В. Ю. Протасов

СИНУСОИДА И ФРАКТАЛ

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2016

В. Ю. Протасов

Синусоида и фрактал

Элементы теории обработки сигналов и теории всплесков

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2021

УДК 517.5
ББК 22.161.5
П83

Протасов В. Ю.
Синусоида и фрактал: Элементы теории обработки сигналов и теории всплесков
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2021
120 с.
ISBN 978-5-4439-3471-6

Книга представляет собой элементарное изложение теории обработки сигналов и теории всплесков, созданное на основе курсов, прочитанных автором на летней школе «Современная математика» в Дубне (2015, 2016), в Университете Иннополис (2017) и в Gran Sasso Science Institute (Италия, 2015, 2016). Она рассчитана на студентов 1—2 курсов и на подготовленных старшеклассников.

Подготовлено на основе книги:
Протасов В. Ю. Синусоида и фрактал: Элементы теории обработки сигналов и теории всплесков. — М.: МЦНМО, 2020. —
ISBN 978-5-4439-1471-8.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3471-6

© Протасов В. Ю., 2021.
© МЦНМО, 2021.

Оглавление

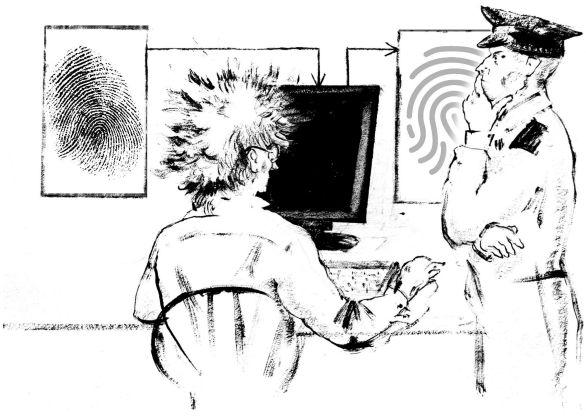
1. Зачем обрабатывать сигналы? 5
   1.1. Непрерывное и дискретное 6
   1.2. Приближения гладких сигналов 8
2. Метод Фурье 16
   2.1. Ряды Фурье 16
   2.2. Гильбертово пространство 19
   2.3. Как хранить дискретные сигналы? 25
   2.4. Дискретное преобразование Фурье 30
   2.5. Как это работает на гладких сигналах 32
   2.6. Быстрое преобразование Фурье 34
   2.7. Непреодолимый недостаток метода Фурье 37
   Упражнения 38
3. Начала всплесков. Система Хаара 41
   3.1. Что такое локализованная функция 41
   3.2. Система Хаара на отрезке 42
   3.3. Приближения функций системой Хаара. Эффект насыщаемости 46
   3.4. Дискретный базис Хаара 48
   3.5. Быстрое вейвлет-преобразование, или Каскадный алгоритм 51
   3.6. Всплески Хаара на прямой 54
   3.7. Достоинства и недостатки системы Хаара: что сохранить и с чем бороться? 54
   3.8. Двоичная структура. Кратномасштабный анализ (КМА). Всплески 56
   Упражнения 60
4. Уходим в частотную область. Система Шеннона—Котельникова 62
   4.1. Преобразование Фурье 62
   4.2. Формула старой пластинки 64
   4.3. Всплески Шеннона—Котельникова 69
   Упражнения 73
5. Всплески Мейера 74
   5.1. Временно-частотная локализация 74
   5.2. Конструкция всплесков Мейера 75
   Упражнения 82

6. Всплески с компактным носителем 83
6.1. Алгоритм построения КМА 83
6.2. Полиномиальное уравнение 87
6.3. Формула-обманка 90
Упражнения 93
7. Фракталы и всплески 94
7.1. Фракталы и самоподобные функции 94
7.2. Фрактальные кривые 101
7.3. Построение всплесков как фрактальных кривых 104
Упражнения 108
8. Всплески Добеши 110
8.1. Построение всплесков Добеши 110
8.2. Шкала регулярности всплесков Добеши 113
Заключение 118
Литература 119

1. Зачем обрабатывать сигналы?

Каждый раз, когда мы работаем на компьютере или говорим по мобильному телефону, мы запускаем мощные механизмы обработки и хранения сигналов. Механизмы эти основаны на достижениях современной математики — теории функций, оптимизации, теории алгоритмов и еще десятка других областей. Какие-то из них родились в позапрошлом веке, другие (их большинство) — буквально вчера. Теория обработки и хранения сигналов (signal processing) является одним из наиболее востребованных направлений математики.

Любой сигнал, будь то звук, изображение или другая функция, почти никогда не хранится в компьютере по точкам. Это дорого и неэффективно. Сигнал раскладывается в сумму других, «базовых» функций, и хранятся его коэффициенты разложения. Главный вопрос — какую систему базовых функций использовать? И как построить хорошую систему, чтобы сигнал быстро и качественно воспроизводился и при этом занимал мало памяти? За это отвечает красивая математическая теория. В течение десятилетий базовыми функциями были целые сжатия синуса и косинуса, что естественно, учитывая природу звука. Это ряды Фурье, изобретенные более 200 лет назад. Однако к середине XX века стало ясно, что они не отвечают современным запросам. Поиск новых конструкций, превосходящих ряды Фурье, оказался непростой задачей. Над



этим трудилось не одно поколение математиков: функции Хаара, система Шеннона—Котельникова, всплески Мейера и Добеши и т. д. Новые функции уже не задаются явными формулами, а строятся как решения специальных уравнений. Они не являются гладкими, а, напротив, имеют свойства фракталов и самоподобных фигур. Сейчас они используются повсеместно при работе с фотографиями, аудио- и видеофайлами, в компьютерной томографии и т. д. — и даже в криминалистике, при обработке отпечатков пальцев[1]! Но математическая теория не стоит на месте.

Данный курс является введением в современную теорию обработки сигналов. Не во всю, а только в ее «функциональную» составляющую. Мы построим и исследуем различные базисные системы — от систем Фурье до всплесков.

Автор постарался сделать курс доступным младшим студентам, поэтому мы будем избегать понятий, которые не проходятся на 1—2 курсах математических отделений университетов. Мы не употребляем интеграл Лебега и не пользуемся символикой и строгим определением пространств L_2, ограничиваясь интуитивным понятием гильбертова пространства, а также не обосновываем сходимость некоторых интегралов, в частности преобразования Фурье. Более подготовленный читатель легко экстраполирует материал на свой уровень и подтвердит, что весь курс написан без потери математической строгости.

Автор глубоко признателен Н. Н. Андрееву, В. А. Клепцыну, Г. А. Мерзону, М. А. Раскину, Н. Гульельми и Х. М. Домингесу-Бегинесу за помощь в публикации этого курса, за внимательное чтение и массу ценных замечаний. Художественные иллюстрации выполнены М. К. Кашиным.

1.1. Непрерывное и дискретное

Любую функцию будем называть сигналом. Функцию будем обозначать $f(t)$, а переменную t будем всегда считать принадлежащей отрезку $[0, 1]$. Таким образом, $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Конечно, непрерывные сигналы в памяти компьютера не хранятся, а хранятся их дискретные значения на какой-нибудь сетке,

[1]Началось это, кстати, еще в прошлом веке, когда этим занялось ФБР [2, p. 24—25]: отсканированный набор отпечатков занимал порядка 10 мегабайт — размер, малопригодный к передаче по тогдашним модемам. Применение кодирования с помощью всплесков позволило уменьшить размер в 20 раз, до ~ 500 килобайт.

т. е. в конечном множестве точек. Пусть это будут N точек $t_0, \ldots, t_{N-1}$. Чаще всего используют равномерную сетку: $0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$, хотя в некоторых задачах лучше работают другие сетки. Мы будем иметь дело только с равномерной: $t_k = \frac{k}{N}$, $k = 0, \ldots, N-1$. Заметим, что мы начинаем всегда с точки $t_0 = 0$, а заканчиваем не в точке 1, а чуть раньше, в точке $t_{N-1} = \frac{N-1}{N}$. Так делать удобнее, а почему, понятно станет потом.

Таким образом, берется сетка из N точек $t_k = \frac{k}{N}$, $k = 0, \ldots, N-1$. Каждой функции $f(t)$ поставим в соответствие числа $x(k) = f\left(\frac{k}{N}\right)$, $k = 0, \ldots, N-1$. Этот набор из N чисел можно понимать как вектор в N-мерном пространстве: $x = (x(0), \ldots, x(N-1)) \in \mathbb{R}^N$.

Итак, непрерывный сигнал — это функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, а дискретный — это вектор $x \in \mathbb{R}^N$. Из непрерывного сигнала f получается дискретный по его значениям в узлах сетки: $x(k) = f\left(\frac{k}{N}\right)$, $k = 0, \ldots, N-1$.

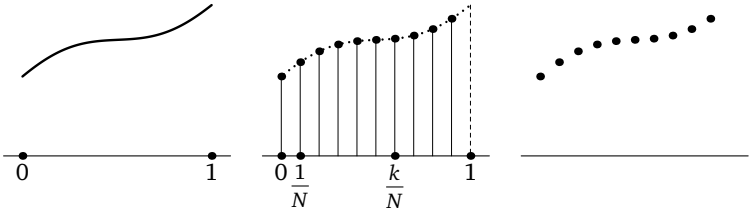


Рис. 1. Слева — непрерывный сигнал $f(t)$, $t \in [0, 1]$; в центре — его дискретизация $x(k) = f\left(\frac{k}{N}\right)$; справа — дискретизованный сигнал $x(k)$

Переходя от непрерывных сигналов к дискретным, т. е. от функций к векторам, и обратно, мы сможем понять свойства сигналов и предложить способы их хранения и передачи.

Для хранения качественного аудио- или видеосигнала, скажем фотографии, требуется число значений N порядка 10^6—10^8. Например, фото среднего качества — это 1 мегапиксель (Мп), т. е. 1 миллион пикселей. В каждом пикселе нужно хранить несколько чисел — яркость данной точки, ее цвет (определяющийся яркостью трех составляющих его цветов). Так что, округляя, будем считать, что нам нужно $N = 10^7$ чисел. С пространством столь огромного числа измерений приходится иметь дело. Подчеркнем, что речь

идет о неподвижном изображении. Видеопоток содержит на порядки больше байтов.

Прикинем, сколько места потребуется для хранения 1 Мп. Будем считать, что для каждого числа нужно 10 цифр в двоичной системе счисления, т. е. числа хранятся с точностью до $\frac{1}{1000}$. Тогда получается 10^8 бит, или примерно 10^7 байт, т. е. 10 Мб. Не много ли для одного фото среднего качества? Конечно, изображение надо упаковать и сжать. Раз в десять. Тогда фото будет весить 1 Мб, что вполне приемлемо. Но что значит «упаковать» и «сжать»? Это означает по-другому разместить, уложить более экономно. Для этого существуют разные подходы, например архивация. Но их часто бывает недостаточно. Как можно разместить, пусть даже экономно, 10 Мб информации на пространстве в 1 Мб? Это все равно, что пытаться засунуть 10 кубометров груза в багажник машины объемом в 1 кубометр. Как ни упаковывай, все равно не влезет. Поэтому, когда мы говорим про хранение сигнала, термины «упаковать» и «сжать» не всегда точно отражают реальность. Сигнал надо уменьшить, выбросить 90 % входящих в него чисел. И сделать это без потери (а иногда и с улучшением) качества. Как такое возможно, нам и предстоит разобраться.

1.2. Приближения гладких сигналов

Если бы мы хранили все возможные сигналы $x \in \mathbb{R}^N$, меньшим количеством чисел мы бы, конечно, не обошлись. Главная хитрость заключается в том, что все сигналы хранить не нужно. Все звуки, изображения, физические процессы и другие сигналы, взятые из жизни, обладают некоторой регулярностью. Это значит, что они не могут слишком резко меняться. А хранить плавно меняющиеся сигналы можно, используя значительно меньше места.

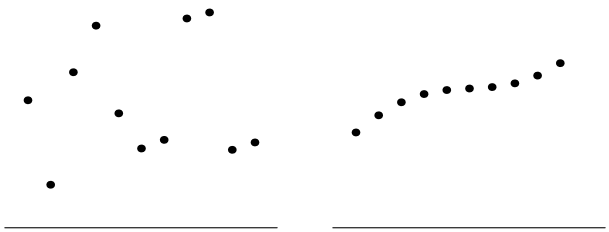


Рис. 2. Сигналы: хаотичный (слева) и регулярный (справа)

Для того чтобы строго сформулировать сказанное, мы перейдем от дискретных сигналов обратно к непрерывным, т. е. к функциям. Если значения $x(k)$ меняются плавно с изменением k, то функция f должна быть непрерывна. На самом деле даже непрерывности недостаточно, и мы потребуем, чтобы она обладала более сильным свойством.

Определение 1. Функция называется *липшицевой*, если существует такая положительная константа L, что для любых точек $t_1, t_2 \in [0, 1]$ выполнено неравенство $|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|$.

Таким образом, расстояние между значениями функции в любых двух точках не более чем в L раз превосходит расстояние между точками. Липшицеву функцию с константой L будем для краткости называть L-липшицевой[1]. Для множеств гладких функций мы используем стандартные обозначения: функция f принадлежит классу $C^k[a, b]$, если она k раз дифференцируема и ее производная $f^{(k)}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. При этом мы считаем, что $C^0 = C$ — класс непрерывных функций. Так же определяется класс $C^k(\mathbb{R})$. Класс $C^{(\infty)}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, т. е. функций, у которых существуют производные всех порядков.

Легко доказывается (с использованием теоремы о среднем), что если у функции $f \in C^1$ норма производной не превосходит константы L: $\|f'\| \leqslant L$, то f является липшицевой с константой L. Поэтому любая функция из класса $C^1[a, b]$, а значит, и из $C^k[a, b]$ при любом $k \geqslant 1$ липшицева. То же верно и для периодических функций на всей прямой $\mathbb{R}$. Вывод, к которому мы пришли, кратко запишем так.

Все функции класса C^k, $k \geqslant 1$ (на отрезке или периодические на $\mathbb{R}$), липшицевы.

Поэтому все, что верно для липшицевых функций, верно и для всех функций из C^k при всех $k \geqslant 1$. Если функция f липшицева, то соответствующий функции вектор $x(k) = f\left(\frac{k}{N}\right)$ также будем называть L-липшицевым. Он определяется свойством $|x(k+1) - x(k)| \leqslant \frac{L}{N}$ для всех $k = 0, \ldots, N-2$. Таким образом, соседние компоненты вектора x отличаются не более чем на число $\frac{L}{N}$. Много ли N-мерных липшицевых векторов? Чтобы дать определенный ответ, надо ограничить множество векторов. Поэтому мы рассмотрим множество векторов, координаты которых неотрицательны и не превосходят 1.

[1] Рудольф Липшиц (Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832—1903) — немецкий математик. Был учителем знаменитого Феликса Клейна. Потомкам известен главным образом по названию класса функций.

Все такие векторы образуют N-мерный куб со стороной 1. Мы будем обозначать этот куб I_N, а иногда просто I. Его объем, конечно же, равен 1. Возьмем для определенности $L = 1$ и построим явно множество всех 1-липшицевых векторов, лежащих в этом кубе. Обозначим через Λ_N множество всех 1-липшицевых векторов, у которых $x(0) \in [0, 1]$. Его пересечение с кубом I_N и будет множеством, которое нас интересует. Чему равен объем множества Λ_N? Начнем с малых N.

$\boldsymbol{N = 1}$. В этом случае $\Lambda_1 = [0, 1]$, $\operatorname{Vol} \Lambda_1 = 1$.

$\boldsymbol{N = 2}$. Имеем

$$\Lambda_2 = \left\{ (x(0), x(1)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x(0) \leqslant 1, -\frac{1}{2} \leqslant x(1) - x(0) \leqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

Таким образом, Λ_2 — параллелограмм с вершинами

$$\left(0, -\frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}\right).$$

Его объем $\operatorname{Vol} \Lambda_2$ равен 1.

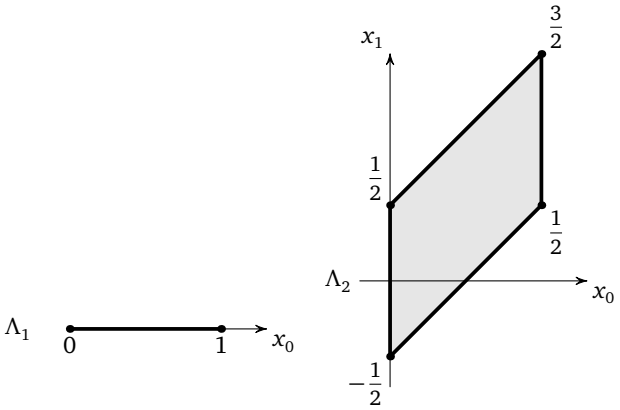


Рис. 3. Множество липшицевых сигналов для $N = 1, 2$

$\boldsymbol{N = 3}$. Имеем

$$\Lambda_3 = \left\{ (x(0), x(1), x(2)) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x(0) \leqslant 1, -\frac{1}{3} \leqslant x(1) - x(0) \leqslant \frac{1}{3}, \right.$$
$$\left. -\frac{1}{3} \leqslant x(2) - x(1) \leqslant \frac{1}{3} \right\}.$$

Тогда Λ_3 — параллелепипед с вершинами

$$\left(0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right), \left(0, \frac{1}{3}, 0\right), \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$
$$\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(1, \frac{2}{3}, 1\right), \left(1, \frac{4}{3}, 1\right), \left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Его объем $\operatorname{Vol} \Lambda_3$ равен $\frac{4}{9}$.

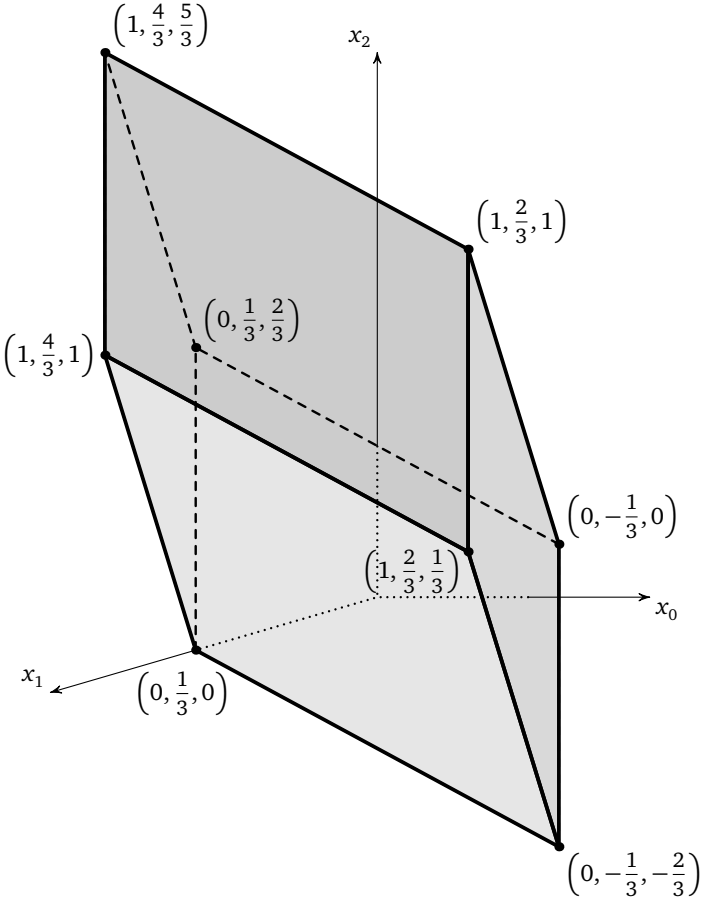


Рис. 4. Множество липшицевых сигналов для $N = 3$

Таким образом, Λ_N — параллелепипед, который строится по индукции: сначала берется одномерный параллелепипед — отрезок

$[0, 1]$, затем двумерный: каждой вершине a отрезка (где a — это 0 или 1) ставятся в соответствие две вершины нового параллелепипеда $\left(a, a - \frac{1}{N}\right)$ и $\left(a, a + \frac{1}{N}\right)$ и т. д. На последнем шаге каждая вершина $(N-1)$-мерного параллелепипеда $(a_0, \ldots, a_{N-2})$ порождает две вершины $\left(a_0, \ldots, a_{N-2}, a_{N-2} - \frac{1}{N}\right)$ и $\left(a_0, \ldots, a_{N-2}, a_{N-2} + \frac{1}{N}\right)$ параллелепипеда Λ_N. Объем параллелепипеда Λ_N легче всего найти, используя известный принцип.

Принцип Кавальери. *Если два N-мерных тела таковы, что любая прямая, параллельная заданной прямой, пересекает их по отрезкам одинаковой длины, то эти тела имеют равный объем.*

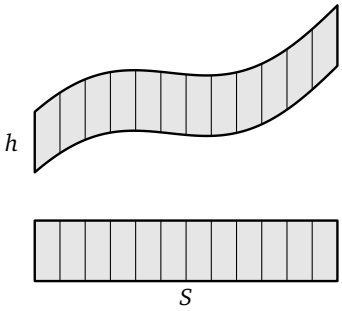


Рис. 5. Принцип Кавальери: $\mathrm{Vol} = S \cdot h$

Мы применим принцип Кавальери к параллелепипеду Λ_N и к N-мерному параллелепипеду с основанием, равным проекции Λ_N на плоскость первых $N-1$ координат, и боковым ребром, равным $\frac{2}{N}$ и перпендикулярным основанию. Ясно, что объем второго параллелепипеда равен $(N-1)$-мерному объему основания, умноженному на $\frac{2}{N}$. Любая прямая, параллельная боковому ребру и пересекающая параллелепипед, пересекает его по отрезку длины $\frac{2}{N}$. С другой стороны, эта прямая пересекает Λ_N также по отрезку длины $\frac{2}{N}$. В самом деле, если $(a_0, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$ — любая точка параллелепипеда Λ_N, то прямая $\{(a_0, \ldots, a_{N-2}, t) \in \mathbb{R}^N \mid t \in \mathbb{R}\}$ пересекает Λ_N по отрезку с концами $\left(a_0, \ldots, a_{N-2}, a_{N-2} - \frac{1}{N}\right)$ и $\left(a_0, \ldots, a_{N-2}, a_{N-2} + \frac{1}{N}\right)$. Длина этого отрезка равна $\frac{2}{N}$. Следовательно, объем параллелепипеда Λ_N равен объему его проекции, умноженному на $\frac{2}{N}$. Отсюда по индукции заключаем, что при любом $j = 1, \ldots, N-1$ объем проекции мно-

жества Λ_N на первые j координат равен $\left(\frac{2}{N}\right)^j$ (естественно, имеется в виду j-мерный объем). При $j = N - 1$ получаем

$$\mathrm{Vol}(\Lambda_N) = \left(\frac{2}{N}\right)^{N-1}.$$

Итак, множество всех N-мерных векторов с координатами от 0 до 1 является единичным кубом I_N и имеет объем 1, в то время как множество 1-липшицевых векторов $I \cap \Lambda_N$ имеет объем, меньший чем $\mathrm{Vol}(\Lambda_N) = \left(\frac{2}{N}\right)^{N-1}$.

