую с неправильной ориентацией. В этом случае достаточно дополнительно применить отражение из нашей группы, соответствующее самому элементу $\{L_{j'}\}$, т. е. обнести плоскость $X_{c_{j'}+\varepsilon}$ вокруг критического значения $c_{j'}$.

Итак, интегралы по продолжениям всех луночек являются неалгебраическими функциями. А что можно сказать про продолжения других элементов решетки $\mathbb{Z}^N$, являющихся более сложными линейными комбинациями этих луночек?

Теорема 4. Если контур интегрирования $L \in \mathbb{Z}^N$ не является нейтральным элементом билинейной формы $\tilde{Q}$ (т. е. найдется элемент

$L' \in \mathbb{Z}^N$ такой, что $\tilde{Q}(L, L') \neq 0$), то интегралы по продолжениям контура L не образуют алгебраическую функцию.

Действительно, в этом случае найдется такая луночка L_j , что $\tilde{Q}(L, L_j) \neq 0$. В силу формулы Пикара—Лефшеца, обнос вокруг соответствующего критического значения s_j добавит к контуру L контур $C \cdot L_j$, где $C \in \mathbb{Z}$ — ненулевая константа. Пусть $\{L_j\}$ — класс этой луночки в решетке $\mathbb{Z}^M$ контуров, профакторизованных по несущественным. Тогда орбита элемента $C \cdot \{L_j\}$ в $\mathbb{Z}^M$ под действием нашей группы, порожденной отражениями, содержится в множестве всех разностей между всевозможными элементами орбиты элемента $\{L_j\}$. Но выше было показано, что орбита элемента $\{L_j\}$ (а следовательно, и $C \cdot \{L_j\}$) бесконечна, следовательно, и орбита элемента $\{L_j\}$ бесконечна, что противоречит алгебраичности интегралов по продолжениям контура L .

Эту теорему можно немного усилить, не ограничиваясь только элементами $L' \in \mathbb{Z}^N$. А именно, пусть a — произвольная эллиптическая точка поверхности $\mathcal{A}$, γ — путь в множестве комплексных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$, соединяющий X_0 с касательной плоскостью к $\mathcal{A}$ в точке a , причем все точки этого пути, кроме последней, соответствуют гиперплоскостям, находящимся в общем положении к $\mathcal{A}$. Тогда для точек $X(t)$ этого пути, достаточно близких к этой последней точке, определен исчезающий цикл $\Delta(t) \in H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X(t))$, лежащий в окрестности точки a и исчезающий в ней. Пусть $\Delta' \in H_{n-2}(\mathcal{A} \cap X_0)$ — контур, полученный из $\Delta(t)$ перенесением вдоль нашего пути.

Теорема 4'. Если для контура интегрирования $\Lambda \in H_n(\mathbb{C}^n, X_0 \cup \mathcal{A})$ индекс пересечения $\langle p(\Lambda), \Delta' \rangle$ не равен 0, то интегралы по продолжениям контура Λ не задают алгебраическую функцию.

Доказательство — то же, что и раньше, при этом контур Λ надо обносить вдоль петли, определенной по пути γ .

Теорема 4 — частный случай этой, в котором в качестве точки a используются только критические точки ограничения координаты x на $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^n$, а в качестве γ — соответствующие пути γ_j .

6.9. Локальная алгебраичность

Здесь мы выполним обещание из п. 3.4 и разберем пример, когда функция объема, отсекаемого гиперплоскостью от тела в четномер-

ном пространстве, совпадает с алгебраической функцией вблизи этой гиперплоскости, не являясь при этом константой (возникающей в тривиальном случае, когда такая гиперплоскость просто не пересекает это тело). Итак, пусть тело W ограничено поверхностью с уравнением

$$(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1)^2 + u^2 = \varepsilon^2, \quad (24)$$

где $\varepsilon < 1$; таким образом, это трубчатая окрестность двумерной сферы, стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

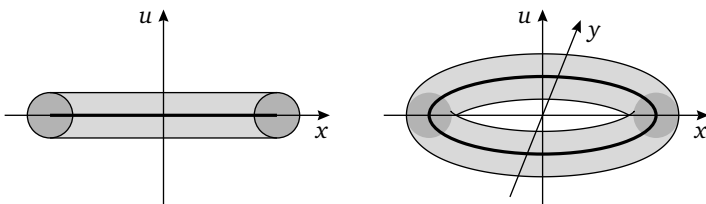


Рис. 32. Тело W в сечении плоскостью $\{z = 0\}$

Возьмем какую-нибудь трехмерную плоскость, содержащую ось u , например плоскость $\{z = 0\}$. В пересечении с ней тело W является трубчатой окрестностью окружности $\{(x, y, u) : x^2 + y^2 = 1, u = 0\}$. Обозначим объем этого пересечения через Ω , а объем всего W через C . (Те, кто умеет интегрировать простые функции, легко посчитают эти числа: $\Omega = 2\pi^2\varepsilon^2$, $C = 2\pi^2(2\varepsilon^2 + \varepsilon^4)$.)

Теорема 5. Для любой аффинной гиперплоскости в $\mathbb{R}^4$, заданной каким-то уравнением

$$ax + by + cz + du + t = 0 \quad (25)$$

u достаточно близкой к (какой-нибудь) гиперплоскости, содержащей ось Ou , объемы, отсекаемые ею от тела W , равны

$$\frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \Omega. \quad (26)$$

Замечание 5. Функция (26) не зависит от коэффициента d . Ради-
кал

$$\ell := \sqrt{\frac{t^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

в формуле (26) — это расстояние от начала координат до ближайшей точки пересечения гиперплоскостей $\mathbb{R}_{x,y,z}^3 \equiv \{u = 0\}$ и (25).

Лемма 1. Для любой аффинной гиперплоскости $T \subset \mathbb{R}^4$, достаточно близкой к какой-нибудь плоскости, содержащей ось Ou , трехмерный объем ее пересечения с телом W равен $\frac{\Omega}{\cos \alpha}$, где α — угол между этой гиперплоскостью и осью Ou .