Уже при $N = 10$, как мы видим, 1-липшицевы векторы составляют примерно одну двухмиллионную объема всех векторов, а при $N = 20$ эта доля равна 10^{-19}. Напомним, что нас интересуют размерности больше $N = 10^6$, при которых этот мизерный объем уже невозможно представить. Мы пришли к главному выводу.

При больших N липшицевы сигналы составляют ничтожную часть от всех сигналов.

Поэтому можно ожидать, что для описания этой ничтожной части нужно гораздо меньше информации и меньше памяти. Математически это означает, что можно найти небольшое число сигналов (значительно меньшее, чем N), комбинациями которых можно приблизить любой липшицев сигнал. Тогда вместо того, чтобы хранить N координат вектора $x \in \mathbb{R}^N$, можно будет обойтись маленьким числом коэффициентов такой комбинации.

Остается только выбрать это небольшое множество сигналов, которыми можно приближать липшицевы сигналы. Задачей нахождения таких систем функций занимается специальная отрасль математики — *теория приближений*. Главный ее принцип: различные классы «хороших» функций (например, дифференцируемых, гладких, аналитических и т. д.) можно приближать с помощью небольшого числа специальных *базисных* функций. В качестве приближающих комбинаций, как правило, используются алгебраические многочлены (базисные функции $\{t^k\}_{k \geqslant 0}$) и тригонометрические многочлены (базисные функции $\{\sin 2\pi kx\}_{k \geqslant 1}$ и $\{\cos 2\pi kx\}_{k \geqslant 1}$). Сама возможность такого приближения уже нами осознана на примере липшицевых сигналов. Как мы видим, 1-липшицевы сигналы образуют параллелепипед очень малого объема в множестве всех сигналов. А дальше мы применяем следующий геометрический факт.

Выпуклое тело малого объема в $\mathbb{R}^N$ можно приблизить плоскостью меньшей размерности, причем чем меньше объем, тем лучше приближение.

Приблизить — значит провести плоскость так, чтобы она проходила рядом с каждой точкой выпуклого тела, т. е. расстояние от каждой точки тела до плоскости было мало. Плоскость можно задать, выбрав порождающую ее систему векторов — *базис*. Если размерность этой плоскости равна n (напомним, что $n < N$), то базис состоит из n векторов. Тогда каждую точку тела можно приближенно задать n числами — координатами близкой к ней точки плоскости. Так мы обходимся меньшим количеством чисел для описания точек N-мерного выпуклого тела.

Пример 1. Найти (приближенно) минимальное значение функции $f(x, y) = 2x^2 + 3y$ при условии

$$10000(x-y)^2 + (x+y)^2 \leqslant 4.$$

Решение. Множество пар чисел (x, y), удовлетворяющих этому неравенству, ограничено эллипсом, изображенным на рис. 6. Его центр находится в начале координат, а полуоси направлены в точки $(1, 1)$ и $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$. Его объем очень мал (он равен $\pi\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{100} = \frac{\pi}{50}$). Значит, его можно хорошо приблизить плоскостью меньшей размерности (в данном случае — приблизить прямой).

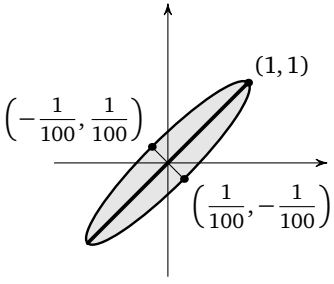


Рис. 6

В самом деле, приближающая прямая — биссектриса координатного угла. Расстояние от эллипса до этой прямой не превосходит ширины эллипса (т. е. длины его малой полуоси), равной $\frac{\sqrt{2}}{100}$, а сам эллипс практически совпадает с отрезком $\{(t, t) \mid t \in [-1, 1]\}$. Поэтому $f(x, y) \approx 2t^2 + 3t$ и минимум этой функции на отрезке $[-1, 1]$ равен $-\frac{9}{8}$. Приближенный ответ получен. Точный отличается от него меньше чем на 0,02.

В этом примере нам помогла картинка, на которой видно приближающую прямую. Если же размерность N большая, то мы не видим выпуклого тела. Мы лишь знаем, что у него маленький объем и, значит, его можно приблизить плоскостью. Как найти эту плоскость и как (что даже важнее!) выбрать в ней базис? Как, например, выбрать базис для приближений параллелепипеда 1-лишицевых векторов? Сколько в этом базисе должно быть элементов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, чтобы порожденная ими плоскость приближала параллелепипед с точностью, скажем, $\varepsilon = 0{,}01$?

2. Метод Фурье

Исторически первым и наиболее распространенным базисом для разложения функций является базис Фурье. Его главный недостаток состоит в том, что он рассчитан только на периодические функции. Однако если работать с конечными сигналами, то это не проблема, поскольку любую функцию на отрезке $[0, 1]$ можно воспринимать как часть периодической функции с периодом 1. Для изучения базиса Фурье нам понадобится на время вернуться от дискретных сигналов к непрерывным функциям и познакомиться с понятием гильбертова пространства.

2.1. Ряды Фурье

Перейдем обратно от векторов к функциям на отрезке $[0, 1]$. Расстояние между двумя функциями $\|f - g\|$ будем измерять в *равномерной норме* пространства $C[0, 1]$ непрерывных функций: $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$. Иногда мы будем ставить дополнительно знак бесконечности и обозначать эту норму $\|x\|_\infty$, чтобы отличать ее от *евклидовой* нормы $\|x\|_2 = \left(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2}$ в *гильбертовом пространстве* функций, о котором речь еще впереди.

Какой нужно взять базис $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, чтобы любую «хорошую» (например, гладкую или липшицеву) функцию f можно было с заданной точностью ε приблизить линейной комбинацией $\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые коэффициенты?

Ответ сначала был получен для периодических функций. Любую функцию f с периодом 1 можно приблизить линейной комбинацией функций $\{1, \sin 2\pi kt, \cos 2\pi kt\}_{k\in\mathbb{N}}$. Таким образом, в качестве базиса берутся всевозможные целые сжатия синуса и косинуса.

Теорема 1 (Д. Джексон[1], 1911). *Если 1-периодическая функция f принадлежит классу $C^r(\mathbb{R})$ для некоторого $r \geqslant 0$ и при этом $\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1$, то для любого n найдется линейная комбинация*

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos 2\pi kt + b_k \sin 2\pi kt, \tag{1}$$

[1]Данхем Джексон (Dunham Jackson, 1888—1946) — американский математик, один из основоположников теории приближений и теории рядов Фурье.

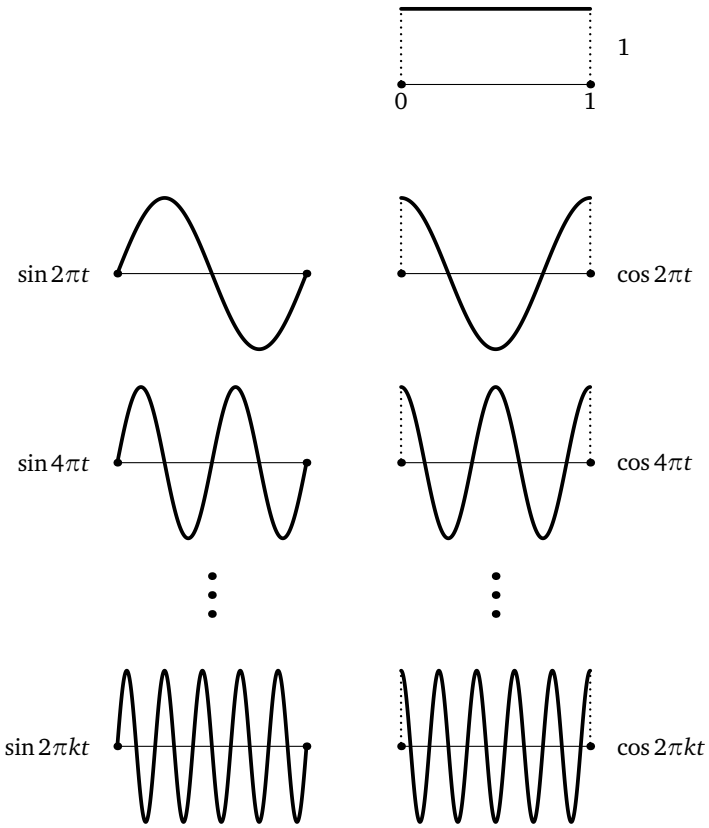


Рис. 7. Система Фурье

для которой

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{C(r)}{n^r}. \tag{2}$$

Здесь число $C(r)$ не зависит от функции f.

Итак, если, например, $f \in C^3$ и $\|f^{(3)}\|_\infty \leqslant 1$, то уже при $n = 10$ мы получаем приближение с точностью порядка 0,001. Значит, для приближения C^3-функции с точностью до одной тысячной достаточно взять 21 слагаемое в сумме (1): 10 синусов и 11 косинусов (включая тождественную константу при $k = 0$), т. е. обойтись всего 21 числом! Конечно, столь гладкие сигналы встречаются не всегда, чаще приходится работать со случаем $r = 1$, который соответству-

ет липшицевым сигналам. Но и в этом случае для приближения с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ достаточно взять $n = 1000$, т. е. сумму (1) из 2001 слагаемых, что совсем немного.

Задача решена? Не совсем. А как найти эти 2001 коэффициентов a_k, b_k? Вот тут мы и подходим к главной проблеме. Дело в том, что теорема Джексона — это в чистом виде теорема существования, она не дает никакого конструктивного способа нахождения коэффициентов. Конечно, можно перейти к дискретным сигналам и тогда найти a_k, b_k из линейной системы уравнений. Однако на решение системы с несколькими тысячами переменных уйдет слишком много времени. Есть способ лучше, но для него нам придется понять геометрический смысл коэффициентов a_k и b_k. Этому посвящен следующий пункт.

Замечание 1. Неулучшаемые оценки на величину $C(r)$ известны, это константы Фавара [19]. Мы не приводим здесь их значений, для нас это не так важно.

Замечание 2. Теорему Джексона можно применить не только к периодическим функциям, но и к функциям, заданным на отрезке $[0, 1]$, поскольку их можно продолжить с периодом 1 на всю прямую. Надо только быть внимательным с гладкостью функции, которая при таком продолжении может уменьшиться. Из непрерывной функции f на отрезке $[0, 1]$ мы получим непрерывную периодическую функцию, если $f(0) = f(1)$. Аналогично C^r-периодическая функция получится в точности тогда, когда $f \in C^r[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$, …, $f^{(r)}(0) = f^{(r)}(1)$ (в концах отрезка равны значения функции и значения всех производных до r-й). Ряды Фурье мы будем применять именно к таким сигналам.

Изобретение рядов Фурье. Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830) — руководитель кафедры анализа и механики Политехнической школы в Париже (Ecole Polytechnique), сменивший на этом посту Лагранжа. Как было нередко в те времена, Фурье успешно совмещал научную работу с государственной деятельностью. Так, в 1798 году он был приглашен Наполеоном для участия в Египетском походе.

Раскладывать функцию в сумму бесконечного тригонометрического ряда Фурье предложил для решения уравнения теплопроводности. Это уравнение позволяет найти температуру физического тела в любой точке в зависимости от времени. Легенда гласит, что Фурье занялся данным уравнением при следующих обстоятельствах. В Египте среди множества практических задач он столкнулся с такой: найти глубину винного погреба, чтобы средняя температура там была такая же, как в аналогичных сооружениях во Франции. В условиях климата Египта вино нужно было хранить на другой глубине. Вопрос был важен для продовольственного снабжения армии, а решать его опытным путем не представлялось возможным, для этого нужны были долгие наблюдения.

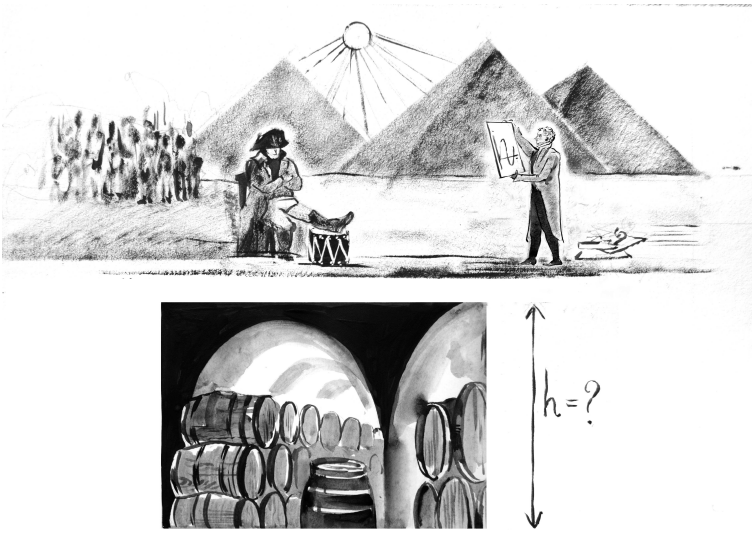


Рис. 8. Задача о винных погребах

Получилось уравнение теплопроводности для функции $f(t, x)$ — температуры на глубине x через время t. Как найти решение? И тут на помощь пришла гениальная догадка: температура — это периодическая функция с периодом в 365 дней! Ровно через год все повторяется! Следовательно, и искать решение надо среди периодических по переменной t функций. Запас известных периодических функций невелик: синус и косинус, а также их всевозможные целые сжатия. Фурье представил решение в виде суммы таких функций и получил то, что мы теперь называем рядом Фурье. Оставалось лишь подставить слагаемые ряда в уравнение и найти коэффициенты.

Правдива ли эта легенда, мы доподлинно не знаем. Главное, что Фурье представил свой метод 21 декабря 1807 года в докладе «О распространении тепла в твердом теле» на заседании Парижской академии наук. Доклад вызвал множество нареканий. Так, Лагранж и Лаплас указывали на необоснованность сходимости ряда (вопрос и в самом деле очень тонкий!) Окончательное обоснование метод Фурье получил лишь в XX веке. По сей день он остается основным для решения уравнения теплопроводности на конечном временно́м интервале.

2.2. Гильбертово пространство

Мы живем в евклидовом пространстве. Оно состоит из точек, или векторов, у которых три координаты. Любые два вектора x и y можно перемножить, получив число $(x, y) = \sum_i x_i y_i$. Это скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение в линейном пространстве определяется всего тремя свойствами: оно линейно по каждому из аргументов x и y, оно симметрично, т. е. $(x, y) = (y, x)$, и положительно определено, т. е. $(x, x) > 0$ для любого $x \neq 0$. Если в линейном пространстве есть скалярное произведение, обладающее этими тремя свойствами, то определено и все остальное: длина (норма) вектора $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, а значит, и расстояние между точками, а также угол между любыми двумя векторами:

$$\alpha = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Конечномерное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым*; $\mathbb{R}^N$ — это евклидово пространство размерности N. А бесконечномерное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым*. Функции на отрезке $[0, 1]$ образуют гильбертово пространство. Скалярное произведение функций определяется по формуле $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Оно обладает всеми тремя нужными свойствами (проверьте!). Норма

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2},$$

порожденная этим скалярным произведением, называется евклидовой. Часто мы будем опускать индекс 2, если ясно, о какой норме идет речь.

Итак, функции — это точки в гильбертовом пространстве. А раз так, между ними можно измерять расстояния, углы и т. д. Все расстояния вычисляются по евклидовой норме. Функции образуют свою геометрию! Прежде чем двигаться дальше, освоимся немного в этой геометрии.

Пример 2. Чему равен угол между функциями $f(t) = t$ и $g(t) = 2t$ (см. рис. 9)? Он равен нулю, поскольку $g = 2f$, т. е. векторы f и g сонаправлены. А на график смотреть не стоит, он здесь только отвлекает.

Пример 3. Чему равны углы и площадь треугольника fgh, где $f(t) = \sin 2\pi t$, $g(t) = \cos 2\pi t$, $h(t) = 0$?

Поскольку

$$\|f\|^2 = \int\limits_0^1 \sin^2 2\pi t\,dt = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{4\pi}\sin 4\pi t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

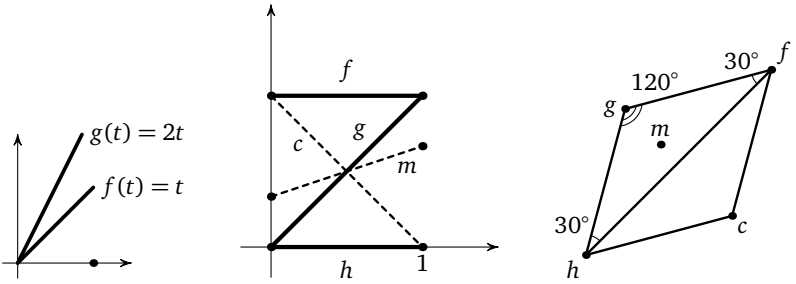


Рис. 9. Геометрия пространства функций

и аналогично $\|g\|^2 = \int\limits_0^1 \cos^2 2\pi t\, dt = \frac{1}{2}$, треугольник fgh равнобедренный с боковой стороной $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее,

$$(f, g) = \int\limits_0^1 \sin 2\pi t \cos 2\pi t\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \sin 4\pi t\, dt = 0,$$

поэтому угол fhg прямой. Итак, углы треугольника равны 90°, 45° и 45°, а его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$.

Пример 4. Найдем углы и замечательные точки треугольника fgh, где $f(t) = 1$, $g(t) = t$, $h(t) = 0$. Заметим, что функция $g(t) - h(t) = t$ переходит в функцию $f(t) - g(t) = 1 - t$ при замене переменной $t \mapsto 1 - t$. Следовательно, $\|f - g\|_2 = \|g - h\|_2$. Поэтому треугольник равнобедренный: стороны fg и gh равны. Косинус угла между основанием и боковой стороной равен

$$\frac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|} = \frac{\int\limits_0^1 t\, dt}{\left(\int\limits_0^1 1\, dt\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^1 t^2\, dt\right)^{1/2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, углы при основании равны 30°, следовательно, угол при вершине равен 120°. Точка, симметричная вершине относительно основания, является в этом треугольнике центром описанной окружности. Это точка $c(t) = 1 - t$, которая, как легко заметить, находится на тех же расстояниях от концов основания fh, что и вершина g. Точкой пересечения медиан, как обычно, является среднее арифметическое вершин, так что точка пересечения медиан — это

$m(t)=\frac{1}{3}(f+g+h)=\frac{t+1}{3}$. Найдем ортоцентр этого треугольника — точку $a(t)$. Геометрически легко показать, что в этом треугольнике вершина g делит пополам отрезок ac. Следовательно, $g=\frac{1}{2}(a+c)$, а значит, $t=\frac{1}{2}(a(t)+1-t)$. Таким образом, ортоцентр находится в точке $a(t)=3t-1$.

Итак, углы треугольника равны 30°, 30°, 120°, центр описанной окружности — $c(t)=1-t$, точка пересечения медиан — $m(t)=\frac{t+1}{3}$, а точка пересечения высот — $a(t)=3t-1$.

Посмотрим, как выглядит тригонометрическая система в гильбертовом пространстве. Так же как в примере 3, доказывается, что $\int\limits_0^1 \sin 2\pi kt \cos 2\pi nt\, dt=0$ для всех целых k, n, и аналогично интегралы $\int\limits_0^1 \sin 2\pi kt \sin 2\pi nt\, dt$ и $\int\limits_0^1 \cos 2\pi kt \cos 2\pi nt\, dt$ равны нулю, если $k\neq n$. Наконец,

$$\int\limits_0^1 \sin^2 2\pi kt\, dt=\int\limits_0^1 \frac{1-\cos 4\pi kt}{2}\, dt=\int\limits_0^1 \frac{1}{2}\, dt=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\|\sin 2\pi kt\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и аналогично $\|\cos 2\pi kt\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Наконец, при $k=0$ имеем $\sin 2\pi kt\equiv 0$, и эту функцию можно не учитывать, а $\cos 2\pi kt\equiv 1$, и поэтому $\|\cos 2\pi 0t\|=$ $=\left(\int\limits_0^1 1\, dt\right)^{1/2}=1$. Обозначим теперь

$$\begin{aligned} e_0&=1;\\ e_{2k-1}&=\sqrt{2}\sin 2\pi kt, \quad k\in\mathbb{N};\\ e_{2k}&=\sqrt{2}\cos 2\pi kt, \quad k\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3}$$

Мы получили систему векторов $\{e_j\}_{j\geqslant 0}$, которые ортогональны друг другу, а длина каждого вектора равна 1.

Определение 2. Семейство векторов (конечное или счетное) гильбертова пространства называется *ортонормированным*, если все векторы имеют единичную длину и ортогональны друг другу. Семейство является ортонормированным базисом, если оно полно, т. е. его линейные комбинации приближают любую точку пространства.

Построенное нами семейство $\{e_j\}_{j\geqslant 0}$ называется тригонометрическим базисом или базисом Фурье. Мы доказали, что это семейство ортонормированное. Из самого названия ясно, что это должен быть базис. Доказать это можно по той же теореме Джексона.

Здесь мы вновь перейдем от функций на отрезке $[0, 1]$ к периодическим функциям с периодом 1 (разницу мы объяснили в замечании 2). Поскольку $\int\limits_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \max\limits_{t\in[0,1]} f^2(t)$, получаем известное неравенство $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$, выполненное для любой функции f на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, неравенство в теореме Джексона выполнено и для нормы $\|\cdot\|_2$. Таким образом, любую непрерывную периодическую функцию можно сколь угодно точно приблизить линейными комбинациями тригонометрической системы, значит, эта система является базисом.

На самом деле она является базисом и без перехода к периодическим функциям, но этого мы обсуждать не будем.

Предложение 1. *Если $\{e_j\}_{j=0}^N$ — ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве, которая порождает плоскость V, а Sf — проекция произвольного вектора f на эту плоскость* (*см. рис.* 10)*, то*

$$Sf = \sum_{j=0}^{N} (f, e_j)e_j.$$

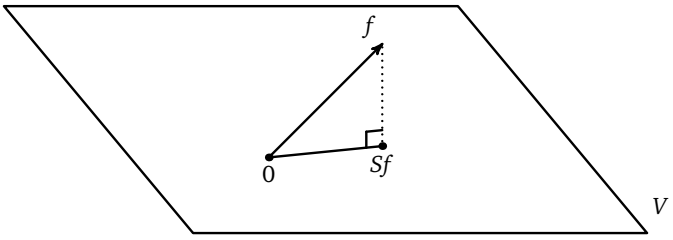


Рис. 10. Ортогональная проекция Sf

Доказательство. Вектор Sf лежит в плоскости V, значит, он является линейной комбинацией ее базисных векторов $e_0, \ldots, e_N$ с некоторыми коэффициентами: $Sf = \alpha_0 e_0 + \ldots + \alpha_N e_N$. С другой стороны, вектор $f - Sf$ должен быть перпендикулярен плоскости V, а значит, перпендикулярен каждому из базисных векторов. Следовательно, $(f - Sf, e_j) = 0$, т. е. $(f, e_j) = (Sf, e_j)$ для любого j. А теперь

подставим $Sf = \alpha_0 e_0 + \ldots + \alpha_N e_N$ и получим $(Sf, e_j) = \alpha_0(e_0, e_j) + \ldots$ $\ldots + \alpha_N(e_N, e_j)$. В этой сумме все слагаемые равны нулю, за исключением $\alpha_j(e_j, e_j) = \alpha_j$. Таким образом, $\alpha_j = (f, e_j)$ для всех $j = 0, \ldots, N$, откуда и следует формула. □

Вернемся к тригонометрическому базису $\{e_j\}_{j \geqslant 0}$, определенному равенством (3). Каждой непрерывной 1-периодической функции $f(t)$ можно сопоставить ее *ряд Фурье*:

$$f \sim \sum_{j=0}^{\infty} (f, e_j) e_j. \tag{4}$$

Мы специально не ставим здесь знак равенства, а ставим лишь значок соответствия, потому что ряд Фурье может не сходиться к функции f. В каких-то точках t сумма ряда Фурье может быть бесконечной или вовсе будет не определена. Но если рассматривать частичные суммы этого ряда, т. е. суммы конечного числа слагаемых, то этих сложностей не будет.

Обозначим через $S_n f$ сумму первых $2n + 1$ слагаемых ряда Фурье. Согласно предложению 1 эта сумма — проекция функции f (или вектора f гильбертова пространства) на подпространство V_n, порожденное функциями $e_0, \ldots, e_{2n}$, т. е. функциями

$$1, \ \sin 2\pi t, \ \cos 2\pi t, \ \ldots, \ \sin 2\pi n t, \ \cos 2\pi n t.$$

Любая линейная комбинация этих функций называется *тригонометрическим полиномом* степени n. Таким образом, V_n — пространство тригонометрических полиномов степени n, а S_n — оператор ортогональной проекции на это подпространство:

$$S_n f = \sum_{j=0}^{2n} (f, e_j) e_j. \tag{5}$$

Размерность пространства V_n равна $2n + 1$. Найти в этом пространстве ближайший к функции f элемент в норме $\|\cdot\|_\infty$ (для которого верно неравенство в теореме Джексона) — задача сложная. Как правило, точно этот ближайший тригонометрический полином найти невозможно, а можно лишь описать его свойства и найти численно.

А вот ближайший элемент в норме $\|\cdot\|_2$ найти легко — это точка $S_n f$, поскольку она является основанием перпендикуляра, опущенного из точки f. Но поскольку норма $\|\cdot\|_2$ не превосходит нормы $\|\cdot\|_\infty$, теорема Джексона верна и для евклидовой нормы, с той только разницей, что она уже перестает быть чистой теоремой существования («существует тригонометрический полином f_n, для

которого...»), а предъявляет ближайший элемент явно — это $S_n f$. В самом деле, поскольку $S_n f$ — ближайший к f элемент пространства V_n, получаем $\|S_n f - f\|_2 \leqslant \|f_n - f\|_2 \leqslant \|f_n - f\|_\infty$. Итак, мы установили следующий аналог теоремы Джексона для гильбертова пространства.

Теорема 2. *Если 1-периодическая функция f принадлежит классу $C^r(\mathbb{R})$ для некоторого $r \geqslant 0$ и при этом $\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1$, то*

$$\|S_n f - f\|_2 \leqslant \frac{C(r)}{n^r}. \tag{6}$$

Число $C(r)$ не зависит от функции f, а $S_n f$ — частичная сумма ряда Фурье, заданная формулой (5).

Коэффициенты Фурье легко вычисляются — это

$$(f, e_k) = \int_0^1 f(t) e_k(t)\, dt.$$

Вместо того чтобы хранить всю функцию f (например, значения на достаточно плотной сетке), можно разложить ее в ряд Фурье и взять необходимое число коэффициентов, остальные отбросить. Это число можно оценить по теореме Джексона, зная гладкость функции и необходимую нам точность приближения. Так, если $\varepsilon = 0{,}01$, то в случае $r = 1$ (1-липшицева функция с непрерывной производной) потребуется размерность порядка $n = 100$, т. е. 201 коэффициент Фурье. Таким образом, для хранения сигнала с весьма приличной точностью (расстояние 0,01 в евклидовой метрике) нужно хранить всего 201 число. А если $r = 3$, то хватит и вовсе $n = 5$, т. е. всего 11 коэффициентов!

2.3. Как хранить дискретные сигналы?

Итак, в базисе Фурье хорошо приближаются гладкие 1-периодические функции. Пространства $V_n = \{e_k\}_{k=0}^{2n}$, соответствующие частичным суммам ряда Фурье $S_n f = \sum\limits_{k=0}^{2n} (f, e_k) e_k$, являются именно теми конечномерными плоскостями, которые приближают выпуклое множество гладких функций в гильбертовом пространстве (см. п. 1.2). К тому же этот базис ортонормированный, поэтому коэффициенты разложения любой функции f по этому базису $f = \sum\limits_k a_k e_k$ легко вычисляются как $a_k = (f, e_k)$.

Конечно, тригонометрическая система — не единственная, которая хорошо приближает гладкие функции. Тем не менее она за-

рекомендовала себя как весьма удобная и вот уже более 200 лет верой и правдой служит человечеству[1]. Для того чтобы приближать с ее помощью дискретные сигналы, тригонометрические функции нужно «дискретизировать», т. е. заменить их на N-мерные векторы, сняв значения функций $\sin 2\pi kt$ и $\cos 2\pi kt$ на равномерной сетке с шагом $\frac{1}{N}$:

$$\sin 2\pi kt \sim \left(\sin \frac{2\pi k0}{N}, \ldots, \sin \frac{2\pi k(N-1)}{N}\right) \in \mathbb{R}^N;$$
$$\cos 2\pi kt \sim \left(\cos \frac{2\pi k0}{N}, \ldots, \cos \frac{2\pi k(N-1)}{N}\right) \in \mathbb{R}^N.$$

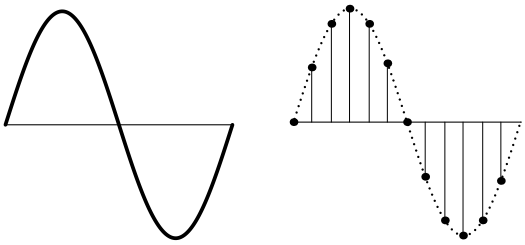


Рис. 11. Одна из базисных функций $f(t) = \sin 2\pi t$ и ее дискретизация $x(k) = \sin \frac{2\pi k}{N}$

Оказывается, полученная система векторов ортогональна в $\mathbb{R}^N$ и по ней можно раскладывать дискретные сигналы. Математически же гораздо удобнее перейти к комплексной записи тригонометрической системы.

Напомним, что любое комплексное число имеет вид $z = \alpha + \beta i$, где α, β — произвольная пара действительных чисел, а i — мнимая единица, $i^2 = -1$. Через $\bar{z} = \alpha - \beta i$ обозначаем сопряженное число, а через $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ — его модуль. Комплексной экспонентой называется число $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$. Если число чисто мнимое, то $\alpha = 0$, и тогда $e^{\beta i} = \cos\beta + i\sin b$. Таким образом, $e^{\beta i}$ — это точка на единичной окружности (тригонометрическом круге), соответствующая углу β. Например, $e^{\pi i} = -1$.

Так же определяется комплекснозначная функция $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [0, 1]$, где x, y — две обычные действительные функции.

[1]Точнее говоря, сознательно она используется как базис более 200 лет — но птолемеевские эпициклы, появившиеся почти две тысячи лет назад, тоже можно считать ее (неосознанным) применением.

Гильбертово пространство комплекснозначных функций определяется с помощью комплексного скалярного произведения

$$(z_1, z_2) = \int_0^1 z_1(t)\bar{z}_2(t)\, dt.$$

У этого пространства тоже есть тригонометрический базис, который имеет вид $\{e^{2\pi ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Это базис над полем комплексных чисел: это означает, что коэффициенты в линейных комбинациях могут быть не только действительными, но и комплексными. Этот базис ортонормированный. В самом деле, поскольку $\overline{e^{\beta i}} = e^{-\beta i}$, для любых целых чисел m, n имеем

$$(e^{2\pi imt}, e^{2\pi int}) = \int_0^1 e^{2\pi imt}e^{-2\pi int}\, dt = \int_0^1 e^{2\pi i(m-n)t}\, dt = \delta_{n,m}.$$

Последнее число $\delta_{n,m}$ — это *символ Кронекера*, он равен нулю, если $n \neq m$, и равен 1, если $n = m$. Таким образом, $(e^{2\pi imt}, e^{2\pi int}) = \delta_{n,m}$, следовательно, целые комплексные экспоненты образуют ортонормированный базис в пространстве комплекснозначных 1-периодических функций. Он тоже называется базисом Фурье. Фактически это тот же тригонометрический базис, только по-другому записанный. Как и для всякого ортонормированного базиса, для него верна формула разложения (4), теперь она запишется следующим образом:

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, e^{2\pi ikt})e^{2\pi ikt}, \tag{7}$$

а проекция на пространство V_n выглядит так:

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} (f, e^{2\pi ikt})e^{2\pi ikt}. \tag{8}$$

Все свойства ряда Фурье, в частности теорема Джексона для его частичных сумм $S_n f$, сохраняются. Теперь перейдем к его дискретному аналогу. Функции $e^{2\pi ikt}$ ставится в соответствие N-мерный вектор $(e^{2\pi ik\cdot 0/N}, \ldots, e^{2\pi ik(N-1)/N})$. Так как каждая координата — комплексное число с модулем, равным 1, длина этого вектора равна $\sqrt{N}$. Поэтому, чтобы получить ортонормированную систему, нам придется разделить этот вектор на $\sqrt{N}$. Далее, для базиса в $\mathbb{R}^N$ нужно ровно N векторов. Поэтому мы возьмем векторы с номерами $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Этого должно хватить. Итак, имеем семейство

векторов

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \frac{1}{\sqrt{N}}(1,\ 1 \qquad\qquad\qquad, \ldots, 1 \qquad\qquad\qquad);\\
E_1 &= \frac{1}{\sqrt{N}}(1,\ e^{2\pi i 1/N} \qquad\qquad, \ldots, e^{2\pi i (N-1)/N});\\
E_2 &= \frac{1}{\sqrt{N}}(1,\ e^{2\pi i 2\cdot 1/N} \qquad, \ldots, e^{2\pi i 2(N-1)/N});\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_k &= \frac{1}{\sqrt{N}}(1,\ e^{2\pi i k\cdot 1/N} \qquad, \ldots, e^{2\pi i k(N-1)/N});\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_{N-1} &= \frac{1}{\sqrt{N}}(1,\ e^{2\pi i (N-1)\cdot 1/N}, \ldots, e^{2\pi i (N-1)^2/N}).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Таким образом, у вектора $\sqrt{N}E_0$ все координаты равны 1, у вектора $\sqrt{N}E_1$ координаты являются идущими подряд вершинами правильного N-угольника, вписанного в единичный круг, или комплексными корнями степени N из единицы, у вектора $\sqrt{N}E_2$ координаты являются вершинами того же N-угольника, но взятыми

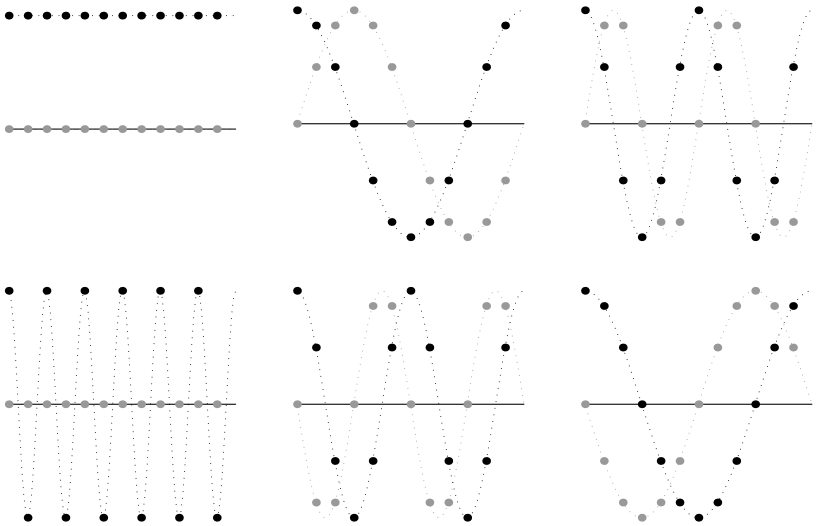


Рис. 12. Векторы E_k для $k = 0, 1, 2, \frac{N}{2}, N-2, N-1$; вещественные и мнимые части отмечены соответственно черным и серым, пунктиром показаны графики функций $\cos 2\pi kx$ и $\sin 2\pi kx$ при $k \leqslant \frac{N}{2}$ и функций $\cos 2\pi(N-k)x$ и $\sin 2\pi(N-k)x$ при $k > \frac{N}{2}$

через одну, у вектора $\sqrt{N}E_3$ — через две и т. д. Обозначив через $w = e^{-2\pi i/N}$ первый комплексный корень степени N из единицы, получим такую компактную запись:

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, w^{-k}, \ldots, w^{-k(N-1)}), \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{10}$$

Интуиция подсказывает, что эта система векторов должна быть ортонормированной, раз уж таковой была «материнская» система функций $\{e^{2\pi ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Это действительно так, и доказывается это с помощью следующей технической леммы.

Лемма 1. *Для любых натуральных чисел N и k выполнено равенство*

$$\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi isk/N} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ делится на } N; \\ 0, & \text{если } k \text{ не делится на } N. \end{cases}$$

Доказательство. Если k делится на N, то число $\frac{2\pi isk}{N}$ целое, поэтому $e^{2\pi isk/N} = 1$, а значит, $\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi isk/N} = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} 1 = 1$. Если же число $\frac{2\pi isk}{N}$ не целое, то $q = e^{2\pi ik/N} \neq 1$, а раз так, можно воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии со знаменателем q:

$$\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi isk/N} = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} q^s = \frac{q^N - 1}{q - 1} = \frac{e^{2\pi ik} - 1}{e^{2\pi ik/N} - 1} = 0. \qquad \square$$

Лемма 1 устанавливает своеобразный индикатор делимости одного целого числа на другое. Если k делится на N, то сумма $\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi ik/N}$ равна единице, а если не делится, то равна нулю. Это простейший пример применения тригонометрических сумм в теории чисел. Чтобы оценить количество чисел из какого-то множества, делящихся на N, нужно оценить величину соответствующей тригонометрической суммы.

Теорема 3. *Система $\{E_0, \ldots, E_{N-1}\}$ является ортонормированным базисом N-мерного пространства.*

Доказательство. Для любой пары чисел $m, n \in \{0, \ldots, N-1\}$ имеем

$$(E_m, E_n) = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi ism/N} e^{-2\pi isn/N} = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi is(m-n)/N}.$$

Заметим, что $|n - m| < N$. Поэтому число $m - n$ делится на N, только если оно равно нулю. Следовательно, $(E_m, E_n) = \delta_{m,n}$. $\square$

Следствие 1. *Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ выполняется равенство*

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} (x, E_k) E_k. \tag{11}$$

2.4. Дискретное преобразование Фурье

Коэффициенты разложения вектора по базису Фурье в формуле (11) также составляют N-мерный вектор. Его принято обозначать $\hat{x}$ и называть *дискретным преобразованием Фурье* вектора x. Таким образом, $\hat{x}(k) = (x, E_k)$, $k = 0, \ldots, N-1$. Дискретное преобразование Фурье отображает вектор x в вектор $\hat{x}$.

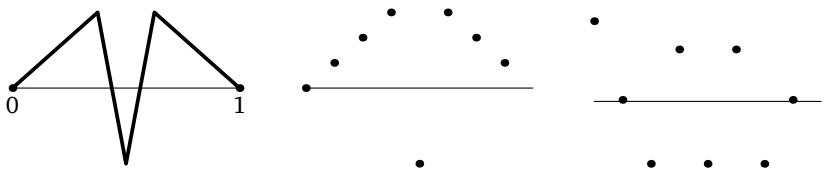


Рис. 13. Слева: непрерывный сигнал $f(t)$; в центре: его дискретизация — вектор $x = (x(0), \ldots, x(7))$; справа: дискретное преобразование Фурье этого вектора $\hat{x} = (\hat{x}(0), \ldots, \hat{x}(7))$

Из определения следует, что это преобразование линейное. Чтобы увидеть другие его свойства, посмотрим на его матрицу, которую обозначим через A. Как обычно, в k-м столбце матрицы линейного преобразования стоят координаты образа k-го базисного вектора, в данном случае — сопряженный к вектору E_k (первая матрица в формуле (12)):

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & w & \ldots & w^{N-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & w^{N-1} & \ldots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}; \\ A^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \overline{w} & \ldots & \overline{w}^{(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \overline{w}^{(N-1)} & \ldots & \overline{w}^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{12}$$

где, напомним, $w = e^{-2\pi i/N}$. Сразу замечаем, что матрица A симметрическая, т. е. $A^T = A$. Ее второе и гораздо более важное свойство — она унитарна, т. е. ее столбцы образуют ортонормированную систему. Вспоминая свойства унитарных матриц, немедленно получаем следующий результат.

Следствие 2. *Дискретное преобразование Фурье является движением пространства* $\mathbb{R}^N$.

Таким образом, мы доказали *равенство Парсеваля* для дискретного преобразования Фурье: $\|x\| = \|\hat{x}\|$. Не нами замечено, что равенство Парсеваля — это обычная теорема Пифагора: сумма квадратов проекций вектора на ортогональные координатные оси (это $\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{x}(k)|^2 = \|\hat{x}\|^2$) равна квадрату длины вектора (это $\|x\|^2$). Поскольку обратная к унитарной матрице A совпадает с ее сопряженной A^* (т. е. транспонированной к комплексно-сопряженной матрице) и $A^T = A$, получаем, что A^{-1} — это просто комплексно-сопряженная к матрице A. На соответствующей позиции вместо элемента $e^{2\pi is/N}$ у матрицы A^{-1} стоит элемент $e^{-2\pi is/N}$.

Следствие 3. *Обратное преобразование Фурье задается комплексно-сопряженной матрицей*: $A^{-1} = \bar{A}$.

Матрица обратного преобразования Фурье представлена в формуле (12) справа. Таким образом,

$$x = \sum_{s=0}^{N-1} (\hat{x}, \bar{E}_s)\bar{E}_s,$$

где

$$\bar{E}_s = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, e^{-2\pi is/N}, \ldots, e^{-2\pi is(N-1)/N}).$$

Значит, обратное преобразование Фурье осуществляется той же формулой, что и прямое, только с минусами в показателях экспонент.

Если у нас есть дискретный сигнал x, то мы осуществляем его преобразование Фурье, получаем вектор $\hat{x}$ и храним его коэффициенты. Так мы оцифровываем сигнал. Чтобы расшифровать оцифровку, т. е. перевести коэффициенты вектора $\hat{x}$ обратно в вектор x, мы применяем обратное преобразование Фурье, которое фактически осуществляется теми же формулами, с заменой знаков в показателях экспонент. Совпадение алгоритмов прямого и обратного преобразований Фурье — еще одно преимущество тригонометрического базиса.

2.5. Как это работает на гладких сигналах

Преобразование Фурье $\hat{x}$ — это вектор, имеющий N координат, столько же, сколько и исходный вектор x. В чем же тогда смысл? Было N чисел $\{x(k)\}_{k=1}^N$, и получили N других чисел $\{\hat{x}(k)\}_{k=1}^N$. А в том, что если вектор x достаточно гладкий, т. е. представляет значения гладкой функции (например, липшицевой), то все коэффициенты $\hat{x}(k)$ хранить не обязательно. Достаточно взять небольшое число начальных коэффициентов, и соответствующая частичная сумма ряда Фурье будет хорошо приближать исходный вектор x.

Нужно только разобраться, какие коэффициенты считать начальными. В формуле (8) частичная сумма ряда Фурье $S_n f$ получается сложением первых $2n+1$ коэффициентов с номерами от $-n$ до n (включая нулевой). Для дискретного преобразования Фурье все должно быть аналогично. Мы складываем коэффициенты от 0 до n. Но где взять отрицательные коэффициенты? В дискретном базисе $E_0, \ldots$ $\ldots, E_N$ нет отрицательных номеров, потому что функция $e^{-2\pi ikt}$ соответствует вектору E_{N-k}. В самом деле, так как $e^{-2\pi ik/N} = e^{2\pi i(N-k)/N}$, получаем, что

$$E_{N-k} = \frac{1}{\sqrt{N}}(e^{-2\pi i\cdot 0k/N}, e^{-2\pi i\cdot 1k/N}, \ldots, e^{-2\pi i\cdot (N-1)k/N}).$$

Таким образом, мы вполне могли бы использовать обозначение E_{-k} вместо E_{N-k}, но нумеровать базисные векторы все же удобнее от нуля до $N-1$. Поэтому первые $2n+1$ коэффициентов в разложении Фурье (11) имеют номера $0, 1, \ldots, n$ и $N-1, \ldots, N-n$. Обозначим множество этих номеров через I_n. Таким образом,

$$I_n = \{0, \ldots, n\} \cup \{N-n, \ldots, N-1\}, \quad n < \frac{N}{2}. \tag{13}$$

Пусть f — некоторая непрерывная функция с периодом 1, а

$$x(k) = f\left(\frac{k}{N}\right), \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Обозначим через V_n подпространство $\mathbb{R}^N$, порожденное $2n+1$ векторами $\{E_k\}_{k\in I_n}$. Это $(2n+1)$-мерная плоскость в пространстве $\mathbb{R}^N$. Ортогональная проекция S_n на эту плоскость задается формулой

$$S_n x = \sum_{k\in I_n} \hat{x}(k) E_k. \tag{14}$$

Это просто частичная сумма разложения Фурье (14), в которой взяты $2n+1$ «начальных» слагаемых с номерами из заданного соотношением (13) множества I_n. Напомним, что $\hat{x}(k) = (x, E_k)$. Тогда имеет место такая дискретная версия теоремы Джексона.