Доказательство. Для произвольного $\tau \in \mathbb{R}$ рассмотрим сечение тела W трехмерной плоскостью $\{u = \tau\}$. Если $|\tau| > \varepsilon$, то это сечение пусто, а при $|\tau| < \varepsilon$ оно является шаровым слоем в $\mathbb{R}^3$, зажатым между сферами радиуса r и R , где

$$r = 1 - \sqrt{\varepsilon^2 - \tau^2}, \quad R = 1 + \sqrt{\varepsilon^2 - \tau^2}.$$

Любая плоскость в этом пространстве, отстоящая от начала координат на расстояние $\rho < r$, пересекает этот слой по кольцу одной и той же (не зависящей от ρ) площади

$$\pi(\sqrt{R^2 - \rho^2})^2 - \pi(\sqrt{r^2 - \rho^2})^2 = \pi(R^2 - r^2) = 4\pi\sqrt{\varepsilon^2 - \tau^2}.$$

Если наша гиперплоскость T действительно близка к какой-нибудь плоскости, содержащей ось u , то ее пересечение с плоскостью $\{u = \tau\}$ удовлетворяет этому условию $\rho < r$ для любого $|\tau| < \varepsilon$.

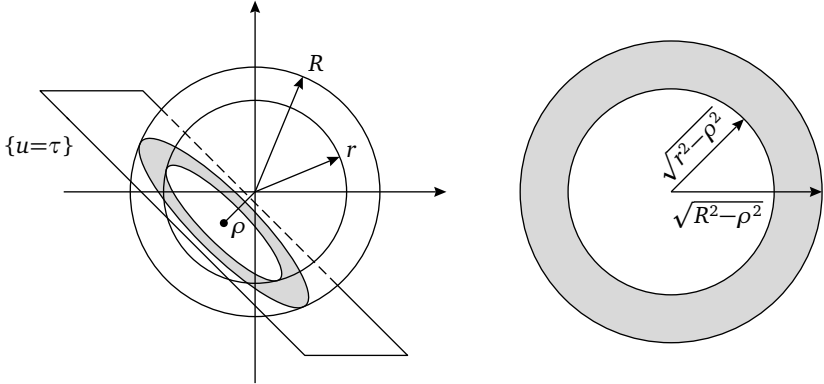


Рис. 33. Шаровой слой в плоскости $\{u = \tau\}$ и его пересечение с плоскостью T

Обозначим через T_0 гиперплоскость, содержащую ось u и такую, что пересечения плоскостей T и T_0 с пространством $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ парал-

лельны. Спроектируем плоскость T ортогонально на T_0 . Рассмотрим прообраз множества $T_0 \cap W$ при этой проекции.

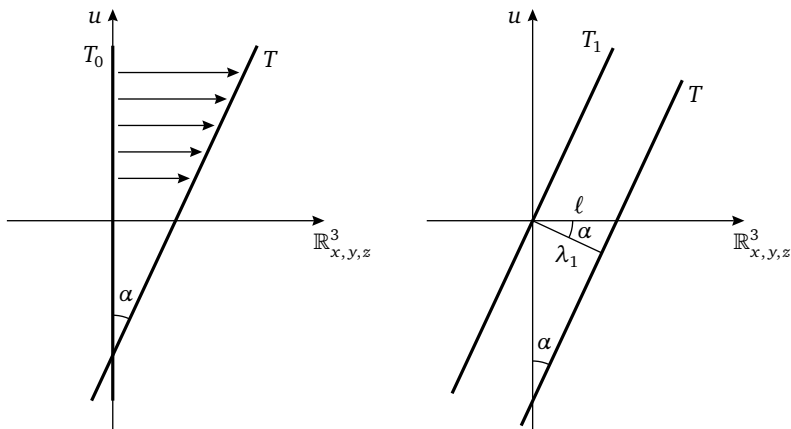


Рис. 34. Гиперплоскости T и T_0 ; рисунок в плоскости, перпендикулярной $T \cap \mathbb{R}^3_{x,y,z}$

Для любого значения τ пересечение этого прообраза с плоскостью $\{u = \tau\}$ имеет такую же площадь, как и пересечение множества $T \cap W$ с этой же плоскостью. Следовательно, по принципу Кавальери 3-мерные объемы этого прообраза и множества $T \cap W$ одинаковы, в частности, равны Ω . С другой стороны, при ортогональном проектировании гиперплоскостей объемы подмножеств умножаются на косинус угла между их нормальными, поэтому (см. рис. 34) объем прообраза множества $T \cap W$ равен $\frac{\Omega}{\cos \alpha}$. $\square$

Доказательство теоремы 5. Как и раньше, обозначим нашу плоскость, задаваемую уравнением (25), через T . Плоскость T_1 , заданная уравнением $ax + by + cz + du = 0$ (т. е. параллельная нашей плоскости T , но проходящая через начало координат), очевидно, делит объем тела W пополам.

Будем сдвигать ее параллельно себе по направлению к нашей плоскости на различные расстояния $\lambda \in [0, \lambda_1]$, где

$$\lambda_1 = \frac{|t|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

— расстояние между плоскостями T и T_1 .

Производная по λ от функций объемов, отсекаемых соответствующими плоскостями, равна (с точностью до знака) 3-мерному объему пересечения плоскости с W , т. е. при любом λ она равна $\pm \frac{\Omega}{\cos \alpha}$. Следовательно, после всего сдвига эта функция возрастет/уменьшится на число $\frac{\Omega}{\cos \alpha}$, умноженное на расстояние между нашими плоскостями.

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник в $\mathbb{R}^4$, вершины которого — это начало координат и его проекции на плоскость T и на ее пересечение с плоскостью $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$. В этом треугольнике (см. рис. 34) угол при начале координат равен α , прилежащий катет — расстояние до плоскости T , а гипотенуза равна расстоянию ℓ . Наше искомое изменение объема равно $\frac{\Omega}{\cos \alpha}$, умноженному на длину катета, т. е. просто числу Ω , умноженному на длину ℓ гипотенузы. $\square$

Как устроена наша (малая) группа монодромии для поверхности (24)? Ограничение координаты x на эту поверхность имеет четыре критических точки. Все они лежат на оси x , а значения координаты x в них равны $-1 - \varepsilon$, $-1 + \varepsilon$, $1 - \varepsilon$ и $1 + \varepsilon$. Все эти критические точки функции $x|_{\mathcal{A}}$ морсовские, их индексы Морса (т. е. отрицательные индексы инерции квадратичных частей) равны соответственно 0, 1, 2 и 3. Индексы пересечения соответствующих исчезающих циклов вычислены в [13]: при подходящем выборе ориентаций они задаются матрицей

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, группа, порожденная отражениями в этих четырех циклах, приводима: пространство ее действия разбивается в сумму двух двумерных, в каждом из которых действие группы такое же, как для выпуклой поверхности с ее двумя критическими точками. Сумма же двух первых исчезающих циклов, равно как и сумма двух последних, является нейтральным элементом этой формы пересечений.

Замечание 6. В $\mathbb{R}^2$ подобные примеры невозможны: контур, отсеченный прямой, пересекающей нашу область, никогда не будет нейтральным элементом формы Q . С другой стороны, наше вычисление почти непосредственно переносится на случай трубчатой

окрестности 2-мерной сферы в любом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, т. е. области, заданной условием

$$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - 1)^2 + y_1^2 + \dots + y_{n-3}^2 \leq \varepsilon^2. \quad (27)$$

Замечание 7. В этом примере можно ослабить требование алгебраичности нашей поверхности $\mathcal{A}$ по координате u . Например, в уравнении (24) мы могли бы заменить u^2 на $\sin^2 u$ (хотя это, разумеется, привело бы к изменению констант C и Ω). Не противоречит ли это сказанному в п. 3.3 и в замечании 3, т. е. тому, что у алгебраически интегрируемой области граница должна быть алгебраической? Нет, потому что рассматриваемая там ветвь алгебраической функции, обращающаяся в 0 на множестве касательных плоскостей к поверхности $\mathcal{A}$, — другая, чем в нашем примере. Она продолжается из той области множества всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{2k}$, находящихся в общем положении к $\mathcal{A}$, которая непосредственно граничит с множеством гиперплоскостей, не пересекающихся с поверхностью $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^{2k}$ (т. е. отделяется от этого множества одной «стенкой», состоящей из касательных плоскостей). Гиперплоскости же, рассматриваемые в предыдущем примере, отделены от нее двумя такими стенками.

Теорема 6. *Для любых двух соседних областей в множестве вещественных гиперплоскостей, некасательных к $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^{2k}$, ограничение функции объема хотя бы на одну из них не совпадает с алгебраической функцией.*

Действительно, граница между такими областями состоит из плоскостей, касательных к $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^{2k}$. В силу варианта леммы Бертини—Сарда почти все эти касания должны быть невырожденными (плоскостей, касающихся поверхности в точках ее уплощения, слишком мало, чтобы разделить пространство вещественных гиперплоскостей $\mathcal{P}$ на части). Взяв такую невырожденную касательную плоскость и чуть-чуть сдвинув ее параллельно себе, мы получим стандартную луночку (быть может, комплексную, если касание невыпуклое). Две функции — продолжения функций объема из наших двух областей — отличаются на интеграл формы объема по продолжению этой луночки, следовательно, их разность неалгебраична, а значит, неалгебраична хотя бы одна из двух продолженных функций объема.

6.10. Геометрические признаки неалгебраичности: условие Давыдовой

Оказывается, про одну из соседствующих областей, обсуждаемых в теореме 6, сразу можно сказать, что функция объема в ней неалгебраична. Для этого достаточно посмотреть на вторую квадратичную форму нашей поверхности $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^{2k}$ в точке касания ее типичной плоскостью, принадлежащей «стенке» между этими областями.

Действительно, проверку нейтральности контура интегрирования L естественно начать с вычисления индексов пересечения цикла $p(L)$ с самыми близкими и наглядными исчезающими циклами: с теми, которые исчезают, когда плоскость X стремится в $\mathcal{D}$ к границе своей связной компоненты множества типичных (т. е. некасательных к $\mathcal{A}$) плоскостей, становясь касательной к $\mathcal{A}$ в какой-то невырожденной точке $a \in \mathcal{A} \cap \mathbb{R}^{2k}$. Как и раньше, выберем вблизи этой точки локальные координаты, в которых $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^{2k}$ представляется в виде (23) (где на этот раз φ — вещественная функция вещественных аргументов), а касательная плоскость задана уравнением $\chi = 0$. Две параллельные ей плоскости $X_{\pm\epsilon}$, заданные условиями $\chi = \epsilon$ и $\chi = -\epsilon$ с достаточно маленьким $\epsilon > 0$, лежат в разных областях множества типичных гиперплоскостей: эти области локально разделены множеством плоскостей, касающихся $\mathcal{A}$ в точках, близких к a .

Невырожденность точки a означает, что особенность функции φ — морсовская. Поскольку $n = 2k$, а функция φ зависит от $n - 1$ переменной, один из индексов инерции ее квадратичной части четен, а другой нечетен.

Для каждой из плоскостей $X = X_{\pm\epsilon}$ рассмотрим два цикла $\nabla(X)$ и $\Delta(X, a)$ в $H_{n-2}(X \cap \mathcal{A})$: первый из них — это множество точек пересечения плоскости X с границей рассматриваемого тела, а второй — цикл, исчезающий в точке близкого касания a .

Предложение 4 (см., например, [11]). *Ровно один из индексов пересечения $\langle \nabla(X_+), \Delta(X_+, a) \rangle$ или $\langle \nabla(X_-), \Delta(X_-, a) \rangle$ равен 0, а другой не равен. А именно, первый из них равен 0, если четен положительный индекс инерции функции φ , а второй — если отрицательный.*

В силу теоремы 4, та из плоскостей $X_{\pm\epsilon}$, для которой этот индекс пересечения не равен нулю, заведомо не лежит в области, где функция объема совпадает с алгебраической.