Теорема 4. *Если 1-периодическая функция f принадлежит классу $C^r(\mathbb{R})$ для некоторого $r \geqslant 0$ и при этом $\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1$, то для вектора $x(k) = f\left(\frac{k}{N}\right)$ при каждом натуральном n, меньшем чем $\frac{N}{2}$, выполнено неравенство*

$$\|S_n x - x\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{N} C(r)}{n^r}. \tag{15}$$

Число $C(r)$ не зависит от функции f, а $S_n x$ — частичная сумма разложения Фурье (14).

Замечание 3. Нетрудно заметить, что эта теорема напрямую следует из «непрерывной» теоремы Джексона (теорема 1). В самом деле, расстояние от сигнала x до его проекции $S_n x$ меньше, чем расстояние до любой другой точки плоскости V_n, в частности, меньше, чем до дискретизации непрерывного приближения. А множитель $\sqrt{N}$ возникает из-за сравнения расстояний $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_2$.

Если, например, $r = 1$ (в этом случае $|f'(t)| \leqslant 1$ и, следовательно, функция f является 1-липшицевой), то при $N = 10^7$ для приближения вектора x с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ нужно взять n равным примерно $3 \cdot 10^5$, т. е. взять $2n + 1 \approx 6 \cdot 10^5$ коэффициентов Фурье. Таким образом, сжатие сигнала в 15 раз приводит к пренебрежимо малой ошибке в 1 %. Для хранения и передачи изображений такая точность вполне допустима, ошибка в 1 % для глаза незаметна. При $r = 3$ достаточно взять $n = 70$, т. е. всего порядка 140 коэффициентов! Правда, столь гладкие сигналы встречаются нечасто, поэтому сжатие в десятки тысяч раз — больше теория, чем практика.

Обычный коэффициент сжатия для системы Фурье — примерно 10—20. Но для того, чтобы его достичь, нужно вычислить десятки тысяч коэффициентов Фурье. Вот тут мы и подходим к болезненному вопросу. А стоит ли игра свеч? Не превысят ли затраты на вычисление вектора $\hat{x}$ пользы от сжатия сигнала? Для вычисления одного коэффициента вектора $\hat{x}(k)$ нужно найти скалярное произведение (x, E_k). Это N операций умножения, потом $N - 1$ операций сложения и, сверх того, одна операция деления на $\sqrt{N}$. Итого $2N$. Для всех N координат получается $2N^2$ операций. Итак, для «прямого метода» (т. е. путем умножения вектора на матрицу) преобразования Фурье мы получаем следующий результат.

Вычислительная сложность «прямого метода» дискретного преобразования Фурье равна $2N^2$.

Это очень много! При обычной в таких задачах[1] размерности $N = 10^7$ понадобится $2 \cdot 10^{14}$ арифметических операций, что нереально! Мощность типичного[2] ноутбука в режиме максимальной производительности не превосходит 0,1 терафлопса, т. е. 0,1 триллиона операций в секунду. Значит, для обработки фотографии в 1 Мп ему понадобится порядка 2000 секунд, т. е. более получаса! А потом ведь еще надо потратить столько же времени на раскодировку, т. е. на обратное преобразование Фурье. Конечно, нам нужны не все коэффициенты Фурье, при гладком сигнале их число уменьшается в 10—20 раз. Но и тогда объем вычислений получается недопустимо большим. Выход из этой ситуации предлагает быстрое преобразование Фурье.

2.6. Быстрое преобразование Фурье

Понятие быстрого преобразования Фурье говорит само за себя: оно позволяет вычислять дискретное преобразование Фурье за существенно меньшее число операций.

Предположим для удобства, что N — четное число, таким образом, $N = 2M$. Рассортируем все компоненты вектора x на две половины — четную u (т. е. с четными номерами) и нечетную v. Итак, $u = (x(0), x(2), \ldots, x(2M-2))$, и, таким образом, $u(k) = x(2k)$, $k = 0, \ldots, M-1$, а $v = (x(1), x(3), \ldots, x(2M-1))$, и, таким образом, $v(k) = x(2k+1)$, $k = 0, \ldots, M-1$.

$$
\begin{tikzcd}
(x(0), & x(1), & x(2), & x(3), & \ldots, & x(2M-2), & x(2M-1)) \\
u(0) & v(0) & u(1) & v(1) & & u(M-1) & v(M-1)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (u(0), \ldots, u(M-1)) \\
(x(0), \ldots, x(2M-1)) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (v(0), \ldots, v(M-1))
\end{tikzcd}
$$

Рис. 14. Быстрое преобразование Фурье

[1] Для простоты мы не обсуждаем сжатие картинки по кусочкам.

[2] На момент написания этих строк.

Теорема 5. *Для каждого $m = 0, \ldots, M-1$ выполнены соотношения*

$$\hat{x}(m) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}(m) + w^m \hat{v}(m));$$
$$\hat{x}(M+m) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}(m) - w^m \hat{v}(m)),$$

где $w = e^{-2\pi i/N}$.

Доказательство. Докажем первую формулу, вторая устанавливается аналогично. По определению преобразования Фурье, учитывая, что $N = 2M$, получаем

$$\hat{x}(m) = \frac{1}{\sqrt{2M}} \sum_{k=0}^{2M-1} x(k) w^{km} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2M}} \sum_{r=0}^{M-1} x(2r)(w^2)^{rm} + \frac{1}{\sqrt{2M}} \sum_{r=0}^{M-1} x(2r+1)(w^2)^{rm} w^m =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u} + w^m \hat{v}). \quad \square$$

Таким образом, если мы умеем вычислять дискретное преобразование Фурье векторов размера M, то мы вычислим его и для векторов размера $2M$. Вначале мы разбиваем $2M$-мерный вектор x на четную и нечетную половины (берем компоненты через одну), получаем два M-мерных вектора u и v, потом вычисляем их M-мерные преобразования Фурье $\hat{u}$, $\hat{v}$ и затем из этих двух векторов составляем вектор $\hat{x}$ по формулам из теоремы 5.

Сколько арифметических операций требуется, чтобы удвоить размерность? Если M-мерные преобразования Фурье $\hat{u}$, $\hat{v}$ уже вычислены, то для вычисления $2M$-мерного вектора $\hat{x}$ нужно: для первой половины $\hat{x}(0), \ldots, \hat{x}(M-1)$ (первая формула теоремы 5) M умножений и M сложений, для второй половины $\hat{x}(M), \ldots, \hat{x}(2M-1)$ (вторая формула теоремы 5) — столько же. Итак,

чтобы вычислить преобразование Фурье в размерности $2M$, надо дважды вычислить его в размерности M и сделать сверх того $4M$ арифметических операций.

Обозначим через $R(M)$ вычислительную сложность быстрого преобразования Фурье в размерности M. Тогда $R(2M) = 2R(M) + 4M$. Какой вид имеет функция $R(M)$? Она меньше квадратичной (уже хорошо!), поскольку для функции $R(M) = cM^2$ мы имели бы $R(2M) - 2R(M) = 2cM^2$, что больше чем $4M$ при больших M. Но она больше линейной, поскольку для линейной функции $R(M) = cM$ мы имели

бы $R(2M) - 2R(M) = 0$. Таким образом, $R(M)$ растет быстрее линейной функции, но медленнее квадратичной. При $M = 1$, очевидно, $R = 1$. Тогда, удваивая размерности, получаем таблицу 1.

M	$R(M)$
1	1
2	6
4	20
8	56
16	144
32	352

Таблица 1. Значения функции $R(M)$ при $M = 1, 2, 4, \ldots, 32$

Эмпирически уже можно догадаться до формулы

$$R(2^k) = (2k+1)2^k.$$

А доказать ее проще по индукции. Для малых k, как мы видим из таблицы, она верна. Если она верна для $M = 2^k$, то

$$R(2M) = 2R(M) + 4M = 2(2k+1)2^k + 4 \cdot 2^k = (2(k+1)+1)2^{k+1},$$

что и требовалась. Таким образом, если N — степень двойки, то $R(N) \leqslant (2\log_2 N + 1)N$. А для произвольного N имеет место следующая оценка, доказательство которой проходит по той же схеме.

Теорема 6. *Сложность быстрого преобразования Фурье удовлетворяет неравенству*

$$R(N) \leqslant (4\log_2 N + 6)N.$$

Это уже гораздо лучше, чем N^2. Функция $R(N)$ получается «почти линейной» по N. Множитель $4\log_2 N + 6$ хоть и растет с ростом N, но с логарифмической скоростью. Это очень медленно. Как говорил один известный математик, логарифм — функция ограниченная. Для $N = 10^7$ этот множитель равен всего 98. Поэтому преобразование Фурье сигнала в 1 Мп требует менее 10^9 операций, что займет меньше десятой доли секунды на обычном компьютере.

Заметим, что сложность любого метода разложения не может быть меньше N, потому что в любом базисе есть ровно N элементов, значит, разложение по нему содержит N коэффициентов и на получение каждого из них нужна хотя бы одна операция. Поэтому

сложность любого метода разложения растет как минимум линейно от N. В этом смысле метод Фурье близок к оптимальному, потому что его сложность «почти линейна».

2.7. Непреодолимый недостаток метода Фурье

Метод Фурье использует в качестве базисных функций для гладких сигналов тригонометрические функции. Этот выбор во многих отношениях удачен. Во-первых, тригонометрические функции гладкие, для них выполнена теорема Джексона, поэтому базис Фурье обладает хорошим коэффициентом сжатия. Он может быть реализован с помощью быстрого преобразования Фурье, и его сложность разложения близка к линейной по N (а меньше линейной, как мы знаем, она не бывает). Наконец, прямое и обратное преобразования Фурье осуществляются одним и тем же алгоритмом (с заменой знака в экспонентах), что тоже удобно. Так в чем же дело? В общем-то, ни в чем — метод Фурье очень хорош и до сих пор широко используется. Но за его вековую историю проявились несколько его недостатков, которые стали особенно заметны с развитием мощной компьютерной техники. Главный из них — метод Фурье очень чувствителен к шуму.

Что такое шум? Это помеха, ошибка в сигнале. Как правило, она сильно локализована по времени (имеет маленькую продолжительность) и большая по величине. Шум — это щелчок, треск. Это сильный, но короткий сигнал. Для дискретного сигнала шум — это изменение одной координаты вектора x. Пусть, скажем, к координате $x(0)$ прибавили шум α. Обозначив $\delta = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$, получаем после прибавления шума вектор $x + \alpha\delta$. Поскольку

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}(\delta, E_k) = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

получаем $\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, \ldots, 1)$. Итак,

$$\hat{x} + \alpha\hat{\delta} = \left(\hat{x}(0) + \frac{\alpha}{\sqrt{N}}\hat{x}(1) + \frac{\alpha}{\sqrt{N}}, \ldots, \hat{x}(N-1) + \frac{\alpha}{\sqrt{N}}\right).$$

Таким образом, после преобразования Фурье *к каждой координате вектора $\hat{x}$ прибавится величина* $\frac{\alpha}{\sqrt{N}}$. Шум равномерно распределится во всем коэффициентам Фурье, после чего его трудно будет отловить. Если прибавить шум не к компоненте $x(0)$, а к какой-нибудь другой, $x(m)$, то к преобразованию Фурье $\hat{x}$ прибавится век-

тор $\alpha\hat{E}_m$. Но все компоненты вектора $\bar{E}_m$ равны по модулю. Значит, к каждой компоненте вектора $\hat{x}$ прибавится комплексное число с одним и тем же модулем (равным $\frac{\alpha}{\sqrt{N}}$). Вновь получаем, что *прибавление шума к одной компоненте сигнала равномерно портит все коэффициенты Фурье*.

А это создает следующую проблему: если мы (как и собирались) возьмем только часть коэффициентов Фурье, то точечная помеха «расползется», создав возмущение во всей картинке.

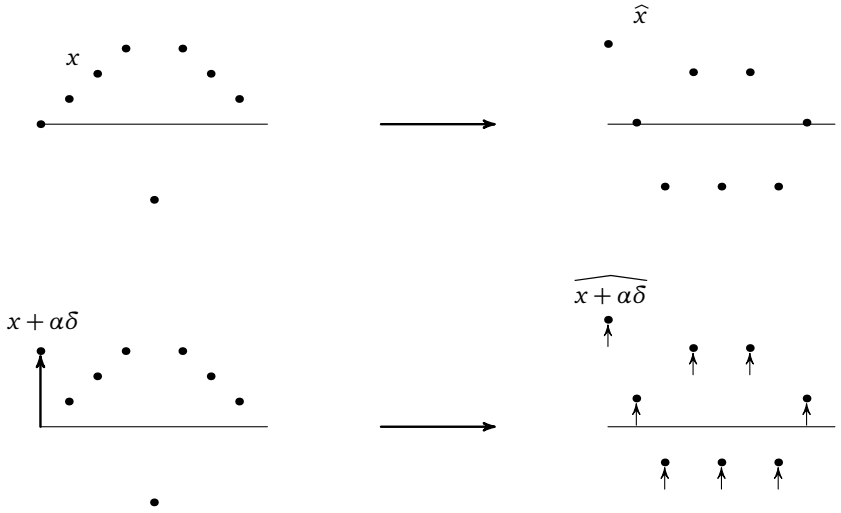


Рис. 15. Влияние локализованного шума на преобразование Фурье

Этот недостаток непреодолим. Он основан на следующем факте: *преобразование Фурье дельта-функции равно тождественной единице*. Не будем пояснять его смысл, это завело бы нас слишком далеко в область функционального анализа. Главное здесь в том, что преобразование Фурье не сохраняет локализованность функции. Что это означает, мы разберемся в следующем разделе.

Упражнения

1. Каждой точке плоскости $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ поставим в соответствие полином $f(t) = at^2 + bt$. Нарисуйте множество точек (a, b) на плоскости, для которых функция $f(t)$ является липшицевой с константой 1 на отрезке $[0, 1]$.

2. Найдите полином степени два $f(t) = t^2 + bt + c$, ортогональный на отрезке $[0, 1]$ функциям $g(t) = t$ и $h(t) = t^2 - 2019$.

3. Разложите в ряд Фурье следующие функции:
а) $1 - \cos 6\pi t$;
б) $\sin^2 2\pi t$;
в) $\cos^4 2\pi t$;
г) $\sin 2\pi t \cos 6\pi t$;
д) $|\sin 2\pi t|$;
е) $f(t) = t$, $t \in [0, 1)$.

4. Докажите, что

$$\pi\left(\frac{1}{2} - t\right) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sin 2\pi kt}{k}.$$

Считая известным, что этот ряд сходится к функции при каждом $t \in (0, 1)$, выведите формулу Лейбница:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

5. Докажите, что

$$\pi^2\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\cos 2\pi kt}{k^2}.$$

Считая известным, что этот ряд сходится к функции в каждой точке $t \in [0, 1]$, докажите, что $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Рассмотрим такую кривую в гильбертовом пространстве: $\gamma(t) = \chi_{[0,t)}$, $t \in [0, 1]$ (функция $\chi_{[0,t)}$ равна 1 на полуинтервале $[0, t)$ и нулю на $[t, 1]$). Докажите, что для любых точек $a_1 = \gamma(t_1)$, $a_2 = \gamma(t_2)$, $a_3 = \gamma(t_3)$ этой кривой ($t_1 < t_2 < t_3$) угол $a_1a_2a_3$ прямой.

7*. Придумайте непрерывное отображение замкнутого единичного шара гильбертова пространства в себя, которое не имеет ни одной неподвижной точки. (Таким образом, теорема Брауэра неверна в гильбертовом пространстве.)

8. Вычислите дискретное преобразование Фурье $\hat{x}$ сигнала $x \in \mathbb{R}^8$:
а) $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$;
б) $x = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$;
в) $x = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$;
г) $x = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$;
д) $x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$.

9. Вычислите дискретное преобразование Фурье $\hat{x}$ сигнала $x \in \mathbb{R}^N$:

а) $x = \left(\cos \dfrac{2\pi k}{N}\right)_{k=0,\ldots,N-1}$;

б) $x = \left(\sin \dfrac{4\pi k}{N}\right)_{k=0,\ldots,N-1}$;

в) $x = \left(\sin \dfrac{2\pi k}{N} \cdot \cos \dfrac{6\pi k}{N}\right)_{k=0,\ldots,N-1}$;

г) $x = \left(\sin^2 \dfrac{2\pi k}{N} \cdot \cos \dfrac{6\pi k}{N}\right)_{k=0,\ldots,N-1}$.

3. Начала всплесков. Система Хаара

В конце предыдущего раздела мы установили два главных недостатка системы Фурье: 1) она рассчитана на периодические функции; 2) она не локализована. С первым недостатком люди давно научились справляться с помощью разного рода периодизаций и т. д. Второй оказался куда более сложным. Прежде чем решать эту проблему, мы строго ее сформулируем.

3.1. Что такое локализованная функция

Свойство локализованности функции $f(t)$ означает, что она стремится к нулю при $t \to \infty$, причем чем быстрее стремится, тем лучше она локализована. Скажем, обе функции e^{-t^2} и $\dfrac{1}{1+t^2}$ локализованы, но при этом первая имеет лучшую локализацию, чем вторая. А функция e^{-t} не локализована, поскольку она не убывает при $t \to -\infty$. Наиболее локализованные функции — это те, которые равны нулю вне некоторого отрезка. Множество точек, в которых функция f не обращается в ноль, или, точнее, замыкание этого множества, называется *носителем* функции и обозначается $\operatorname{supp} f$ (от английского support). Если носитель ограничен, т. е. содержится в некотором отрезке, то говорят, что носитель *компактен*. Таким образом, функции с компактным носителем — это те, которые обращаются в ноль вне некоторого отрезка. Говорят, что функция *сосредоточена* на этом отрезке.

Феномен, который мы наблюдаем, применяя преобразование Фурье к функции с шумом, состоит в том, что преобразование Фурье не сохраняет локализацию. Функция, которая имеет хорошую локализацию, скажем, сосредоточенная на очень маленьком отрезке (как шум), имеет коэффициенты Фурье с плохой локализацией: они медленно убывают с ростом номера либо не убывают вовсе. Происходит это из-за того, что тригонометрические функции сами не локализованы: функция

$$f(t) = e^{-2\pi ikt}$$

равна по модулю единице при всех $t \in \mathbb{R}$. Спасти ситуацию может только переход к другому базису в гильбертовом пространстве, который состоял бы из локализованных функций. Самый простой из таких базисов дает первый пример всплесков — это базис Хаара.

3.2. Система Хаара на отрезке

Базис гильбертова пространства функций на отрезке $[0, 1]$ был предложен Альфредом Хааром[1] в 1909 году.

Он столь же прост, как и базис Фурье (во многих отношениях — еще проще), но состоит из функций с компактным носителем, и его можно использовать не только для периодических функций. Правда, имеет он и свои недостатки, но об этом поговорим потом.

Базис Хаара строится последовательно. Вначале берется функция $h_0(t)$, равная единице тождественно на полуинтервале $[0, 1)$. Все дальнейшие функции разбиты на уровни.

Нулевой уровень — одна функция $h_1(t)$, равная 1 на $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ и -1 на $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Первый уровень — две функции h_2, h_3:

$$h_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right); \\ -\sqrt{2}, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right); \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases} \qquad h_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right); \\ -\sqrt{2}, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right); \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases}$$

Второй уровень — четыре функции h_4, h_5, h_6, h_7:

$$h_4(t) = \begin{cases} 2, & t \in \left[0, \frac{1}{8}\right); \\ -2, & t \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right); \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases} \qquad h_5(t) = \begin{cases} 2, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right); \\ -2, & t \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right); \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$h_6(t) = \begin{cases} 2, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right); \\ -2, & t \in \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right); \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases} \qquad h_7(t) = \begin{cases} 2, & t \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right); \\ -2, & t \in \left[\frac{7}{8}, 1\right); \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

(см. рис. 16).

Таким образом, j-й уровень для каждого целого $j \geqslant 0$ состоит из 2^j функций $h_{2^j}, \ldots, h_{2^{j+1}-1}$. Носитель каждой функции — отрезок длины 2^{-j}, все носители не пересекаются. Каждая функция принимает три значения: $\pm 2^{j/2}$ или 0. Все функции j-го уровня получаются друг из друга сдвигами аргумента на величину, кратную 2^{-j}.

[1] Альфред Хаар (Alfred Haar, 1885—1933) — венгерский математик, ученик Д. Гильберта.