Про другую область мы не можем гарантировать, что эта функция там алгебраична: соответствующий цикл ∇ может иметь ненулевое пересечение с каким-нибудь другим исчезающим циклом. Но кое-что хорошее про поведение функции объема в этой области сказать все-таки можно. А именно, когда мы будем приближаться со стороны этой области к части «стенки», отделяющей ее от другой области вблизи точки X , то эта функция будет вести себя как неособая: она совпадает там с бесконечно гладкой функцией, определенной в целой открытой области точки $X \in \mathcal{P}$. Когда мы будем подходить к этой же стенке с другой стороны, то все будет гораздо хуже: определенная там функция объема будет ветвиться при продолжении по малой петле, обходящей в комплексной области вокруг этой стенки.

Замечание 8. Предложение 4 имеет аналог и для нечетного n . В этом случае либо оба индекса инерции четны, либо оба нечетны. Если они оба нечетны, то функция объема не может совпадать с алгебраической ни в одной из прилегающих областей множества типичных гиперплоскостей. Более того, она будет бесконечно ветвиться уже в сколь угодно маленькой окрестности нашей «стенки».

Описанное выше условие на сигнатуру квадратичной формы поверхности $\mathcal{A}$ называется *условием Давыдовой* (или *Давыдовой—Боровикова*), см. [11]. Оно появилось [19] в близкой теории гиперболических уравнений в частных производных, развитой И. Г. Петровским [23]: нарушение аналогичного условия для множества нулей *главного символа* такого уравнения также гарантирует плохое поведение его решения.

§ 7. Случай нечетной размерности

Обобщенная теорема Архимеда говорит, что сферы и эллипсоиды в $\mathbb{R}^{2k+1}$ алгебраически интегрируемы. Основная проблема для нечетной размерности (см. [4], [5]) состоит в том, есть ли другие примеры, т. е. существуют ли в $\mathbb{R}^{2k+1}$ алгебраически интегрируемые ограниченные тела с гладкой неприводимой границей, кроме эллипсоидов.

Эта задача в общем виде не решена, однако в самое последнее время в ней произошел заметный прогресс, о котором мы расскажем в п. 7.3. Эта задача очень похожа на четномерную, но решать ее приходится другими техническими средствами. Это связано с тем, что группы монодромии, связанные с поверхностями в пространствах с размерностью разной четности, имеют совсем разную структуру. Хотя они управляются одной и той же формулой Пикара—Лефшеца, но индексы пересечения циклов, входящие в эту формулу, сильно зависят от размерности пространства: при четном n они симметричны (т. е. $\langle a, b \rangle \equiv \langle b, a \rangle$), а при нечетном — антисимметричны. (Это же различие ответственно и за принципиально разное поведение решений гиперболических уравнений типа волнового уравнения, ответственного за акустику, в пространствах разных размерностей.)

В нечетномерном случае имеются сильные «препятствия» к алгебраической интегрируемости, которые формулируются в терминах некоторых специальных точек у комплексного продолжения поверхности, ограничивающей нашу область: если на этой комплексной поверхности найдутся точки хотя бы одного из «запретных» типов, наша область заведомо не интегрируема. У поверхностей второго порядка таких точек нет, что и обеспечивает теорему Архимеда. В п. 7.3 мы опишем еще один класс поверхностей (порядка 4) без таких точек: тем самым, эти поверхности являются очень реальным кандидатом на алгебраическую интегрируемость. Однако в любом случае поверхности без таких препятствующих точек чрезвычайно редки.

Первый из этих запретных классов точек называется так:

7.1. Конечнократные параболические точки

Параболические точки уже неявно появлялись в п. 6.8 — как альтернатива к рассматривавшимся там эллиптическим точкам. Они являются многомерным аналогом точек перегиба плоской кривой, с которых мы и начнем.

Пусть на плоскости есть какая-то гладкая кривая. В каждой ее точке *кривизна* определяется следующим образом. Рассмотрим всевозможные окружности, касающиеся кривой в этой точке; центры их лежат на нормали к кривой. Почти все эти окружности имеют *простое квадратичное касание* с кривой: это значит, что функция на кривой, равная расстоянию до центра соответствующей окружности, имеет морсовскую особенность в нашей точке. Как правило, во всем этом семействе есть ровно одна окружность, у которой касание будет более высокого порядка. Ее центр называется *фокальной точкой* кривой, а величина, обратная радиусу, — *кривизной* в нашей точке.

Но иногда такой окружности нет: этой как бы окружностью становится прямая, касательная к кривой в нашей точке, ее как бы радиус оказывается бесконечным, а следовательно, кривизна равна 0. Например, у графика функции $y = x^3$ это происходит в нуле. Такие точки называются *точками перегиба* кривой. Как правило, это отдельные точки нашей кривой, и только у прямой линии все точки — точки перегиба.

Нечто похожее бывает у поверхностей в трехмерном пространстве. Типичная точка типичной поверхности в $\mathbb{R}^3$ будет эллиптической или гиперболической. (По поводу этих предметов горячо рекомендуется глава IV книги [17].) Вблизи (*вещественно*) *эллиптических* точек поверхность выпукла (или вогнута, смотря откуда смотреть), т. е. устроена приблизительно как участок сферы или эллипсоида. Вблизи *гиперболических* точек она выглядит приблизительно как график функции $y = x_1^2 - x_2^2$, т. е. как точка горного перевала. Например, у человека на лбу — эллиптические точки поверхности лица, а на переносице — гиперболические.

Во всех этих случаях тоже можно взять семейство всех касательных сфер, центры которых лежат на нормали к поверхности в нашей точке. Теперь уже, как правило, будет не одна, а две сферы с нетипичным касанием (таких, что расстояние до их центров не является

морсовской функцией вблизи этой точки поверхности). В эллиптическом случае эти два центра лежат с одной стороны на нормали (и иногда могут совпадать: например, это происходит в случае сферы), а в гиперболическом — по разные.

Помимо этого бывают *параболические* точки, не принадлежащие ни к тем, ни к этим. Их можно определить еще с помощью критической точки функции (23), строящейся для каждой точки a нашей поверхности. Если у этой функции морсовский минимум или максимум, то точка a эллиптическая, если сигнатура ее квадратичной части равна $(1, 1)$, то гиперболическая, а если особенность неморсовская, то параболическая.

Существуют нетипичные поверхности, например цилиндр или конус, на которых все точки являются параболическими, но на типичной поверхности почти все точки либо эллиптические, либо гиперболические. Свойства эллиптичности и гиперболичности — *открытые*: если такое свойство выполнено для какой-то точки поверхности, то оно выполнено и для всех точек из какой-то ее окрестности. И если на связной неособой поверхности есть и эллиптические, и гиперболические точки, то любой путь, ведущий из области эллиптических точек в область гиперболических, должен пройти через параболические.

Для комплексных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$ нет разницы между гиперболическими и эллиптическими точками, а вот параболические выделяются и там.

Другое важное для нас геометрическое свойство точек поверхности — *конечнократность*. В терминах функции (23) оно состоит в том, что критическая точка 0 этой функции должна быть *изолированной*: в некоторой ее окрестности в $\mathbb{C}^{n-1}$ не должно быть других критических точек. Например, функция $f(y, z) = y^3 + z^5$ удовлетворяет этому условию, а $g(y, z) = yz^2$ или $h(y, z) = (y - z^2)^2$ — нет.

Важно понимать, что, например, функция $(x^2 + y^2)^2$ тоже не удовлетворяет этому условию, хотя в вещественной области у нее нет других критических точек. Это условие можно ввести и не используя функцию (23): оно просто означает, что комплексная гиперплоскость, касательная к поверхности в нашей точке, не имеет других точек касания в некоторой окрестности этой точки в $\mathbb{C}^n$. Всякая эллиптическая или гиперболическая точка конечнократна, и на поверхностях общего положения все точки являются конечнократными.

Теорема 7 (см. [8, 11]). Если неприводимая (т. е. не распадающаяся в объединение двух) поверхность $\mathcal{A}$ имеет параболическую конечнократную точку в $\mathbb{C}^{2k+1}$, то ограниченная поверхностью $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}^{2k+1}$ область в $\mathbb{R}^{2k+1}$ не может быть алгебраически интегрируемой.

Для иллюстрации того, как это доказывается, рассмотрим еще раз двумерную задачу и точку перегиба, вблизи которой кривая $\mathcal{A}$ в первом приближении задана уравнением $x = y^3$. Для небольшой положительной константы δ рассмотрим семейство параллельных прямых $X(c)$, заданных условием $x = \delta y + c$ и запараметризованных числами $c \in \mathbb{C}$, см. рис. 35. В этом семействе есть две нетипичные точки, соответствующие прямым, касающимся кривой $\mathcal{A}$.

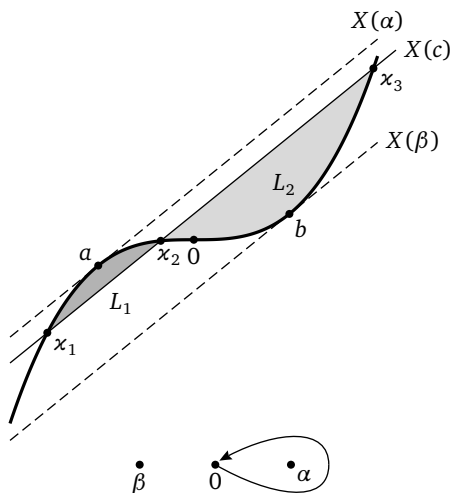


Рис. 35. Монодромия сечений около точки перегиба

Обозначим соответствующие значения параметра c через α и β . Допустим, что наша область лежит под графиком, так что для изображенной на рисунке прямой соответствующая функция площади — это площадь заштрихованной слева и примыкающей к точке a луночки L_1 . Через L_2 обозначим правую луночку.

Что будет происходить с продолжением функции площади, когда мы будем двигать параметр c нашей прямой в $\mathbb{C}^1 \setminus \{\alpha, \beta\}$? При обходе вокруг (положительного) значения α , над которым луночка L_1 «исчезает», она умножится на -1 . (Это не так в нечетномерном

случае, который нас на самом деле сейчас интересует, но давайте уж разберемся с двумерной картинкой.)

Цикл $p(L_1) \in H_0(\mathcal{A} \cap X_c)$ равен $x_2 - x_1$, цикл $p(L_2)$ равен $x_3 - x_2$. Таблица индексов пересечения наших циклов такова:

$$Q(L_1, L_1) = Q(L_2, L_2) = 2, \quad Q(L_1, L_2) = Q(L_2, L_1) = -1.$$

При обносе параметра c вокруг второго критического значения β цикл $p(L_1)$ перейдет в $x_3 - x_1 \equiv p(L_1) + p(L_2)$, а луночка L_1 — в контур $L_1 + L_2$. Если последний контур после этого еще обнести вокруг α , то соответствующая лунка L_1 прибавится с коэффициентом $(-1)\langle x_3 - x_1, x_2 - x_1 \rangle = -1$, и мы получим контур L_2 . Продолжая, мы не получим ничего нового, кроме шести контуров $\pm L_1, \pm L_2$ и $\pm(L_1 + L_2)$. Нетрудно понять, что группа отражений, преобразующая эти контуры друг в друга, — это группа A_2 симметрий треугольника, рассмотренная в п. 6.1. Таким образом, не уходя далеко от прямой, касательной в точке перегиба, мы получаем шесть разных ветвей продолжения функции площади.

Конечно, этой шестерки недостаточно для доказательства неалгебраичности. Поэтому в § 4—6 при доказательстве теорем неинтегрируемости для четномерного случая нам пришлось пользоваться методами *глобальной монодромии*, гоняя гиперплоскости вдоль достаточно длинных путей в пространстве всех типичных гиперплоскостей. В нечетномерном случае эффективными оказываются методы *локальной монодромии*, когда бесконечное ветвление набирается уже вблизи какой-то одной вырожденной плоскости.

Итак, пусть теперь n нечетно, например $n = 3$. Вблизи простейшей параболической точки поверхность $\mathcal{A}$ задается уравнением типа $x = y_1^3 - y_2^2$. Рассмотрим семейство плоскостей вида $x = \delta y_1 + c$. Нетипичными (т. е. касательными к нашей поверхности) будут две плоскости, соответствующие точно тем же значениям c , что в двумерном случае. Из каждого из этих касаний возникает исчезающая луночка в $H_3(\mathbb{C}^3, \mathcal{A} \cup X_0)$, однако теперь одну из них (ту, что соответствует точке невыпуклого касания) нельзя увидеть в вещественном пространстве.

Билинейная форма Q на порожденном этими контурами пространстве выглядит так:

$$Q(L_1, L_1) = Q(L_2, L_2) = 0, \quad Q(L_1, L_2) = -Q(L_2, L_1) = 1.$$

Поэтому когда мы обнесем исчезающий контур L_1 вокруг «его собственного» критического значения α , то с ним ничего не произойдет. Но если обнести его вокруг β , то в силу формулы Пикара—Лефшеца к нему добавится цикл $-L_2$. Что будет с полученным контуром $L_1 - L_2$, если мы еще раз обнесем его вокруг значения β ? Преобразование монодромии — линейное, т. е. для нахождения его действия на сумме двух контуров достаточно вычислить это действие для каждого из слагаемых, а потом сложить результаты. К слагаемому L_1 при этом обходе добавится еще раз $-L_2$, а к L_2 ничего не добавится, потому что $Q(L_2, L_2) = 0$. Обходя значение β снова и снова, мы добавим контур L_2 с любым целым коэффициентом (чтобы добавить его с положительными коэффициентами, нужно ходить в обратном направлении). Поскольку интеграл по продолжениям этого контура не является тождественно нулевой функцией, это бесконечное число ветвей продолжения является препятствием к алгебраичности функции объема.

Сильные методы *локальной теории Пикара—Лефшеца* позволяют провести аналогичное рассуждение в любых нечетных размерностях и для любых конечнократных параболических точек. Существует огромное количество типов неэквивалентных параболических точек, вблизи которых продолжение функции объема может ветвиться самыми разными способами; классификация их примерно соответствует классификации особенностей дифференцируемых функций, по поводу которых см., например, [6]. Так, для более сложных особенностей прямая, параметризующая параллельные гиперплоскости, может иметь не две близкие вырожденные точки, соответствующие плоскостям, касающимся нашей поверхности, а больше. (Число этих точек — это и есть та самая «кратность», подразумеваемая в загадочном доселе слове «конечнократный».) Но во всех этих случаях удастся построить петлю в пространстве плоскостей, вдоль которой продолжение функции объема накручивает любое количество разных значений.

Более того, в этом рассуждении можно избавиться от *вещественности* критической точки. Это делается при помощи примерно тех же соображений, которыми в п. 6.8 мы устанавливали эквивалентность условия алгебраичности для всех исчезающих циклов. Пусть даже наша поверхность $\mathcal{A}$ выпукла в $\mathbb{R}^{2k+1}$, но имеет параболическую конечнократную точку где-то далеко в мнимой области. Рас-

смотрим касательную комплексную гиперплоскость к ней в этой точке, а также близкую к ней гиперплоскость, касающуюся поверхности $\mathcal{A}$ в эллиптической точке ξ , очень близкой к этой параболической. Наконец, уже совсем слабо сдвинем последнюю плоскость параллельно себе, так чтобы полученная плоскость $\tilde{X}$ перестала быть касательной, а вблизи этой эллиптической точки касания возникла исчезающая луночка. Затем рассмотрим путь в пространстве эллиптических точек нашей поверхности, соединяющий точку ξ с какой-то эллиптической точкой $\xi' \in \mathcal{A} \cap \mathbb{R}^{2k+1}$, такой, что касательная в ξ' гиперплоскость является опорной для нашего тела в $\mathbb{R}^{2k+1}$. (Такой путь существует вследствие условия неприводимости поверхности $\mathcal{A}$, потребованного в теореме 7.) Рассмотрим путь в пространстве гиперплоскостей, состоящих из касательных к $\mathcal{A}$ в точках этого пути. Сдвинем чуть-чуть весь этот путь в множество плоскостей общего положения, так чтобы

- 1) для каждой точки этого сдвинутого пути была определена исчезающая луночка, связанная с точкой касания соответствующей несдвинутой плоскости, и
- 2) этот путь соединял бы плоскость $\tilde{X}$ с плоскостью, имеющей вещественные координаты и отсекающей маленькую вещественную луночку вблизи точки ξ' .

Теперь петли, накручивающие любое количество ветвей продолжения функции объема последней луночки, строятся из этого пути и из рассмотренных выше петель, расположенных вблизи точки параболичности.

7.2. Типичные ребра возврата

На невырожденных поверхностях второго порядка параболических точек не бывает; в частности, для эллипсоидов наше препятствие пусто. А вот на всех гладких поверхностях более высокой степени параболические точки обязательно есть, и наука даже умеет оценивать некоторые геометрические свойства множества таких точек. Например, если мы рассматриваем гладкую поверхность степени d в проективном пространстве $\mathbb{C}P^3$, то параболические точки на ней образуют какой-то набор (комплексных же) кривых. Плоскость общего положения в $\mathbb{C}P^3$ пересекает эти кривые в отдельных точках; так вот, этих точек будет ровно $4d(d-2)$.

Достаточно ли этого для доказательства основной гипотезы этого параграфа? Нет, причем по целым трем причинам. Во-первых, препятствием являются только конечнократные параболические точки. Во-вторых, эти препятствующие точки должны лежать не где угодно в $\mathbb{C}P^n$, а в его «конечной» области $\mathbb{C}^n$, бесконечно же удаленные точки не считаются. Наконец, простая теорема из алгебраической геометрии говорит лишь, что параболические точки обязательно есть на поверхностях, гладких во всем комплексном пространстве $\mathbb{C}P^n$, а у нас в условии задачи требуется гладкость только вещественной части нашей поверхности $\mathcal{A}$.

С первыми двумя трудностями кое-как можно бороться. Например, оказывается, что если на поверхности есть не конечнократные параболические точки, то есть и точки негладкости, так что первая проблема как бы является подмножеством третьей. Аналогично, если алгебраическая гиперповерхность, степень которой больше двух, не имеет особых точек во всем $\mathbb{C}P^n$, то не может быть, чтобы все ее параболические точки поместились только в «бесконечно удаленной» плоскости проективного пространства. А нельзя ли обойти и третью проблему, доказав теорему посложнее: о том, что параболические точки должны быть на всяких поверхностях, даже не обязательно гладких?

К сожалению, нет. Легко построить алгебраическую поверхность, у которой нет ни одной параболической точки. Это делается при помощи *проективной двойственности*, которая определяется следующим образом. Множество всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}P^n$ (или, что то же самое, подпространств коразмерности 1 в $\mathbb{R}^{n+1}$) само является n -мерным проективным пространством. Действительно, каждое такое подпространство можно задать как множество нулей какой-то линейной функции в $\mathbb{R}^{n+1}$. Эти функции определены с точностью до умножения на константу, следовательно, они образуют прямую в двойственном пространстве всех линейных функций на $\mathbb{R}^{n+1}$.

Если в $\mathbb{R}P^n$ задана гиперповерхность $\mathcal{A}$, то проективная двойственность отображает ее в двойственное проективное пространство, а именно, сопоставляет каждой точке из $\mathcal{A}$ касательную плоскость в этой точке. Образ этого отображения называется *двойственной гиперповерхностью*. Мы уже имели дело с такой поверхностью в п. 6.9: именно она образует «стенки», разделяющие разные области, состоящие из типичных гиперплоскостей.

Слово «двойственность» здесь объясняется тем, что эта операция *инволютивна*: за исключением совсем вырожденных примеров, применив ее дважды, мы получим исходную поверхность.

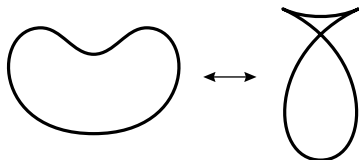


Рис. 36. Проективно двойственные кривые

При $n = 2$ эта двойственность переводит выпуклые кривые в выпуклые, а точки перегиба — в *каспы*, т.е. в точки, вблизи которых полученная кривая выглядит примерно как полукубическая парабола $\{x^3 = y^2\}$. Точки самопересечения кривой соответствуют *бикасательным* ее двойственной кривой.

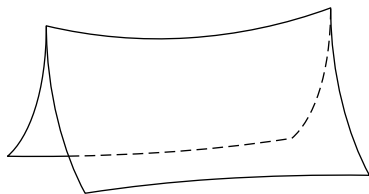


Рис. 37. Ребро возврата

При $n = 3$ эллиптические точки переходят в эллиптические, гиперболические в гиперболические, а типичным параболическим точкам исходной поверхности соответствуют *ребра возврата* двойственной, см. рис. 37. Вблизи этих ребер двойственная поверхность устроена примерно как прямое произведение полукубической параболы на прямую, так что точки негладкости составляют целую кривую.

Эта операция непосредственно переносится на случай комплексных гиперповерхностей в $\mathbb{CP}^n$.

Теперь возьмем в двойственном пространстве $\mathbb{CP}^n$ произвольную гладкую гиперповерхность и определим $\mathcal{A}$ как проективно двойственную к ней. Тогда на $\mathcal{A}$ не будет параболических точек: ведь при двойственности параболические точки соответствуют ребрам возврата, которых не было.

Итак, для таких поверхностей $\mathcal{A}$ наше препятствие не работает. Значит ли это, что такая поверхность интегрируема? Не обязательно: ведь зато у такой поверхности $\mathcal{A}$ есть ребра возврата или другие похожие особенности (произошедшие из параболических точек двойственной поверхности). И есть теорема (см. [11]), что *типичные* ребра возврата поверхности $\mathcal{A}$ также препятствуют ее алгебраической интегрируемости. «Типичность» здесь означает некоторое условие искривленности множества точек заострения: например, при $n=3$ оно состоит просто в том, что эти точки не лежат на одной прямой. Есть и другие препятствия к алгебраической интегрируемости, т. е. классы особых точек поверхности, присутствие которых приводит к слишком сложному ветвлению продолжения функции объема; см. [11].

Теоремы такого типа доказываются с помощью современного обобщения теории Пикара—Лефшеца, позволяющего работать с сечениями не только гладких поверхностей.

Итак, для того, чтобы гиперповерхность в нечетномерном пространстве была алгебраически интегрируема, необходимо (но может быть недостаточно), чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) эта гиперповерхность задана уравнением с вещественными коэффициентами, и ее пересечение с $\mathbb{R}^n$ имеет гладкую компоненту;
- 2) все ее параболические точки (в том числе и не вещественные), если они есть, либо лежат на бесконечно удаленной плоскости, либо бесконечнократны;
- 3) все ребра возврата, если они есть, нетипичны;
- 4) ее особые точки и бесконечнократные параболические точки не доставляют новых препятствий к интегрируемости.

7.3. Пример

Оказывается, такие поверхности существуют! А именно, это уже знакомые нам трубчатые окрестности четномерных сфер — но теперь уже в нечетномерных пространствах.

Пусть n — нечетное число, большее единицы, m — положительное четное, а ε — достаточно малое положительное число. Рассмотрим в $\mathbb{C}^{n+m}$ поверхность, заданную уравнением

$$(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} - 1)^2 + y_1^2 + \dots + y_m^2 = \varepsilon^2. \quad (28)$$

Ее пересечение с $\mathbb{R}^{n+m}$ ограничивает ε -окрестность $(n-1)$ -мерной единичной сферы координатного подпространства $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Множество ее параболических точек задается системой уравнений $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ и $y_1^2 + \dots + y_m^2 = \varepsilon^2$. Оно разделяет вещественную поверхность на две части, в которых вторая квадратичная форма имеет сигнатуры $(n+m-1, 0)$ и $(n-1, m)$. Все эти параболические точки не являются конечнократными. Действительно, возьмем произвольную гиперплоскость L в пространстве $\mathbb{R}^m$, касательную к сфере $\{y_1^2 + \dots + y_m^2 = \varepsilon^2\}$, тогда гиперплоскость $\mathbb{R}^n \times L$ в $\mathbb{R}^{n+m}$ будет касаться поверхности (28) в бесконечном числе точек.

Кроме того, эта поверхность имеет особые точки в комплексной области.

В качестве типичной линейной функции в $\mathbb{R}^{n+m}$ удобно взять функцию $x_1 + y_1$. Ее ограничение на поверхность (28) имеет четыре вещественные критические точки индексов $0, m, n-1$ и $n+m-1$. Оказывается (но доказательство этого мы приводить здесь не будем), что в этом случае верны следующие факты (см. [16]).

1. Группа $H_{n+m}(\mathbb{C}^{n+m}, \mathcal{A} \cup X)$ изоморфна $\mathbb{Z}^6$ для любой гиперплоскости X общего положения в $\mathbb{C}^{n+m}$ (например, для гиперплоскости X_0 , заданной уравнением $x_1 + y_1 = 0$).

2. Подгруппа этой группы, порожденная теми относительными циклами, граница которых не содержит особых точек поверхности $\mathcal{A}$, изоморфна $\mathbb{Z}^4$; в случае гиперплоскости X_0 она порождена четырьмя исчезающими луночками, связанными с вещественными критическими точками ограничения функции $x_1 + y_1$ на $\mathcal{A}$ (конечно, область пространства, отсекаемая плоскостью от тела, принадлежит этой подгруппе).

3. Фундаментальная группа пространства всех гиперплоскостей в $\mathbb{C}^{n+m}$, находящихся в общем положении к поверхности $\mathcal{A}$, действует на этой подгруппе $\mathbb{Z}^4$ следующим образом: имеется две петли, одна из которых переставляет четыре базисных элемента этой группы по правилу $\begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix}$, а другая — по правилу $\begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix}$; действие же всех остальных петель сводится к этим и их композициям.

Из этого следует, что продолжение функции объема во все точки множества типичных комплексных гиперплоскостей в каждой точке этого множества принимает только конечное число значений. Это само по себе не означает, что это продолжение является ал-

гебраической функцией (хотя последнее крайне вероятно), но по крайней мере показывает, что топологическое препятствие, с помощью которого мы выше доказывали неалгебраичность, в этом случае отсутствует.

Список литературы

- [1] В. Б. Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: МЦНМО, 2017.
- [2] В. И. Арнольд. Второй закон Кеплера и топология абелевых интегралов // Квант. 1987. № 12. С. 17–21.
- [3] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989; URSS, 2017.
- [4] Задачи Арнольда. М.: ФАЗИС, 2000. Задачи 1987-14, 1988-13 и 1990-27.
- [5] В. И. Арнольд. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: МЦНМО, 2013.
- [6] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009.
- [7] V. I. Arnold, V. A. Vassiliev. Newton's Principia read 300 years later // Notices Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 36. № 9. P. 1148–1154.
- [8] В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко. Особенности. II. Классификация и приложения. М.: ВИНТИ, 1989. (Динамические системы — 8. Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», 39).
- [9] Р. Ботт, Л. В. Ту. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.: Платон, 1997.
- [10] H. Brougham, E. J. Routh. Analytical View of Sir Isaac Newton's Principia. London, 1855.
- [11] В. А. Васильев. Ветвящиеся интегралы. М.: МЦНМО, 2000.
- [12] В. А. Васильев. Ветвящиеся интегралы и теории Пикара—Лефшеца // Глобус: Общоматематический семинар. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2004. С. 22–58.
- [13] V. A. Vassiliev. Newton's lemma XXVIII on integrable ovals in higher dimensions and reflection groups // Bull. London Math. Soc. 2015. Vol. 47. № 2. P. 290–300; Preprint arXiv:1407.7221.
- [14] V. A. Vassiliev. Lacunas and local algebraicity of volume functions // J. Singul. 2018. Vol. 18. P. 350–357; Preprint arXiv:1803.07829.
- [15] В. А. Васильев. Топология для младшекурсников. М.: МЦНМО, 2019.
- [16] V. A. Vassiliev. Algebroidally integrable bodies // Arnold Math. J. 2020. Vol. 6. № 2. P. 291–309; Preprint arXiv:2003.04665.
- [17] Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. Наука, 1981; URSS, 2020.

- [18] С. М. Гусейн-Заде. Группы монодромии изолированных особенностей гиперповерхностей // УМН. 1977. Т. 32, № 2. С. 23–65.
- [19] А. М. Давыдова. Достаточное условие отсутствия лакуны для дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа. Дисс. ... к. ф.-м. н. МГУ, 1945, 43 с.
- [20] М. Е. Казарян. Введение в теорию гомологий. М.: МИАН, 2006.
- [21] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
- [22] I. Newton. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. London, 1687. Русский перевод: Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии / Перевод с латинского и комментарий А. Н. Крылова. М.: Наука, 1989.
- [23] I. Petrowsky. On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations // Матем. сборник. 1945. Т. 17(59), № 3. С. 289–370.
- [24] Е. Ю. Смирнов. Группы отражений и правильные многогранники. М.: МЦНМО, 2018.
- [25] В. М. Тихомиров. Великие математики прошлого и их великие теоремы. М.: МЦНМО, 2019.

Учебное издание для вузов

Виктор Анатольевич Васильев

ВЕТВЯЩИЕСЯ ОБЪЁМЫ И ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Подписано в печать 30.11.2020 г. Формат 60×90^{1/16}. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 6,5. Тираж 1000. Заказ .

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89. E-mail: mittelpress@mail.ru

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru