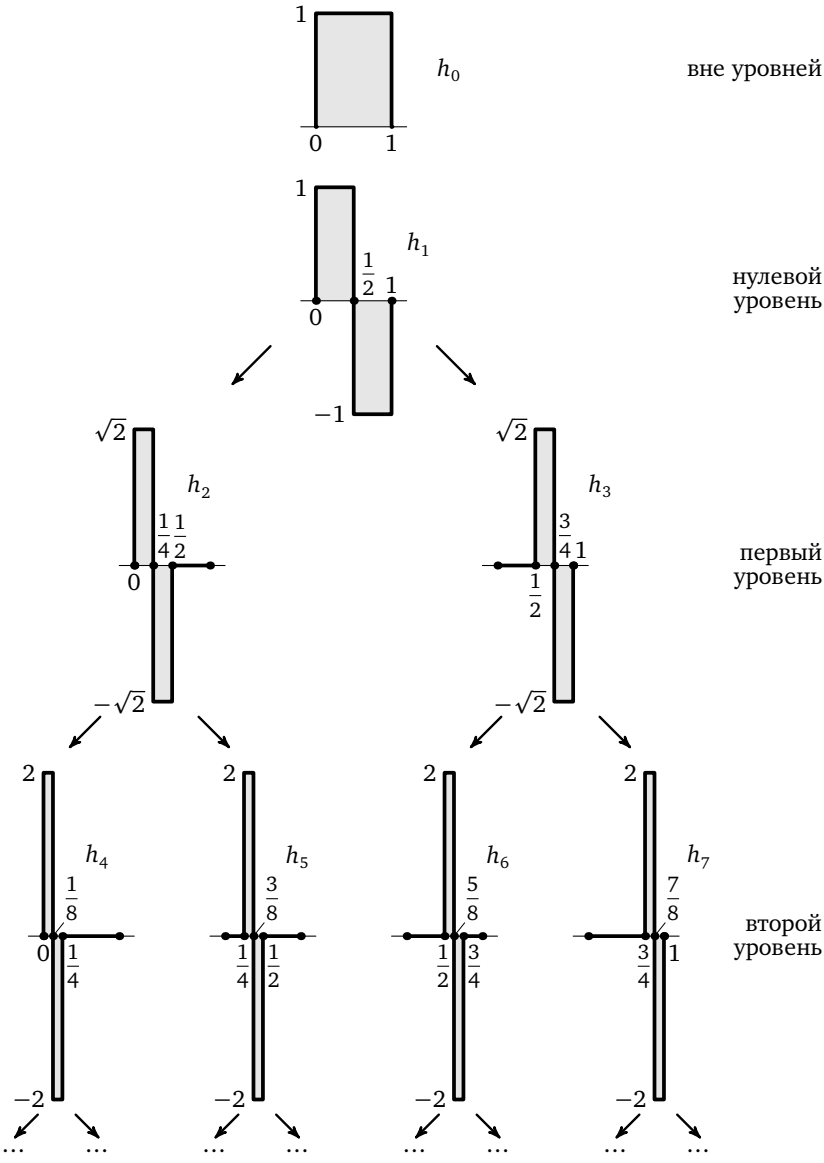


Рис. 16. Дерево функций Хаара

Каждая функция j-го уровня h_m при $m = 2^j + k$, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$, определяется так (см. рис. 17):

$$h_m(t) = \begin{cases} (\sqrt{2})^j, & t \in \left[2^{-j}k, 2^{-j}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right); \\ -(\sqrt{2})^j, & t \in \left[2^{-j}\left(k + \frac{1}{2}\right), 2^{-j}\left(k+1\right)\right); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

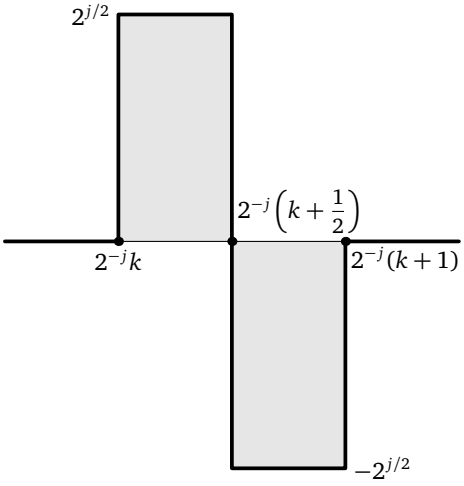


Рис. 17. Функция Хаара j-го уровня h_m, $m = 2^j + k$, $k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$

Таким образом, первая функция j-го уровня h_{2^j} имеет носитель на отрезке $[0, 2^{-j}]$, на первой половине отрезка она равна $2^{j/2}$, на второй половине она равна $-2^{j/2}$. Далее эта функция $2^j - 1$ раз сдвигается вправо на 2^{-j}, так получаются все остальные функции j-го уровня $h_{2^j+1}, \ldots, h_{2^j+2^j-1}$.

Обозначим через V_n пространство кусочно постоянных функций на двоичных интервалах ранга n отрезка $[0, 1]$. Это значит, что функции постоянны на каждом промежутке $[2^{-n}s, 2^{-n}(s+1))$ (двоичном промежутке ранга n), $s = 0, \ldots, 2^s - 1$. Каждая функция $f \in V_n$, таким образом, может принимать 2^n значений, и размерность пространства V_n равна 2^n.

Соберем все функции Хаара начиная с h_0 (эта функция находится вне уровней) и до уровня $n - 1$. Получим 2^n функций $\{h_m\}_{m=0}^{2^n-1}$. Все они постоянны на двоичных интервалах ранга n, а значит, принад-

лежат пространству V_n. Оказывается, они составляют ортонормированный базис этого пространства.

Теорема 7. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ система функций $\{h_m\}_{m=0}^{2^n-1}$ является ортонормированным базисом пространства V_n.*

Доказательство. Заметим, что норма каждой функции равна 1 (именно для этого мы умножаем каждую функцию j-го уровня на $\sqrt{2}^j$). Поэтому осталось доказать, что эти функции ортогональны друг другу. В этом случае получится ортонормированная система в пространстве V_m, состоящая из 2^n векторов. Но поскольку $\dim V_n = 2^n$, эта система является базисом пространства V_n.

Итак, остается доказать ортогональность. На одном уровне все функции h_m ортогональны, поскольку их носители не пересекаются. Возьмем произвольные функции на разных уровнях: функцию h_{m_1} на уровне j_1 и функцию h_{m_2} на уровне $j_2 > j_1$. Поскольку функция h_{m_1} принадлежит уровню j_1, она постоянна на каждом двоичном интервале ранга не меньше $j_1 + 1$. А так как $j_2 \geqslant j_1 + 1$, она постоянна на каждом двоичном интервале ранга j_2. Поэтому на всем носителе функции h_{m_2} функция h_{m_1} равна некоторой константе c. Следовательно, $(h_{m_1}, h_{m_2}) = \int\limits_0^1 c h_{m_2}(t)\, dt = c \int\limits_0^1 h_{m_2}(t)\, dt = 0$, что и требовалось. □

Итак, система Хаара $\{h_m\}_{m \geqslant 0}$ является ортонормированной системой в гильбертовом пространстве функций на отрезке [0, 1]. Как и в случае системы Фурье, каждой функции можно сопоставить ее ряд Хаара:

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty} (f, h_m) h_m. \tag{16}$$

Вновь обозначив через $S_n f$ частичную сумму этого ряда (на этот раз сумму 2^n первых слагаемых, а не $2n+1$ слагаемых, как для ряда Фурье), мы получаем формулу для ортогональной проекции функции f на пространство V_n:

$$S_n f = \sum_{m=0}^{2^n-1} (f, h_m) h_m. \tag{17}$$

На самом деле ортогональная проекция на пространство V_n строится очень просто. Дело в том, что пространство V_n имеет еще один ортонормированный базис, который даже проще хааровского. Он состоит из функций c_k, равных константе $2^{n/2}$ на двоичном интервале $I_k = [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))$ и нулю за его пределами, при этом k при-

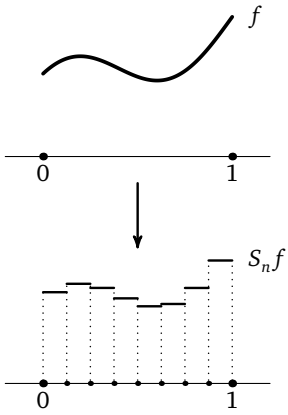


Рис. 18

нимает значения от нуля до $2^n - 1$. Очевидно, что система функций $\{c_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ также ортонормированна, а так как их количество равно размерности пространства V_n, это базис пространства V_n. Поэтому для проекции на пространство V_n верна и еще одна формула:

$$S_n f = \sum_{k=0}^{2^n-1} (f, c_k) c_k. \tag{18}$$

Подчеркнем, что $S_n f$ в формулах (17) и (18) — это одна и та же функция, поскольку у элемента f есть только одна проекция на пространство V_n. Из формулы (18) теперь можно заключить, что проекция на V_n усредняет функцию f на каждом двоичном интервале I_k, т. е. заменяет ее на константу, равную среднему значению: $\frac{1}{|I_k|} \int\limits_{I_k} f(t)\, dt$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ (напомним, что $|I_k|$ — длина интервала, в данном случае она равна 2^{-n}). Таким образом, при проекции на V_n любая функция разбивается на 2^n постоянных кусочков, а ее график превращается в «лесенку» из 2^n ступенек.

3.3. Приближения функций системой Хаара. Эффект насыщаемости

Для системы Хаара также верна теорема Джексона, правда, в сильно урезанном виде.

Теорема 8. *Для любой 1-липшицевой функции f на отрезке* $[0,1]$ *верно неравенство*

$$\|f - S_n f\|_2 \leqslant \frac{1}{2\sqrt{3}} 2^{-n}. \tag{19}$$

Таким образом, если $f \in C^1[0,1]$ и $|f'(t)| \leqslant 1$, $t \in (0,1)$ (в этом случае, как мы знаем, функция f является 1-липшицевой), то сумма первых $N = 2^n$ членов ряда Хаара приближает функцию с точностью $\frac{C}{N}$. В отличие от теоремы Джексона для тригонометрической системы, здесь приближение не улучшается с увеличением гладкости f. Функции из C^2 или C^{10} система Хаара приближает с такой же точностью $\frac{C}{N}$, и ничего лучшего уже не будет. Такое свойство называется *насыщаемостью*.

Система Хаара насыщаема уже при $r = 1$, т. е. она приближает функции из C^1 так же, как и все более гладкие функции. Происходит это вовсе не из-за того, что функции Хаара сами не гладкие. Существует много систем, состоящих из разрывных функций, которые тем не менее прекрасно приближают гладкие функции. Настоящая причина в том, что функции Хаара не порождают своими линейными комбинациями полиномы. Они порождают тождественную константу (т. е. полином степени ноль), но не полином степени 1, т. е. функцию $f(t) = t$. Согласно формуле (18) проекция этой функции на пространство V_n — это лесенка из 2^n ступенек с высотой первой ступеньки 2^{-n-1} и высотой каждой следующей ступеньки 2^{-n}:

$$S_n f(t) = 2^{-n-1}(1 + 2k), \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

Квадрат расстояния $\|f - S_n f\|^2$ — это сумма 2^n одинаковых интегралов

$$\int_{I_k} (f - S_n f)^2 \, dt = \int_0^{2^{-n}} (t - 2^{-n-1})^2 \, dt = \frac{2}{3} \cdot 2^{-3(n+1)}.$$

Поэтому

$$\|f - S_n f\| = \left(2^n \cdot \frac{2}{3} \cdot 2^{-3(n+1)}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} 2^{-n}.$$

Таким образом, сумма первых $N = 2^n$ слагаемых ряда Хаара приближает функцию $f(t) = t$ с точностью $\frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{N}$, и тот факт, что эта функция принадлежит всем классам C^r, $r \geqslant 1$, ситуацию не спасает.

Попутно мы доказали, что константа $C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ в теореме 8 неулучшаема уже для функции $f(t) = t$.

Насыщаемость — главный недостаток системы Хаара. Второй ее недостаток — разрывность функций. Собственно, вся теория всплесков родилась из попыток построить «гладкий Хаар». Системы всплесков наследуют все хорошие свойства системы Хаара, но при этом состоят из гладких функций и сами хорошо приближают гладкие функции. Теорема Джексона не выполнена для них в полном объеме, т. е. для всех r (доказано, что таких всплесков не бывает), но коэффициент насыщаемости у них больше единицы (у системы Хаара он равен 1).

А где же обещанные достоинства системы Хаара? Пока мы обсуждали только недостатки. Достоинства есть! Первое — локализованность. Функции Хаара имеют компактный носитель, который, более того, быстро сужается с ростом номера функции. До недавнего времени (до изобретения всплесков) система Хаара была единственной ортонормированной системой с таким свойством. Второе — двоичная структура, позволяющая быстро вычислять коэффициенты разложения. Как это работает, мы сейчас увидим, раскладывая дискретные сигналы.

3.4. Дискретный базис Хаара

Работая с функциями Хаара, мы всегда будем предполагать, что число точек равно целой степени двойки: $N = 2^n$. Каждый сигнал, таким образом, ассоциируется с вектором в 2^n-мерном пространстве. Дискретный базис Хаара в этом пространстве строится простым снятием значений хааровских функций $h_m(t)$ на равномерной сетке $\{t_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ на отрезке $[0, 1]$. При этом получившийся вектор нужно умножить на число, чтобы длина вектора была равна единице (ортонормированность!). Итак, получаем систему из 2^n векторов $H_0, \ldots, H_{2^n-1}$:

$$H_m(s) = (\sqrt{2})^{-n} h_m(2^{-n}s), \quad s = 0, \ldots, 2^n - 1. \tag{20}$$

Таким образом, над всеми уровнями стоит вектор H_0, все 2^n координат которого равны $2^{-n/2}$, а на нулевом уровне — вектор H_1, у которого первая половина координат равна $2^{-n/2}$, а вторая равна $-2^{-n/2}$. На первом уровне — два вектора: H_2 и H_3. У вектора H_2 первые 2^{n-2} координат равны $2^{(1-n)/2}$, следующие 2^{n-2} координат равны $-2^{(1-n)/2}$, остальные — нули. У вектора H_3 первая половина координат — нули, затем следуют 2^{n-2} координат, равных $2^{(1-n)/2}$,

и затем 2^{n-2} координат, равных $-2^{(1-n)/2}$. Наконец, на $(n-1)$-м уровне находятся векторы $H_{2^{n-1}}, H_{2^{n-1}+1}, \ldots, H_{2^n-1}$, каждый из которых имеет ровно две ненулевые координаты: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Вектор $H_{2^{n-1}+k}$ имеет эти координаты на позициях $2k$ и $2k+1$ соответственно. Векторы следующих уровней не строятся, поскольку мы уже имеем ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{2^n}$.

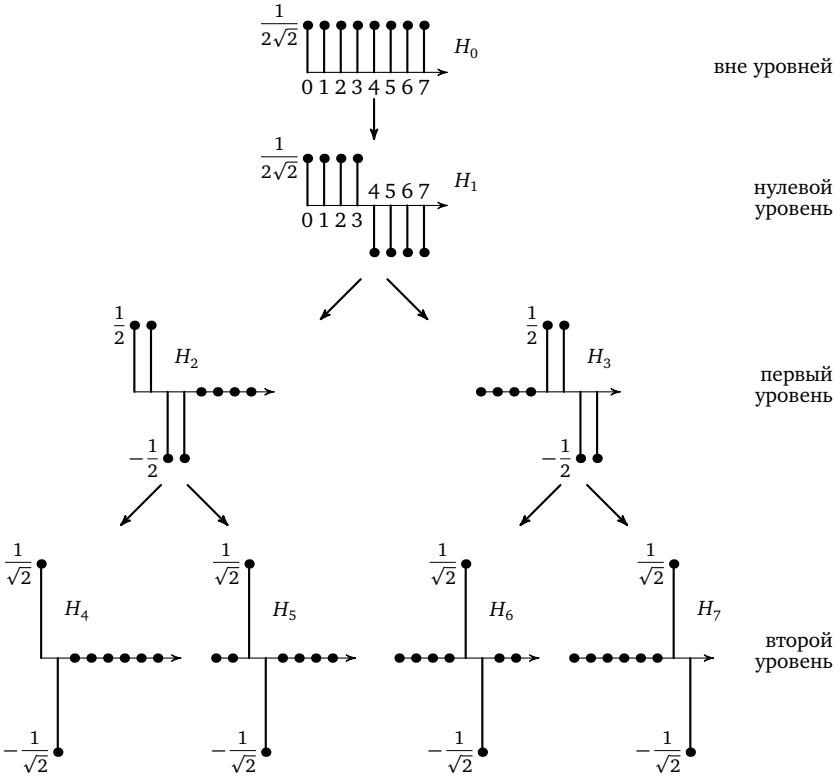


Рис. 19. Дискретная система Хаара при $n = 3$

Теорема 9. *При каждом $n \geqslant 0$ система векторов $\{H_m\}_{m=0}^{2^n-1}$ является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{R}^{2^n}$.*

Доказательство. Ортогональность доказывается так же, как в теореме 7 для системы функций Хаара. Поскольку число функций 2^n равно размерности пространства, эта система является базисом. □

Так же как для любого ортонормированного базиса, получаем формулу разложения произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^{2^n}$:

$$x = \sum_{m=0}^{2^n-1} (x, H_m) H_m, \tag{21}$$

при этом мы обозначаем коэффициенты разложения $(x, H_m) = d(m)$, а вектор из этих коэффициентов $d = (d(0), \ldots, d(2^n - 1))$ называем *преобразованием Хаара* вектора x.

Далее, обозначив через V_k подпространство $\mathbb{R}^{2^n}$, порожденное первыми 2^k векторами базиса Хаара $H_0, \ldots, H_{2^k-1}$, т. е. векторами первых k уровней, получаем формулу ортогональной проекции S_k на это пространство:

$$S_k x = \sum_{m=0}^{2^k-1} (x, H_m) H_m. \tag{22}$$

Теорема Джексона для дискретного Хаара устанавливается так же, как и ее непрерывный аналог (теорема 8). В формулировке мы для краткости обозначаем $2^n = N$.

Теорема 10. *Для любого* 1*-липшицева сигнала* $x \in \mathbb{R}^N$ *верно неравенство*

$$\|x - S_k x\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{2^k}. \tag{23}$$

Таким образом, если $|x(k) - x(k+1)| \leqslant \frac{1}{N}$ для всех $k = 0, \ldots, N-1$, то сумма первых 2^k слагаемых в разложении Хаара приближает вектор x с точностью $\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{2^k}$. Увеличение гладкости вектора x не приводит к улучшению приближения. Здесь, как и для непрерывного Хаара, имеет место явление насыщаемости. Это серьезный недостаток дискретной системы Хаара. Тем не менее все равно можно неплохо сжимать сигнал. Если, например, $N = 2^{20}$ (чуть больше миллиона), то при $k = 15$ получаем приближение сигнала частичной суммой ряда Хаара (22) с точностью $\varepsilon = \frac{\sqrt{2^{20}}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{2^{15}} < 0{,}01$. Таким образом, ошибка не более 1 % дает сжатие в $\frac{2^{20}}{2^{15}} = 32$ раза!

Какова сложность дискретного преобразования Хаара? Вычисление одного коэффициента $d(m)$ — это вычисление скалярного произведения (x, H_m), на что нужно не более N умножений и N сложений. Всего, таким образом, вычисление вектора d займет не более $2N^2$ операций. Это совершенно неприемлемая сложность, как

мы уже видели для дискретного преобразования Фурье. Можно ли сэкономить операции? Да, еще как! Векторы H_m сильно разреженные, т. е. у них много нулей. Так, при $m \geqslant 2^{n-1}$ (т. е. на $(n-1)$-м уровне) вектор H_m содержит всего две ненулевые компоненты. Это $H_m(2k) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $H_m(2k+1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Напомним, что $k = m - 2^{n-1}$. Таким образом, для вычисления $(x, H_m) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2k} + x_{2k+1})$ нужно одно вычитание и одно деление на $\sqrt{2}$, т. е. две операции. Поэтому всего на вычисление коэффициентов $d(2^{n-1}), \ldots, d(2^n - 1)$ уйдет $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ операций. Аналогично на $(n-2)$-м уровне, т. е. при каждом $m = 2^{n-2}, \ldots, 2^{n-1} - 1$, вектор H_m имеет четыре ненулевые компоненты, равные $\pm\frac{1}{2}$. Поэтому для вычисления $d(m) = (x, H_m)$ понадобится 4 операции (три сложения/вычитания и одно умножение на $\frac{1}{2}$). Следовательно, всего на $(n-2)$-й уровень уйдет также 2^n операций.

Продолжая, мы видим, что на каждый уровень уходит ровно 2^n операций. Всего имеется n уровней, а также вектор H_0 вне уровней, так что сложность дискретного преобразования Хаара не превосходит $(n+1) \cdot 2^n$. Это почти вдвое лучше, чем для быстрого преобразования Фурье, для которого нужно $(2n+1) \cdot 2^n$ операций. Но и это не все! Можно убрать множитель $n+1$ и тем самым сделать сложность линейно зависящей от $N = 2^n$. Для этого применяется быстрое преобразование Хаара. Это так называемое *быстрое вейвлет-преобразование*, или *каскадный алгоритм*. (Нам первый раз встретилось слово «вейвлет»!)

3.5. Быстрое вейвлет-преобразование, или Каскадный алгоритм

Несмотря на и так низкую сложность дискретного преобразования Хаара, остались ресурсы для дальнейшего уменьшения числа операций. Так, например, для вычисления $d(0) = (x, H_0)$ мы складываем все координаты вектора x, затем делим сумму на $2^{n/2}$. А для вычисления $d(1) = (x, H_1)$ мы находим сумму первых 2^{n-1} координат и вычитаем из нее сумму последних 2^{n-1} координат (результат снова делим на $2^{n/2}$). Получается, что мы дважды делали одни и те же вычисления: дважды находили сумму первых 2^{n-1} координат и то же самое делали со второй суммой. Выгоднее сделать так: найти первую сумму, поделить ее на $2^{n/2}$, результат обозначить через A, затем найти вторую сумму, поделить на $2^{n/2}$ и результат обозначить

через B. Тогда $d(1) = A - B$, $d(0) = A + B$. Мы уменьшили количество операций вдвое!

Идея каскадного алгоритма проста. Мы объясним ее для абстрактного набора из 2^n чисел $a_0, \ldots, a_{2^n-1}$. Разобьем числа на пары: первые два, следующие два и т. д. В каждой паре найдем сумму чисел и их разность (из первого вычитаем второе). Все разности мы складируем отдельно, назвав их последовательно $b_{2^{n-1}}, \ldots, b_{2^n-1}$. С суммами (их у нас 2^{n-1})) проделаем ту же операцию: разобьем на пары, найдем суммы и разности чисел в каждой паре, разности складируем, назвав их $b_{2^{n-2}}, \ldots, b_{2^{n-1}-1}$, а суммы оставим, повторим то же самое для них и т. д. Каждая итерация вдвое уменьшает количество чисел. После n итераций у нас останется одно число, а на складе будут храниться числа $b_1, \ldots, b_{2^n-1}$. Остается положить b_0 равным оставшемуся числу. Алгоритм завершен. Из данного вектора $a = (a_0, \ldots, a_{2^n-1})$ получился вектор $b = (b_0, \ldots, b_{2^n-1})$.

Каскадный алгоритм, осуществляющий преобразование Хаара, работает так же, только каждый раз суммы и разности двух чисел надо делить на $\sqrt{2}$. Итак, берем вектор $x \in \mathbb{R}^{2^n}$, полагаем $c_n = x$, разбиваем координаты вектора c_n на пары, находим суммы и разности чисел в каждой паре. Суммы, деленные на $\sqrt{2}$, составляют координаты вектора $c_{n-1} \in \mathbb{R}^{2^{n-1}}$ (этот вектор мы оставляем), а разности, деленные на $\sqrt{2}$, составляют координаты вектора $d_{n-1} \in \mathbb{R}^{2^{n-1}}$ (его отправляем на склад). Теперь повторяем то же самое с вектором c_{n-1} и т. д. Схема алгоритма показана на рис. 20. На k-й итерации мы делаем из вектора c_{n+1-k} векторы c_{n-k} и d_{n-k}, первый сохраняем, второй отправляем на склад. После n итераций остается один вектор размерности 1 (т. е. число) c_0. Полагаем $d_0 = c_0$ и получаем вектор $d \in \mathbb{R}^{2^n}$, последовательно соединив компоненты векторов $d_0, d_1, \ldots, d_{2^{n-1}}$. Алгоритм закончен: вектор d — это дискретное преобразование Хаара вектора x.

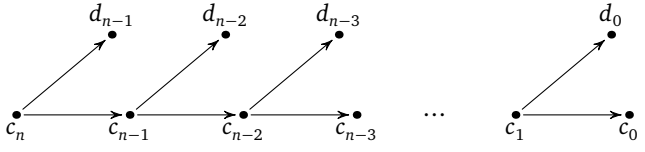


Рис. 20. Схема каскадного алгоритма

Теперь оценим сложность. На первой итерации делается 2^{n-1} сложений, столько же вычитаний, а затем $2 \cdot 2^{n-1}$ делений на $\sqrt{2}$.

Всего 2^{n+1} операций. Так как каждая следующая итерация повторяет предыдущую, только со вдвое меньшим количеством чисел, получаем всего $2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2^2$ операций.

Теорема 11. *Сложность каскадного алгоритма для дискретного преобразования Хаара равна* $4 \cdot 2^n - 4$.

Обозначив $N = 2^n$, получаем, что сложность равна $4N - 4$. В среднем это меньше, чем по 4 операции на каждый коэффициент. Удивительно! Например, при $n = 20$ (при этом $N \approx 10^6$) число операций меньше $4 \cdot 2^{20}$. А для быстрого преобразования Фурье оно равно $(2n+1) \cdot 2^n = 41 \cdot 2^{20}$. Ускорение в 10 раз!

Посмотрим, как меняются коэффициенты преобразования Хаара под влиянием шума. Напомним, что чувствительность к шуму является одним из главных недостатков системы Фурье. Шум в одной координате вектора x равномерно меняет все коэффициенты преобразования Фурье $\hat{x}$. Таким образом, преобразование Фурье не сохраняет локализованность помех.

Теперь возьмем преобразование Хаара вектора x и снова прибавим шум α к координате $x(0)$. Обозначив $\delta = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$, после прибавления шума получаем вектор $x + \alpha\delta$. Обозначив через d преобразование Хаара вектора δ, находим

$$d(m) = (\delta, H_m) = H_m(0) = \begin{cases} (\sqrt{2})^{-n}, & m = 0; \\ (\sqrt{2})^{j-n}, & m = 2^j,\ j = 0, \ldots, n-1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, из 2^n координат вектора d только $n+1$ ненулевых:

$$d = ((\sqrt{2})^{-n}, (\sqrt{2})^{-n}, (\sqrt{2})^{1-n}, 0, (\sqrt{2})^{2-n}, 0, 0, 0, (\sqrt{2})^{3-n}, 0, \ldots \\ \ldots, 0, (\sqrt{2})^{4-n}, 0, \ldots).$$

Шум, появившийся в одной координате вектора x, меняет не один, а $n+1$ коэффициентов в преобразовании Хаара — ровно по одной координате в каждом уровне. Но число $n+1$ по-прежнему мало по сравнению с общим числом коэффициентов 2^n. Например, при $n = 20$ из более чем миллиона коэффициентов изменится только 21. Итак,

преобразование Хаара сохраняет локализованность помех.

Более того, ненулевые элементы занимают вполне конкретные позиции. Так, у преобразования Хаара вектора δ ненулевые элементы имеют номера $0, 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}$. Следовательно, именно

эти координаты и будут изменены в преобразовании Хаара вектора $x + \alpha\delta$.

3.6. Всплески Хаара на прямой

Систему функций Хаара легко распространить с отрезка на всю прямую $\mathbb{R}$. Для этого нужно сделать три вещи:

1) убрать функцию h_0;

2) для всех остальных функций разрешить сдвиги по всей прямой;

3) добавить двоичные растяжения.

В результате мы получим систему функций $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, где $\psi = h_1$ (первая функция Хаара), j, k — произвольные целые числа. В системе Хаара на отрезке было $j \geqslant 0$ и $0 \leqslant k \leqslant 2^j - 1$.

Теорема 12. *Система функций $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ является базисом гильбертова пространства функций на прямой.*

Доказательство. Так же как и для системы Хаара на отрезке, доказываем, что данная система является ортонормированной. Сложнее доказать полноту. Для этого достаточно показать, что функция $h_0 = \chi_{[0,1]}$ может быть разложена по этой системе. Это делается в упражнении 17. Тогда данные функции будут включать систему Хаара на отрезке $[0, 1]$, и, значит, любая функция на отрезке $[0, 1]$ разлагается по данной системе. Поэтому по ней разлагается и любая функция на любом целом отрезке. Осталось любую функцию на прямой представить как бесконечную сумму функций на единичных отрезках. □

Здесь возникает видимый парадокс: система Хаара на прямой как-то обходится без функции h_0, а система на отрезке без нее обойтись не может. Разобраться с этим помогут упражнения 17 и 18 в конце раздела.

3.7. Достоинства и недостатки системы Хаара: что сохранить и с чем бороться?

Подведем предварительные итоги. Перечислим главные достоинства системы Хаара.

1. Локализованность. *Все функции системы имеют компактные носители, причем длина носителя стремится к нулю с ростом номера функции.*

Это свойство позволяет сохранить локализованность помех: прибавление шума к небольшому числу коэффициентов вектора меняет также небольшое число коэффициентов разложения.

2. Двоичная структура. *Все функции системы (кроме, возможно, тождественной константы) получаются из одной и той же функции с помощью двоичных сжатий и сдвигов аргумента.*

Так, все функции Хаара h_m, кроме h_0 (тождественной константы), являются сдвигами и сжатиями в 2^k раз (для различных целых k) функции h_1. Это свойство обеспечивает быстрое вычисление коэффициентов с помощью каскадного алгоритма, а кроме того, обеспечивает быстрый поиск оптимального значения числа уровней n для разложения заданной функции. Подробнее этот аспект будет затронут в следующем пункте.

Свойства 1 и 2 хотелось бы сохранить и развить в новых системах. А с чем бороться? С основными недостатками системы Хаара.

3. Низкие аппроксимационные свойства. *Функции Хаара плохо приближают гладкие функции, из-за чего эффект насыщаемости в теореме Джексона появляется уже при $r = 1$ (теорема 8).* Это ведет к медленной сходимости разложений Хаара и, как следствие, к необходимости хранить большое число коэффициентов. Происходит это из-за того, что функции Хаара не порождают многочленов большой степени (они, как мы видели, порождают константу, т. е. многочлен степени ноль).

Итак, *нужно, чтобы функции системы порождали многочлены высокой степени (чем выше, тем лучше).*

4. Низкая гладкость. *Функции Хаара разрывны.* Во многих приложениях приходится не только приближать сигнал, но и выполнять некоторые действия с приближением, например дифференцировать. Причем иногда (скажем, при численном решении дифференциальных уравнений) дифференцировать несколько раз. С функциями Хаара этого делать нельзя, поскольку они не только не дифференцируемы, но и не непрерывны.

Желательно, чтобы система состояла из гладких функций (чем выше гладкость, тем лучше).

Итак, наша главная задача: нужен «гладкий Хаар»!

Естественный вопрос — а существует ли он? Существуют ли системы, наследующие преимущества системы Хаара (свойства 1, 2) и лишенные его недостатков (свойств 3, 4)? Да, это системы всплесков (вейвлетов). Но построим мы их не сразу. У человечества на это ушло почти 80 лет, от появления системы Хаара (1909 год) до изобретения всплесков Мейера (1986 год) и Добеши (1988 год).

Мы начнем с того, что изучим подробнее двоичную структуру системы Хаара, которую хотелось бы перенести на другие системы.

3.8. Двоичная структура. Кратномасштабный анализ (КМА). Всплески

Таким мудреным термином, как «кратномасштабный анализ» (*англ.* multiresolution analysis), мы рискуем распугать всех читателей. Тем не менее без него не обойтись. И ничего сложного в нем нет. Он объяснит нам смысл двоичной структуры системы Хаара, чтобы мы смогли построить системы гладких функций с такой же двоичной структурой.

При построении базиса Хаара на прямой были задействованы две особые функции. Это функция h_0, которая не принадлежит базису, но порождает своими сдвигами пространство V_0 (в системе Хаара на прямой, как мы помним, функция h_0 принадлежала базису), и функция h_1, которая порождает все функции базиса. В самом деле, любая функция j-го уровня системы Хаара имеет вид

$$h_m(t) = 2^{j/2} h_1(2^j t - k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{24}$$

где $m = 2^j + k$. Здесь и далее мы считаем, что функции h_m продолжены тождественным нулем на всю числовую прямую. Для того чтобы получить функцию j-го уровня h_m, нужно взять функцию h_1, сдвинуть ее вправо по оси на k, а затем сжать относительно нуля в 2^j раз. Потом еще нормировать — умножить на $2^{j/2}$. Все функции Хаара получаются из h_1 таким способом. Что же касается функции h_0, то она, напротив, сама порождает функцию h_1 по формуле

$$h_1(t) = h_0(2t) - h_0(2t - 1). \tag{25}$$

А своими целочисленными сдвигами функция h_0 порождает пространство V_0 функций, постоянных на целых промежутках $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Если каждую функцию из V_0 сжать вдвое по оси t, то получится пространство V_1 функций, постоянных на половинных интервалах $[2^{-1}k, 2^{-1}(k+1))$. Повторяя, мы получаем все пространства V_j, $j \in \mathbb{Z}$. Каждое из них состоит из функций предыдущего пространства, сжатых вдвое. Таким образом, V_j состоит из функций, постоянных на двоичных интервалах j-го ранга $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$. Все функции Хаара уровней от минус бесконечности до $(n-1)$-го принадлежат пространству V_n. Частичная сумма ряда Хаара функции f по этим уровням является проекцией функции f на пространство V_n.

Теперь мы в состоянии дать общее определение.

Определение 3. *Кратномасштабным анализом* (*КМА*) называется система замкнутых подпространств $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве функций, обладающая следующими свойствами:

1) эта система расширяющаяся, т. е. каждое следующее пространство содержит предыдущее и не совпадает с ним;

2) пересечение всех пространств V_j содержит только нулевую функцию, т. е. тождественный ноль (свойство пустоты пересечения);

3) пространство V_j стремится ко всему гильбертову пространству функций при $j \to \infty$, т. е. любая функция может быть сколь угодно точно приближена функциями пространств V_j (свойство полноты);

4) каждое следующее подпространство есть двоичное сжатие предыдущего, т. е. для любой функции $f(t) \in V_j$ выполняется условие $f(2t) \in V_{j+1}$;

5) пространство V_0 порождено ортогональными друг другу целыми сдвигами некоторой функции φ.

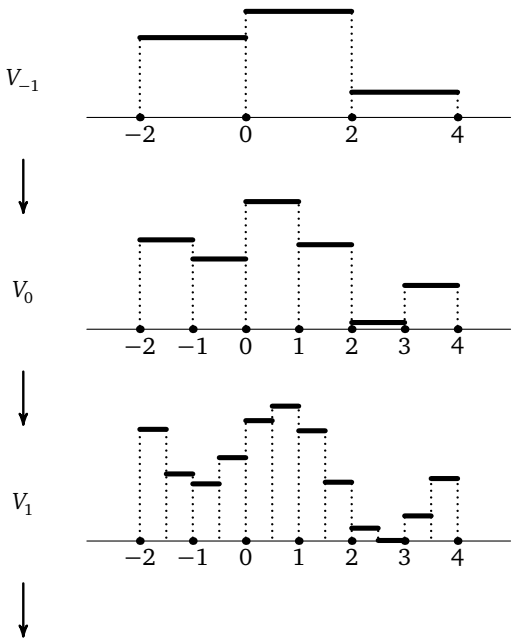


Рис. 21. Кратномасштабный анализ Хаара

Для системы Хаара на прямой функция φ — это h_0, а пространства V_j — пространства функций, постоянных на двоичных интервалах ранга j. Функция φ называется обычно *масштабирующей функцией* (scaling function). Так как ее целые сдвиги порождают V_0, двоичные сжатия пространства V_0 порождают пространство V_1, двоичные сжатия которого порождают пространство V_2, и т. д. И в другом направлении: двоичные растяжения пространства V_0 порождают пространство V_{-1}, двоичные растяжения которого порождают пространство V_{-2}, и т. д.

Таким образом, построение масштабирующей функции равносильно построению всего кратномасштабного анализа. Более того, в этом случае из масштабирующей функции φ легко получается и *всплеск-функция* (wavelet-function) ψ, сдвиги и двоичные сжатия которой формируют ортогональный базис гильбертова пространства — систему всплесков.

Определение 4. *Системой всплесков* на прямой $\mathbb{R}$ называется ортонормированный базис гильбертова пространства $L_2(\mathbb{R})$, состоящий из функций

$$\psi_{j,k}(t) = \{2^{j/2}\psi(2^j t - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}},$$

где $\psi_{0,0} = \psi$ — порождающая функция, называемая *всплеск-функцией*.

Заметим, что система Хаара на отрезке не является системой всплесков, а система Хаара на прямой является. Ее всплеск-функция — это $\psi = h_1$.

Каждый кратномасштабный анализ порождает систему всплесков. Поэтому построение системы всплесков сводится к построению масштабирующей функции φ. Этим мы займемся в следующих разделах, а пока скажем, почему именно двоичные сжатия функций так естественны для обработки сигналов.

Во-первых, они позволяют быстро вычислять коэффициенты разложения с помощью каскадного алгоритма. Но главная причина в другом. Помните игру, когда нужно угадать целое число от 1 до 1000, задавая вопросы: верно ли, что это число больше такого-то числа, или нет?

Плохая стратегия состоит в последовательном переборе: верно ли, что число больше 1, больше 2, больше 3 и т. д. При плохом стечении обстоятельств нам понадобится задать порядка тысячи вопросов, чтобы определить число. Оптимальная стратегия — метод бисекции, или деления пополам. Первый вопрос — больше ли это число 500, второй (в зависимости от полученного ответа) — боль-

ше ли оно 250 (или 750), и т. д. Каждый раз делим интервал пополам или примерно пополам, если его длина нечетная. Поскольку $1000 < 2^{10}$, не более чем за 10 вопросов число будет найдено. Теперь вернемся к приближению сигналов.

Если у нас есть функция f и мы не знаем, до какого уровня n брать разложение Хаара $f \sim S_n = \sum_{m=0}^{2^n-1} (f, h_m)h_m$, чтобы приблизить ее с данной точностью ε, возьмем это n произвольно. Находим проекцию S_n функции f на пространство V_n. Если $\|S_n - f\| > \varepsilon$, т. е. точка f отстоит от плоскости V_n дальше, чем нужно, то мы берем следующую плоскость V_{n+1}, которая имеет вдвое большую размерность. Таким образом, мы сразу удваиваем число функций Хаара, участвующих в разложении. Если и этого не достаточно, то снова удваиваем число функций, взяв V_{n+2}, и далее действуем так же, пока не получим нужного приближения. Это и есть оптимальная стратегия.

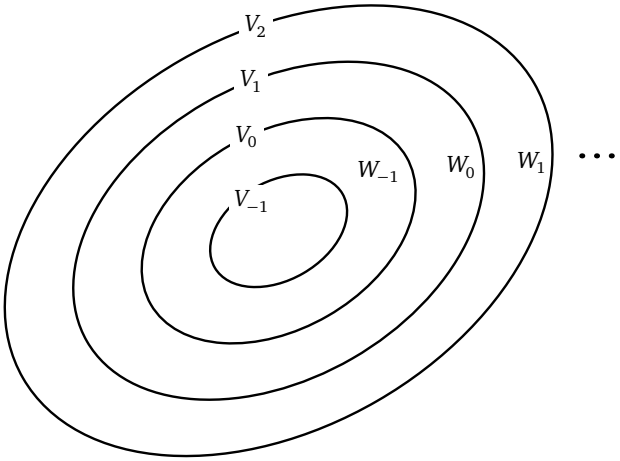


Рис. 22. Кратномасштабный анализ

Обозначим через W_j ортогональное дополнение пространства V_j в пространстве V_{j+1}. Иными словами, W_j состоит из элементов пространства V_{j+1}, перпендикулярных V_j. Для каждого j пространство V_{j+1} есть прямая сумма пространств W_j и V_j. Согласно свойствам 1 и 2 все пространства W_j ортогональны друг другу (в частности, пересекаются только по нулю) и их прямая сумма образует все гильбертово пространство.

Теорема 13. *Если $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — кратномасштабный анализ, а функция ψ такова, что ее целочисленные сдвиги образуют ортонормированный базис пространства W_0, то ψ является всплеск-функцией.*

Доказательство. При каждом j функции $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ принадлежат W_j и ортогональны друг другу. Так как W_j ортогонально $W_{j'}$ при $j \neq j'$, функция $\psi_{j,k}$ ортогональна $\psi_{j',k'}$ при любых $j', k' \in \mathbb{Z}$, если только $j' \neq j$. Таким образом, все функции $\psi_{j,k}$ ортогональны друг другу. А поскольку прямая сумма пространств W_j образует все гильбертово пространство, система $\{\psi_{j,k}\}_{k,j}$ является базисом. □

Таким образом, при построении всплесков нужно сохранить двоичную структуру, как у системы Хаара, т. е. пространства $\{V_j\}$ должны образовывать кратномасштабный анализ. Вторая система всплесков появилась примерно через четверть века после Хаара. Это система Шеннона—Котельникова.

Упражнения

10. Оцените количество коэффициентов

а) Фурье;

б) Хаара,

необходимое для приближения в гильбертовом пространстве функции $f \in C^2$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, при условии, что $|f''| \leqslant 10$.

11. Тот же вопрос для функции $f \in C^3$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

12. Найдите все коэффициенты c_m разложения по системе Хаара $f(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m h_m(t)$ для функции f на отрезке $[0, 1]$:

а) $f(t) = \chi_{[0,1/2]}$;

б) $f(t) = \chi_{[0,3/4]}$;

в) $f(t) = \chi_{[3/4,1]}$;

г) $f(t) = \chi_{[3/8,1/2]}$;

д)* $f(t) = \chi_{[0,1/3]}$;

е) $f(t) = t$;

ж) $f(t) = t^2$.

13. Применив каскадный алгоритм, найдите преобразование Хаара дискретного сигнала:

а)[1] $x = (3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$;

[1]На экзамене студентам было предложено узнать последовательность чисел, за что начислялся дополнительный балл.

б) $x = (2, 7, 1, 8, 2, 8, 1, 8)$;
в) $x = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)$;
г) $x = (1, 4, 0, 7, 1, 7, 8, 9)$.

14. Применив обратный ход каскадного алгоритма, найдите обратное преобразование Хаара дискретного сигнала:

а) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$;
б) $x = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$.

15. Какое из двух действий сложнее (требует большего числа операций при условии, что используется наилучший из описанных нами алгоритмов)?

а) Вычислить преобразование Фурье дискретного сигнала размера $N = 2 \cdot 10^6$.

б) Вычислить преобразование Хаара дискретного сигнала размера $N = 9 \cdot 10^6$.

16. Оцените количество коэффициентов

а) Фурье

б) Хаара,

необходимое для приближения дискретного сигнала x размерности $N = 10^6$ гладкости C^2 с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ (вторая производная сигнала по модулю не превосходит единицы).

17. Найдите коэффициенты $c_{j,k}$ разложения функции $\chi_{[0,1]}$ по системе Хаара на прямой.

18. Все функции системы Хаара на прямой имеют нулевое среднее, т. е. $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}\, dt = 0$. Как такая система может быть базисом в гильбертовом пространстве? Ведь любая конечная линейная комбинация этих функций также имеет нулевое среднее. Значит, все функции гильбертова пространства через них выразить нельзя? Объясните это противоречие.

19*. Докажите теорему 8.

4. Уходим в частотную область. Система Шеннона—Котельникова

Следующая система функций в каком-то смысле двойственна системе Хаара. Она достаточно естественным образом возникает в электронике, поэтому инженеры придумали ее раньше математиков. Для ее построения нам нужно уйти в область частот, т. е. сделать преобразование Фурье.

4.1. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье функции f определяется формулой

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt.$$

Иначе говоря, $\hat{f}(\xi) = (f(t), e^{2\pi i \xi t})$ (напомним, что в случае комплексных функций $(f, g) = \int f \bar{g}\, dt$). Это непрерывный аналог формул (7) для коэффициентов ряда Фурье $c_k = (f(t), e^{2\pi i k t})$, где вместо целого номера коэффициента k взят непрерывный параметр ξ, только интеграл берется не по периоду длины 1, а по всей прямой (период бесконечный). Переменная ξ играет роль частоты колебаний. Поэтому ξ называют *частотной переменной*, она пробегает *частотную область* от $-\infty$ до $+\infty$. А исходная переменная t называется *временно́й* (она обозначает время), и меняется она от $-\infty$ до $+\infty$ во временно́й области. Таким образом, преобразование Фурье — это переход из временно́й области в частотную. Исходная функция f живет во временно́й области, а ее преобразование Фурье — в частотной. Например, для функции $f(t) = \chi_{[-1/2,1/2]}$ имеем

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt = \int\limits_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \xi t}\, dt = \frac{1}{-2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi t}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}. \quad (26)$$

Другие важные примеры — преобразования Фурье от e^{-t^2} и $\dfrac{1}{1+t^2}$ (упражнения 21, 22).

Преобразование Фурье является линейным оператором в гильбертовом пространстве функций на прямой $\mathbb{R}$. Оказывается, этот оператор ортогональный, т. е. он является движением гильбертова пространства: он не меняет скалярного произведения функций,

или, что то же самое, сохраняет длины векторов. Этот замечательный факт называется *равенством Парсеваля*:

$$\|\hat{f}\| = \|f\|. \tag{27}$$

Более того, у этого оператора почти такой же обратный оператор — *обратное преобразование Фурье*: $\check{g}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{2\pi i\xi t}\,d\xi$. Он переводит частотную область во временну́ю область. Если $g = \hat{f}$, то $f = \check{g}$. Если применить обратное преобразование Фурье к функции $\chi_{[-1/2,1/2]}$, то в точности так же, как и с прямым преобразованием Фурье в формуле (26), получим функцию $\varphi(t) = \dfrac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$. Следовательно, $\widehat{\varphi} = \chi_{[-1/2,1/2]}$.

Нам понадобятся еще два свойства преобразования Фурье.

Преобразование Фурье сдвига:

$$\widehat{f(\cdot + a)} = e^{2\pi i a\xi}\hat{f}; \quad \hat{f}(\xi + a) = \widehat{e^{-2\pi i a t} f}(\xi). \tag{28}$$

Таким образом, преобразование Фурье переводит сдвиг функции в умножение функции на комплексную экспоненту. Доказывается это прямым вычислением:

$$\widehat{f(\cdot + a)}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t+a)e^{-2\pi i\xi t}\,dt = e^{2\pi i\xi a}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t+a)e^{-2\pi i\xi(t+a)}\,d(t+a) =$$
$$= e^{2\pi i a\xi}\hat{f}(\xi);$$
$$\hat{f}(\xi + a) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i(\xi+a)t}\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi i t a} f(t))e^{-2\pi i\xi t}\,dt = \widehat{e^{-2\pi i a t} f}.$$

Преобразование Фурье производной:

$$\widehat{f'} = 2\pi i\xi\hat{f}; \quad [\hat{f}]' = -\widehat{2\pi i t f(t)}. \tag{29}$$

Иными словами, операцию взятия производной преобразование Фурье переводит в умножение функции на аргумент (и на $2\pi i$). Для доказательства второго равенства достаточно продифференцировать интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\xi t}\,dt$ по параметру ξ; для доказательства первого — взять интеграл по частям или (аналогично второму равенству) продифференцировать формулу обратного преобразования Фурье по параметру t.

4.2. Формула старой пластинки

Чем отличается старая звукозапись от современной? По каким признакам наше ухо безошибочно определяет, что эта пластинка записана давно? Помехи, треск, шум тут ни при чем — запись можно почистить, и она все равно останется старой. Главное отличие — в старой записи отсутствуют высокие частоты. Все звуки мягкие, приглушенные, как будто срезали острые углы. Звукозапись первой половины XX века не умела хранить сигналы высокой частоты. Поэтому старая пластинка просто отрезала от звука все компоненты с высокими частотами. Примерно то же делает формула отсчетов — одна из первых замечательных формул теории обработки сигналов, на которой будет основана конструкция всплесков Шеннона—Котельникова.

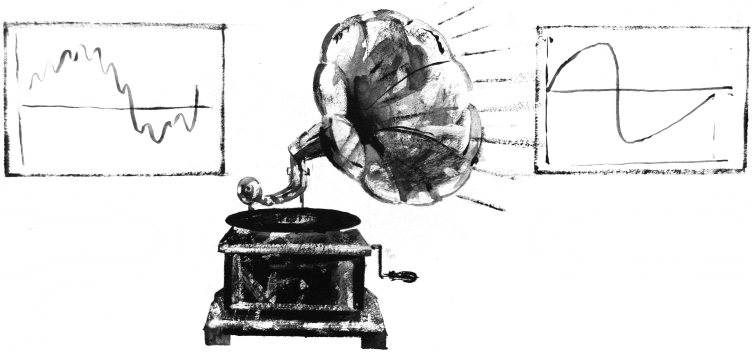


Рис. 23. Старая пластинка

Обозначим через V_0 пространство функций, частоты которых по модулю не превосходят $\frac{1}{2}$. Иными словами, преобразование Фурье сосредоточено на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Таким образом,

$$V_0 = \left\{ f \mid \operatorname{supp} \hat{f} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\}.$$

Существуют ли такие функции? Да, достаточно взять любую функцию $g(\xi)$, сосредоточенную на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, и применить к ней обратное преобразование Фурье. Например, если $g = \chi_{[-1/2,1/2]}$, то, как мы доказали в предыдущем пункте, $\varphi = \check{g} = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$. Таким образом, $\varphi \in V_0$. Одну функцию из пространства V_0 мы уже знаем.

А еще? А еще — любой сдвиг функции φ. В самом деле, согласно формулам (28) преобразование Фурье функции $\varphi(\cdot + a)$ равно $e^{2\pi i a\xi}\widehat{\varphi} = e^{2\pi i a\xi}\chi_{[-1/2,1/2]}$, и оно сосредоточено на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Оказывается, целых сдвигов функции φ достаточно для полного описания пространства V_0. Конечно, это пространство содержит и другие функции, но все они приближаются линейными комбинациями целых сдвигов функции φ.

Предложение 2. *Система функций* $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, *где* $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$, *является ортонормированным базисом пространства* V_0.

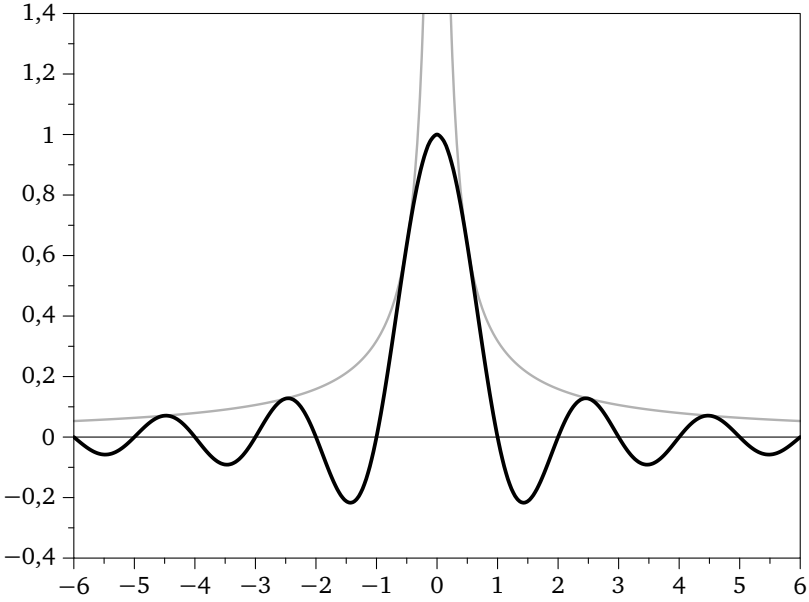


Рис. 24. Функция $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ (черная линия) и мажорирующая ее функция $y = \frac{1}{\pi|t|}$ (серая линия)

Доказательство. Преобразование Фурье функции $\varphi(t-k)$ — это $e^{-2\pi i k\xi}\chi_{[-1/2,1/2]}$. На единичном отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ эта функция совпадает с $e^{-2\pi i k\xi}$, а за пределами этого отрезка равна нулю. Функции $\{e^{-2\pi i k\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортогональный базис гильбертова пространства функций на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Итак, система функций $\{\varphi(\cdot - x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ переводится преобразованием Фурье в ортонормированный базис $\{e^{-2\pi ik\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ пространства функций, сосредоточенных на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. А поскольку преобразование Фурье является движением, сама эта система также является ортонормированным базисом пространства V_0. $\square$

Как и для любого ортонормированного базиса, разложение функции $f \in V_0$ получается по формуле $f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (f, \varphi(\cdot - k))\varphi(\cdot - k)$. Вычислим коэффициенты. Так как $\operatorname{supp} \hat{f} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и $\widehat{\varphi} = \chi_{[-1/2,1/2]}$, имеем

$$(f, \varphi(\cdot - k)) = (\hat{f}, e^{-2\pi i\xi k}\widehat{\varphi}) = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f} e^{2\pi i\xi k}\overline{\widehat{\varphi}}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{-1/2}^{1/2} \hat{f} e^{2\pi i\xi k}\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f} e^{2\pi i\xi k}\, d\xi = f(k).$$

Таким, образом, коэффициент при функции $\varphi(t - k)$ равен $f(k)$. Мы доказали *формулу отсчетов* (sampling formula) для разложения функций с ограниченными частотами.

Теорема 14. *Для любой функции $f \in V_0$ выполнено равенство*

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\varphi(t - k), \tag{30}$$

где $\varphi(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$.

Это удивительная формула! Она показывает, что функция, частоты которой ограничены отрезком $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, целиком определяется значениями только в целых точках. Поэтому хранить непрерывный сигнал, частоты которого ограничены, очень просто: храним значения в целых точках $f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, а потом восстанавливаем сигнал по формуле отсчетов (14).

Разумеется, на практике мы храним значения не во всех целых точках, а лишь в конечном числе, скажем, для $|k| \leqslant N$. Функция, восстановленная по «урезанной» формуле отсчетов $\sum\limits_{k=-N}^{N} f(k)\varphi(x - k)$, уже не будет совпадать с f, но будет хорошо приближать ее с ростом N.

Оценка скорости приближения делается уже без теоремы Джексона и даже не через гладкость функции f. Согласно теореме Пэли—Винера любая функция с ограниченными частотами является бес-

конечно гладкой, так что $f \in C^\infty$ всегда. А скорость приближения зависит просто от убывания функции $f(t)$ при $t \to \infty$.

Если, например[1], $f(t) = O(t^{-r})$ при $t \to \infty$, где $r > \frac{1}{2}$, то коэффициенты разложения $f(k)$ в формуле отсчетов убывают как $|k|^{-r}$, значит, величину отрезанного хвоста можно оценить. Пользуясь тем, что система $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ортонормированна, и тем, что $\sum\limits_{|k|>N} |k|^{-2r} \leqslant \leqslant C_r N^{1-2r}$, получаем

$$\left\| f(t) - \sum_{|k|\leqslant N} f(t)\varphi(x-k) \right\|_2^2 = \sum_{|k|>N} |f(k)|^2 \leqslant C \sum_{k>N} k^{-2r} \leqslant CC_r N^{1-2r}.$$

Итак,

$$\left\| f(t) - \sum_{|k|\leqslant N} f(t)\varphi(x-k) \right\|_2 = O(N^{1/2-r})$$

(здесь константа C такова, что $|f(k)| < C|k|^{-r}$ при всех достаточно больших k). Например, если $f(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to \infty$, то для приближения функции с точностью ε нужно взять примерно $N = \frac{1}{\varepsilon}$. На практике достаточно хранить несколько сотен коэффициентов (т. е. значений функции f в целых точках).

Поскольку во времена зарождения теории передачи и обработки сигнала, в середине XX века, все используемые сигналы были сильно ограничены по частоте (вспомним старые музыкальные записи), формула отсчетов постоянно использовалась. О ее важности говорит уже то, что открыли ее независимо четыре (!) ученых в разное время: американцы Гарри Найквист (Harry Nyquist) в первоначальном виде в 1928 году и Клод Шеннон (Claude Shannon) в 1949 году, англичанин Эдмунд Уиттекер (Edmund Whittaker) в 1933 году и советский ученый Владимир Александрович Котельников в 1933 году[2]. Функции, *ограниченные по частоте* (band limited functions), стали важнейшим предметом изучения в теории обработки сигнала.

А как узнать, будет ли заданный сигнал f ограничен по частоте? Можно ли к нему применять формулу (30)? Для этого нужно выпол-

---

[1]Хотя частотная локализация и «мешает» слишком быстрому убыванию на бесконечности, убывания со скоростями до $O\left(\frac{1}{t}\right)$ включительно вполне возможны — собственно, такие функции и получаются из правой части формулы (30).

[2]Уиттекер прожил 82 года, Шеннон — 84, Найквист — 87, Котельников — 96. Вот как занятие теорией обработки сигналов благоприятно влияет на здоровье!

нить преобразование Фурье, но на практике это очень непростая задача. На самом деле узнавать ничего не нужно. Ряд (30) дает формулу для линейного отображения произвольного сигнала f в пространство ограниченных по частоте функций V_0. И это отображение является проекцией, правда, не ортогональной. В самом деле, обозначим

$$[P_0 f](t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\varphi(t-k), \tag{31}$$

где $\varphi(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$. Конечно, нужно, чтобы бесконечная сумма в правой части имела смысл, поэтому мы будем предполагать, что f убывает на бесконечности по крайней мере быстрее, чем $O\left(\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}\right)$. Любую такую функцию будем называть *допустимой*. Поскольку $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — базис пространства V_0, имеем $P_0 f \in V_0$ для любой допустимой функции f. С другой стороны, из формулы отсчетов следует, что если $f_0 \in V_0$, то $P_0 f_0 = f_0$, т. е. P_0 — тождественный оператор на V_0. Следовательно, P_0 — проекция пространства допустимых функций на V_0. Таким образом, формула отсчетов, примененная к любому допустимому сигналу f, убирает все высокие частоты, т. е. делает примерно то же, что делает со звуковым сигналом старая пластинка. Поэтому правильнее было бы называть ее формулой старой пластинки. Как построить систему всплесков на основе этой формулы, мы увидим в следующем пункте.

А как же все-таки получить ортогональную проекцию на V_0? Для этого удобно перейти в частотную область, т. е. выполнить преобразование Фурье. Обозначим через S_0 оператор ортогональной проекции гильбертова пространства $L_2(\mathbb{R})$ на V_0.

Преобразование Фурье является движением гильбертова пространства, и потому оно сохраняет ортогональные проекции. Значит, для заданной функции f Фурье-образ $\widehat{S_0 f}$ должен быть проекцией $\hat{f}$ на образ пространства V_0 в частотной области. Но этот образ (по определению V_0) — это пространство функций, сосредоточенных на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Тем самым $\widehat{S_0 f}$ — проекция $\hat{f}$ на пространство функций, сосредоточенных на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. А ортогональная проекция на такое пространство устроена совсем просто: мы берем функцию $\hat{f}$ и заменяем ее нулем за пределами отрезка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, а на самом отрезке не меняем.

Мы доказали следующий результат.

Лемма 2. *Для любой допустимой функции f выполнено равенство*

$$\widehat{S_0 f}(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi), & |\xi| \leqslant \frac{1}{2}; \\ 0, & |\xi| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, ортогональная проекция на пространство V_0 просто обнуляет преобразование Фурье функции f за пределами отрезка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Она обрезает все частоты функции, не входящие в этот промежуток (высокие частоты), оставляя нетронутыми частоты на отрезке (низкие частоты); см. рис. 25.

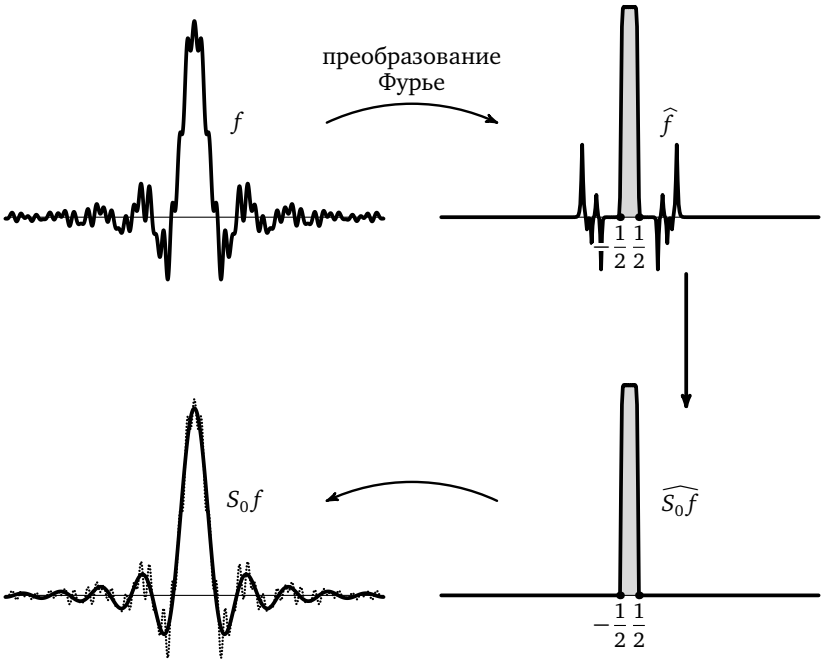


Рис. 25. Формула старой пластинки

4.3. Всплески Шеннона—Котельникова

Отрезок длины 1 в определении пространства V_0 и в формуле отсчетов взят для простоты. Те же рассуждения можно провести и с любым другим отрезком $[-A, A]$, при этом в формуле отсчетов

нужно взять значения функции f не в точках $k \in \mathbb{Z}$, а в точках $\frac{k}{2A}$ и функцию φ сжать в $2A$ раз по оси абсцисс. Чем больше отрезок, тем чаще должна быть сетка, на которой мы берем значения функции. Это вполне логично: чем шире пространство функций, тем больше должно быть коэффициентов разложения. Для наших целей достаточно взять A в виде целой степени двойки. Определим пространства

$$V_j = \{f \mid \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-2^{j-1}, 2^{j-1}]\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Сделав линейную замену переменных $t \mapsto 2^j t$ в теореме 14 и в лемме 2, получаем следующий результат.

Теорема 15. *Для любого $j \in \mathbb{Z}$ система функций*

$$\{2^{j/2}\varphi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

где $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$, является ортонормированным базисом пространства V_j. Оператор (неортогональной) проекции P_j на это пространство дается формулой

$$[P_j f](t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2^{-j}k)\varphi(2^j t - k). \tag{32}$$

Оператор S_j ортогональной проекции на пространство V_j определяется следующей формулой:

$$\widehat{S_j f}(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi), & |\xi| \leqslant 2^{j-1}; \\ 0, & |\xi| > 2^{j-1}. \end{cases}$$

Таким образом, ортогональная проекция обрезает все частоты функции f за пределами отрезка $[-2^{j-1}, 2^{j-1}]$.

Теорема 16. *Пространства $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ образуют кратномасштабный анализ, а функция $\psi(t) = 2\varphi(2t) - \varphi(t)$ является всплеск-функцией.*

Доказательство. Пространства V_j расширяются с ростом j, а в пределе заполняют все гильбертово пространство, и $f(t) \in V_j$ тогда и только тогда, когда $f(2t) \in V_{j+1}$. Таким образом, свойства 1—4 в определении кратномасштабного анализа выполнены. А так как сдвиги функции φ образуют ортонормированный базис пространства V_0, выполнено и свойство 5. Далее,

$$\widehat{\psi}(\xi) = 2\widehat{\varphi(2\cdot)} - \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \widehat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-1,-1/2)\cup[1/2,1)}.$$

Итак, $\widehat{\psi}(\xi)$ — характеристическая функция множества $\left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Она принадлежит V_1, поскольку $\operatorname{supp} \widehat{\psi} \subset [-1, 1]$, и ортогональна V_0, поскольку $\psi|_{[-1/2,1/2]} \equiv 0$. Значит, $\psi \in W_0$. Напомним, что W_0 — ортогональное дополнение пространства V_0 в пространстве V_1. Осталось показать, что целые сдвиги функции ψ образуют ортонормированный базис пространства W_0, после чего можно будет сослаться на теорему 13.

Преобразование Фурье переводит функции $\psi(\cdot - k)$ в функции $e^{2\pi i k\xi}$ на множестве $\left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Это множество составляет две части периода $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: достаточно сдвинуть левый отрезок на $+1$, а правый на -1. Следовательно, 1-периодические функции на этом множестве те же, что и на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. А поскольку система $\{e^{2\pi i k\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис гильбертова пространства на отрезке, она образует таковой и на данном множестве. $\square$

Таким образом, кратномасштабный анализ пространств функций с ограниченными частотами $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ порожден масштабирующей функцией φ и соответствует системе всплесков с функцией ψ, где

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}; \quad \psi(t) = \frac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t}. \tag{33}$$

Эта система всплесков называется системой Шеннона—Котельникова. Она в некотором смысле двойственна к системе Хаара. Если в системе Хаара масштабирующая функция $\varphi_{\text{Х}}$ — характеристическая функция единичного отрезка $\chi_{[0,1]}$, то в системе Шеннона—Котельникова масштабирующей функцией выступает образ Фурье такой (сдвинутой) характеристической функции: $\varphi_{\text{ШК}} = \widehat{\chi_{[-1/2,1/2]}}$. В системе Хаара функции наилучшим образом локализованы и не являются гладкими, в то время как в системе Шеннона—Котельникова все наоборот: функции чрезвычайно гладкие (аналитические!), но при этом плохо локализованные. В отличие от системы Фурье, они все-таки убывают: $\psi(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to \infty$. Поэтому локализацией эти всплески обладают. Но убывают они медленно, и это главный недостаток всплесков Шеннона—Котельникова. Плохая локализация (как и для системы Фурье) приводит к распространению шума на всю область и замедляет работу каскадного алгоритма.

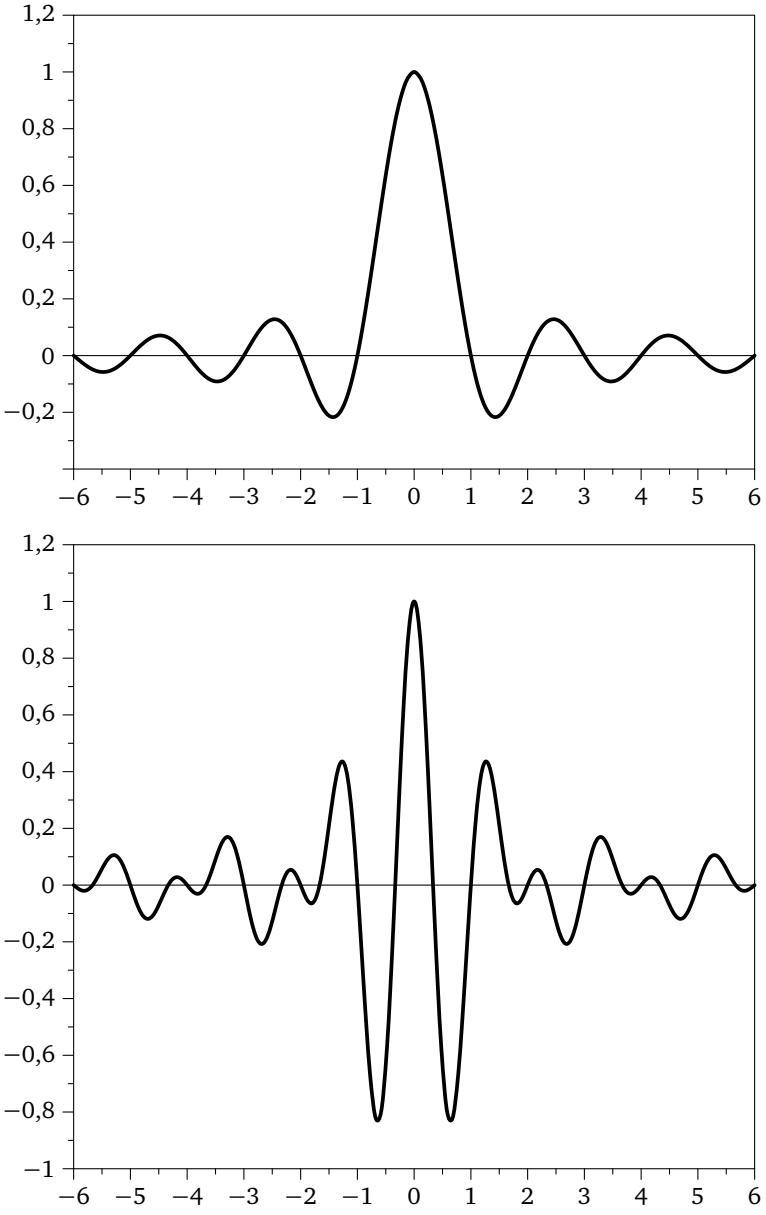


Рис. 26. Графики функций $\varphi(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ (сверху) и $\psi(t) = \dfrac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t}$ (снизу)

Упражнения

20. Вычислите преобразование Фурье функции $f(t)$:

а) $f(t) = e^{-|t|}$;

б) $f(t) = e^{-|t|} \sin t$;

в) $f(t) = h_1(t)$ (первая функция Хаара);

г) $f(t) = 1 - |t|$, $|t| \leqslant 1$, $f(t) = 0$, $|t| > 1$.

21. а) Вычислите обратное преобразование Фурье функции $f(t) = e^{-|t|}$.

б) Воспользовавшись результатом предыдущего пункта, вычислите преобразование Фурье функции $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

22. Вычислите преобразование Фурье функции $f(t) = e^{-t^2/2}$, зная, что $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$.

23. Докажите формулы дифференцирования преобразования Фурье (29). Выведите аналогичные формулы для обратного преобразования Фурье.

24. Используя результат предыдущего упражнения, докажите, что если функция f принадлежит C^r и $\int\limits_{\mathbb{R}} |f^{(r)}|\, dt < \infty$, то $\hat{f}(\xi) = o(\xi^{-r})$ при $\xi \to \infty$, и обратно, если $\int\limits_{\mathbb{R}} (|\xi|^r + 1)|\hat{f}|\, d\xi < \infty$, то $f \in C^r$.

25. Найдите проекцию P_0 на пространство функций с ограниченными частотами $V_0 = \left\{ g \in L_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \hat{g} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\}$ для следующих функций:

а) $f(t) = \dfrac{\sin 2\pi t}{t^2 - 1}$;

б) $f(t) = \dfrac{\sin^2 3\pi t}{t^2}$;

в) $f(t) = \dfrac{\sin \pi t}{t(t^2 - 4)}$.

26. Найдите ортогональную проекцию S_1 на пространство функций с ограниченными частотами

$$V_1 = \{ g \in L_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \hat{g} \subset [-1, 1] \}$$

для следующих функций:

а) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$;

б) $f(t) = \dfrac{\sin 10\pi t}{10\pi t}$.

5. Всплески Мейера

В 1986 году Ив Мейер создал замечательную систему функций, за которую через 30 лет получил абелевскую премию. Она обладала всеми достоинствами системы Шеннона—Котельникова, но при этом быстро убывала на бесконечности и поэтому была более удобна в использовании. В отличие от системы Шеннона—Котельникова, система Мейера была не взята «из жизни», а полностью, от начала до конца, придумана. Это чисто математическая конструкция, причем очень хитрая и тонкая. Многие считают, что именно с системы Мейера началась современная теория всплесков. Прежде чем излагать конструкцию Мейера, надо четко сформулировать задачу, которую она решала.

5.1. Временно-частотная локализация

Существует прямая связь между гладкостью функции и скоростью убывания ее преобразования Фурье при $\xi \to \infty$. Чем бóльшую гладкость имеет функция, тем быстрее убывает ее преобразование Фурье, и наоборот. Если функция f принадлежит C^r и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f^{(r)}|\, dt < \infty,$$

то $\hat{f}(\xi) = o(\xi^{-r})$ при $\xi \to \infty$. Обратно, если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (|\xi|^r + 1)|\hat{f}|\, d\xi < \infty,$$

то $f \in C^r$. То же верно и для обратного преобразования Фурье. Есть небольшой зазор между необходимыми и достаточными условиями, и он непреодолим. Существуют примеры непрерывных функций, когда $\hat{f}(\xi)$ убывает медленнее, чем $\xi^{-\varepsilon}$ при очень малых $\varepsilon > 0$. С другой стороны, функция $f = \chi_{[-1/2,1/2]}$ разрывна, но для нее, как мы знаем, $|\hat{f}(\xi)| \leqslant |\xi|^{-1}$.

Для всплесков важно и то и другое: функция φ должна быстро убывать (желательно даже иметь компактный носитель) и должна быть гладкой, т. е. ее преобразование Фурье должно быстро убывать. По отдельности эти свойства достижимы. Всплески Хаара имеют компактный носитель, но медленно убывающее преобразование Фурье (убывает как ξ^{-1} при $\xi \to \infty$). Всплески Шеннона—Котельникова, напротив, медленно убывают, но имеют преобразование

Фурье с компактным носителем. Совместимы ли эти два свойства? Не вполне. Согласно теореме Пэли—Винера и функция, и ее преобразование Фурье не могут иметь компактный носитель. Более того, существует принцип неопределенности Гейзенберга, согласно которому обе функции не могут слишком быстро убывать. Наибольшее одновременное убывание достигается на функции Гаусса $f(t) = e^{-t^2/2}$, которая совпадает со своим преобразованием Фурье (упражнение 22).

Итак, никакая функция не может слишком быстро убывать и во временно́й, и в частотной областях одновременно. Однако достаточно быстрое убывание, например, как у той же функции Гаусса, возможно. На протяжении почти полувека математики пытались построить системы всплесков, которые сочетали бы быстрое убывание с гладкостью. Это системы Батла—Лемарье (см., например, [3, 14]). Наиболее удачной и используемой до сих пор стала конструкция Мейера.

5.2. Конструкция всплесков Мейера

Основная идея Мейера[1] состояла в том, чтобы немного подправить функцию φ, порождающую всплески Шеннона—Котельникова, так, чтобы она стала быстро убывающей при $t \to \infty$ (по крайней мере, быстрее, чем $O\left(\frac{1}{t}\right)$) и при этом осталась гладкой. Для этого нужно изменить ее преобразование Фурье $\widehat{\varphi} = \chi_{[-1/2,1/2]}$, сделав его гладким, — это обеспечит убывание функции φ (которую можно будет найти как обратное преобразование Фурье от подправленной функции).

Таким образом, нужно попробовать сгладить индикаторную функцию отрезка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, чтобы при этом сохранились все свойства порождаемых ее обратным преобразованием Фурье φ всплесков. Главное — ортогональность целых сдвигов функции φ и порождаемый ею кратномаштабный анализ.

В доказательстве ортогональности целых сдвигов мы существенно использовали, что функция $\widehat{\varphi}$ является кусочно постоянной. Чтобы ослабить это требование, нам понадобится следующий критерий ортогональности целых сдвигов.

---

[1]Ив Мейер (Yves Meyer, род. 1939) — французский математик, один из основоположников теории всплесков. В 1986 году построил гладкую быстро убывающую систему всплесков (всплески Мейера), которая активно используется до сих пор. В 2017 году был удостоен престижнейшей Абелевской премии.

Лемма 3. *Целые сдвиги функции φ с компактным носителем являются ортонормированными тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 \equiv 1. \tag{34}$$

Целые сдвиги функции ψ ортогональны всем целым сдвигам функции φ (обе — с компактным носителем) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(\xi+k)\overline{\widehat{\varphi}}(\xi+k) \equiv 0. \tag{35}$$

Функция в левой части равенства (34), которую мы обозначим через $\Phi(\xi)$, называется *периодизацией* функции $|\widehat{\varphi}(\xi)|^2$. Ясно, что функция $\Phi(\xi)$ имеет период 1. Лемма 3, таким образом, утверждает две вещи:

1) *функция φ обладает ортонормированными целыми сдвигами, если и только если периодизация функции $|\widehat{\varphi}|^2$ является тождественной единицей*;

2) *целые сдвиги функции ψ ортогональны всем целым сдвигам функции φ, если и только если периодизация функции $\widehat{\psi}\overline{\widehat{\varphi}}$ является тождественным нулем*.

Оба утверждения доказываются одинаково, поэтому мы приведем доказательство только первого.

Доказательство. Для любого целого n имеем

$$(\Phi(\xi), e^{2\pi in\xi}) = \int_0^1 \Phi(\xi)e^{-2\pi in\xi}\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 e^{-2\pi in\xi}\,d\xi =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 e^{-2\pi in(\xi+k)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{-2\pi in\xi}\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}e^{-2\pi in\xi}\,d\xi = (\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}e^{2\pi in\xi}) = (\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi(\cdot+n)}) = (\varphi, \varphi(\cdot+n)).$$

Итак,

$$(\Phi(\xi), e^{2\pi in\xi}) = (\varphi, \varphi(\cdot+n)).$$

Если целые сдвиги функции φ являются ортонормированными, то скалярное произведение $(\varphi, \varphi(\cdot+n))$ равно единице при $n=0$ и равно нулю при всех остальных целых n. Следовательно, то же верно и для скалярных произведений $(\Phi(\xi), e^{2\pi in\xi})$. Последние являются коэффициентами ряда Фурье периодической функции Φ. Сле-

довательно, у функции Φ все коэффициенты Фурье c_n равны нулю, кроме c_0, который равен 1. Поэтому $\Phi(\xi) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\xi} = 1$.

Обратно, если $\Phi \equiv 1$, то у этой функции (а она периодическая с периодом 1) все коэффициенты Фурье c_n равны нулю, кроме c_0, который равен 1. Но поскольку $c_n = (\Phi(\xi), e^{2\pi i n\xi}) = (\varphi, \varphi(\cdot + n))$, получаем, что $(\varphi, \varphi(\cdot + n)) = 0$ при всех $n \neq 0$ и $(\varphi, \varphi) = 1$. $\square$

Лемма 3 обеспечивает свойство 5 кратномасштабного анализа — ортонормированность целых сдвигов функции φ, а также ортонормированность сдвигов всплеск-функций ψ на каждом уровне. Для проверки этих свойств достаточно, чтобы периодизации соответствующих функций были тождественными константами: периодизации функций $|\varphi|^2$ и $|\psi|^2$ равны единице, а периодизация функции $\widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}$ равна нулю. Остались два главных свойства кратномасштабного анализа — вложенность пространств V_j (свойство 1) и двоичная структура (свойство 4). Интересно, что оба эти свойства можно обеспечить одной леммой.

Лемма 4. *Пространство V_0, порожденное целыми сдвигами функции φ, содержится в пространстве $V_1 = \{f(2\cdot) \mid f(\cdot) \in V_0\}$ тогда и только тогда, когда функция*

$$m(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(2\xi)}{\widehat{\varphi}(\xi)} \tag{36}$$

является 1-периодической. Если $2m(-\xi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k\xi}$ — разложение периодической функции $2m(-\xi)$ в ряд Фурье (т. е. $m(\xi) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k\xi}$), то

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi(2t - k). \tag{37}$$

Замечание 4. Предполагается, что $m(\xi)$ нигде не обращается в бесконечность, поэтому если $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$, то обязательно $\widehat{\varphi}(2\xi) = 0$. Формально функция $m(\xi)$ в таких точках не определена. Поэтому утверждение леммы 4 следует понимать так: функция $m(\xi)$ периодическая на множестве, где она определена. Можно ее продолжить по периодичности на всю прямую и переписать формулу (36) в виде равенства $\widehat{\varphi}(2\xi) = m(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$, выполненного уже на всей прямой.

Доказательство. Пространство V_0 порождено функциями вида $\varphi(t - k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, пространство V_1 порождено их двоичными сжатиями — функциями вида $\varphi(2t - k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому вложение $V_0 \subset V_1$ равносильно тому, что все порождающие функции

$\varphi(\cdot - k)$ лежат в V_1. Для этого достаточно, чтобы выполнялось условие $\varphi(\cdot) \in V_1$, тогда и все целые сдвиги будут лежать в V_1. Таким образом, функция $\varphi(t)$ должна быть линейной комбинацией функций $\varphi(2t-k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — коэффициенты этой линейной комбинации, то получаем уравнение (37). Итак, для того чтобы выполнялось условие $V_0 \subset V_1$, необходимо и достаточно, чтобы φ было решением уравнения (37) с некоторыми коэффициентами c_k. Применим теперь преобразование Фурье к обеим частям этого уравнения. Левая часть, разумеется, превратится в $\widehat{\varphi}(\xi)$. Что станет с правой? Пользуясь свойствами преобразования Фурье, получаем $\widehat{\varphi(2t-k)} = \frac{1}{2}e^{-2\pi i k\xi/2}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$. Умножая на c_k и складывая по всем $k \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2}c_k e^{-2\pi i k\xi/2}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2}c_k e^{-2\pi i k\xi/2} = \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)m\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

и приходим к уравнению (36). □

Получается такой план построения кратномасштабного анализа и системы всплесков.

Надо найти функцию φ, удовлетворяющую уравнению (37) и условию $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 \equiv 1$. Например, для системы Хаара $|\widehat{\varphi}(\xi)| = \dfrac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$, для системы Шеннона—Котельникова $\widehat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-1/2,1/2]}$. Потом надо определить пространство V_0 — оно порождено целыми сдвигами (ортонормированными!) функции φ. Тогда у нас есть и все пространства $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$: каждое V_j состоит из 2^j-сжатий функций из V_0. В силу уравнения (37) имеем $V_0 \subset V_1$. Сжимая каждую из функций $f \in V_0$ в 2^j раз, получаем, что $V_j \subset V_{j+1}$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Итак, пространства $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют расширяющуюся систему. Значит, свойства 1—5 кратномасштабного анализа выполнены.

Чтобы теперь построить систему всплесков, нужно найти функцию $\psi \in V_1$ со следующими свойствами:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi+k)|^2 \equiv 1; \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi+k)\overline{\widehat{\psi}}(\xi+k) \equiv 0. \tag{38}$$

Тогда ее целые сдвиги $\psi(t-k)$ будут ортонормированными, а значит, и целые сдвиги на j-м уровне $2^{j/2}\psi(2^j t-k)$ будут ортонормированными. А из второго уравнения будет следовать, что эти функции на разных уровнях ортогональны друг другу. Таким образом, ψ будет всплеск-функцией.

Теперь мы можем реализовать то, что проделал Ив Мейер, — построить систему всплесков, очень близкую к системе Шеннона—Котельникова, в которой функции быстро убывали бы на бесконечности.

С чего начиналось построение системы Шеннона—Котельникова? С функции $\chi_{[-1/2,1/2]}$. Ее обратное преобразование Фурье — функция $\varphi(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ — порождает кратномасштабный анализ. По нему строилась и всплеск-функция $\psi(t) = \dfrac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t}$. Надо аккуратно пошевелить функцию $\chi_{[-1/2,1/2]}$, чтобы она стала гладкой (тогда, как мы знаем из упражнения 24, ее обратное преобразование Фурье станет быстро убывающим), но при этом по-прежнему порождала кратномасштабный анализ. Задача нетривиальная, успех не гарантирован. Мейер нашел такое решение, хитроумное и довольно сложное. Функцию φ определяем по преобразованию Фурье так:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < \dfrac{1}{2} - \varepsilon; \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{|\xi| - \frac{1}{2}}{2\varepsilon}\right)\right), & \dfrac{1}{2} - \varepsilon \leqslant |\xi| \leqslant \dfrac{1}{2} + \varepsilon; \\ 0, & |\xi| > \dfrac{1}{2} + \varepsilon, \end{cases} \tag{39}$$

где ν — произвольная функция, обладающая свойством

$$\nu(\xi) + \nu(1 - \xi) \equiv 1, \quad \xi \in (0, 1),$$

причем $\nu(0) = 0$. Конечно, разумно выбирать такую функцию, которая была бы бесконечно гладкой на всей прямой $\mathbb{R}$ и монотонно возрастала на отрезке $[0, 1]$. Пример такой функции изображен на рис. 27.

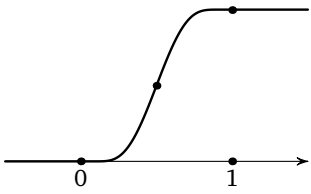


Рис. 27. Функция ν

Таким образом, мы сгладили функцию $\chi_{[-1/2,1/2]}$ на концах отрезка, изменив ее на симметричных интервалах длины 2ε каждый.

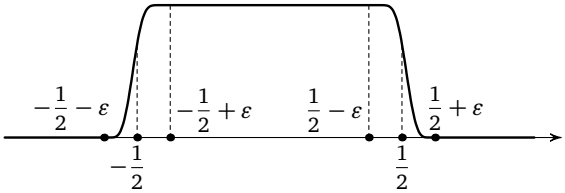


Рис. 28. Преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ функции φ, заданное формулой (39)

Надо проверить два свойства: 1) периодизация квадрата этой функции равна 1; 2) существует 1-периодическая функция m, для которой $\widehat{\varphi}(2\xi) = m(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$.

Периодизация функции $|\widehat{\varphi}|^2$. Обозначим эту периодизацию через $\Phi(\xi)$. Равенство $\Phi(\xi) = 1$ достаточно проверить на периоде $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, причем в силу симметрии (наша функция четная!) — даже на полупериоде $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Если $\xi \in \left[0, \frac{1}{2} - \varepsilon\right]$, то $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ и $\widehat{\varphi}(\xi + k) = 0$ при остальных целых k. Поэтому $\Phi(\xi) = 1$. Если $\xi \in \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}\right]$, то поступим так. Обозначим через $\alpha = \alpha(\xi)$ аргумент функции ν в формуле (39). Тогда

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(\alpha)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(1-\alpha)\right) \equiv 1. \tag{40}$$

Если $\frac{1}{2} - \varepsilon < \xi \leqslant \frac{1}{2}$, то из формулы (39) следует, что

$$\alpha(\xi - 1) = \alpha(1 - \xi) = \frac{1}{2} + \frac{|1-\xi| - \frac{1}{2}}{2\varepsilon} = 1 - \alpha(\xi).$$

Поэтому

$$\Phi(\xi) = |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 + |\widehat{\varphi}(\xi - 1)|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(\alpha)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(1-\alpha)\right) = 1.$$

Для проверки второго свойства положим $m(\xi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2\xi + 2k)$. Это 1-периодическая функция. Среди всех функций $\widehat{\varphi}(2\xi + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, только у $\widehat{\varphi}(2\xi)$, т. е. при $k = 0$, носитель пересекается с носителем функции $\widehat{\varphi}$, причем на этом пересечении функция $\widehat{\varphi}$ равна 1 (см. рис. 29). Следовательно,

$$m(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi)\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi),$$

что и требовалось.

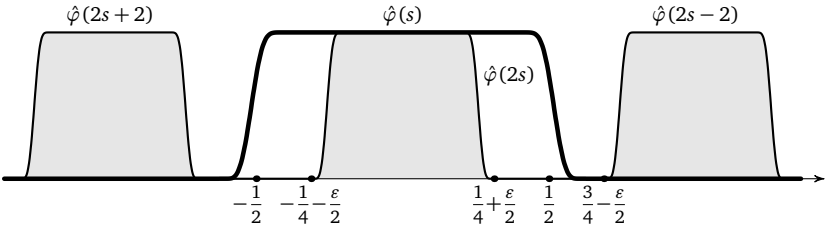


Рис. 29. Функции $\widehat{\varphi}(s)$ и $\widehat{\varphi}(2s)$

Итак, функция φ, заданная формулой (39), порождает кратномасштабный анализ. Значит, должна быть и всплеск-функция. Вот она:

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i \xi} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)(\widehat{\varphi}(\xi+1) + \widehat{\varphi}(\xi-1)). \tag{41}$$

Предоставляем читателю самостоятельно проверить (см. упражнение 32), что периодизация функции $|\widehat{\psi}|^2$ равна единице, а периодизация функции $\widehat{\psi}\overline{\widehat{\varphi}}$ равна нулю. Следовательно, ψ — всплеск-функция; ее график изображен на рис. 30.

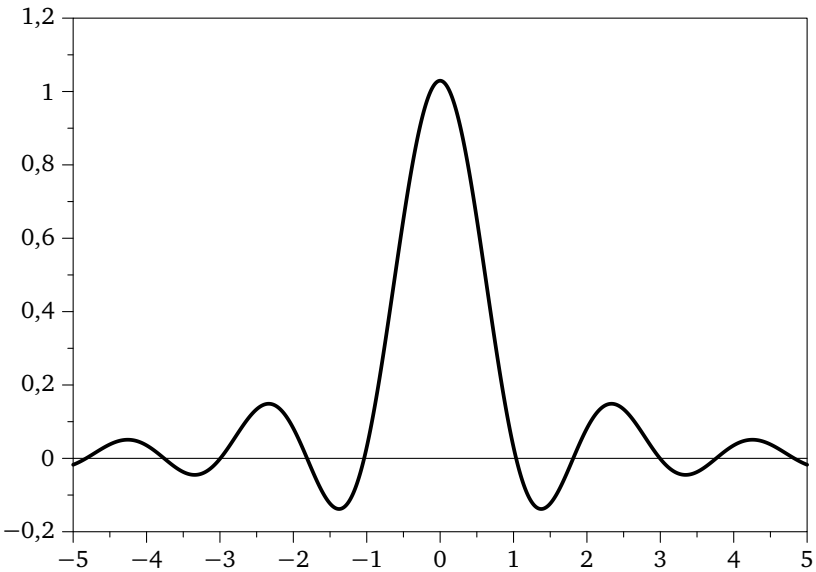


Рис. 30. Функция Мейера

Упражнения

27. Докажите, что функция φ, заданная своим преобразованием Фурье, имеет ортонормированные целые сдвиги:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} -0{,}4, & \xi \in [-1, 0); \\ 0{,}8, & \xi \in [0, 1); \\ -\dfrac{1}{\sqrt{10}}, & \xi \in [1, 3); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

28. Истинно или ложно следующее утверждение: если неотрицательная функция φ имеет ортонормированные целые сдвиги, то она сосредоточена на отрезке длины 1?

29. Докажите, что функция Шеннона—Котельникова $\varphi(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2t - k)$, и найдите коэффициенты этого уравнения c_k.

30. Удовлетворяет ли функция f, для которой $\hat{f}(\xi) = \left(\dfrac{\sin 2\pi\xi}{2\pi\xi}\right)^3$, какому-нибудь масштабирующему уравнению? Если да, то найдите его коэффициенты.

31. Докажите, что для всех функций Мейера φ интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t) \cos(\pi t)\, dt$$

принимает одно и то же значение. Какое?

Указание. Найдите значение $\widehat{\varphi}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

32. Докажите, что функция ψ, определенная равенством

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i \xi} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)(\widehat{\varphi}(\xi + 1) + \widehat{\varphi}(\xi - 1)),$$

является всплеск-функцией, соответствующей кратномасштабному анализу Мейера.

6. Всплески с компактным носителем

Всплески Мейера быстро убывают, но все же они не обращаются в ноль за пределами отрезка. Наша цель — «гладкий Хаар» — всплески с компактным носителем. Начнем с построения кратномасштабного анализа.

6.1. Алгоритм построения КМА

До сего момента мы рассматривали тригонометрические полиномы как линейную комбинацию синусов и косинусов. Сейчас нам удобнее будет перейти к равносильному определению: мы будем называть тригонометрическим полиномом линейную комбинацию (положительных и отрицательных) степеней $e^{2\pi i\xi}$, т. е. функцию вида

$$p(\xi) = \sum_{k=n_1}^{n_2} p_k e^{-2\pi i k\xi}, \tag{42}$$

где p_k — произвольные комплексные коэффициенты, а $n_1 \leqslant n_2$ — целые числа. Именно коэффициенты p_k мы с этого момента будем называть *коэффициентами* тригонометрического полинома p, а его *степенью* назовем число $n_2 - n_1$. Пока мы будем рассматривать только случай $n_1 = 0$, т. е. тригонометрические полиномы вида

$$p(\xi) = \sum_{k=0}^{n_2} p_k e^{-2\pi i k\xi}.$$

Заметим, что если у нас в руках есть масштабирующая функция φ, то коэффициенты уравнения (37) легко найти. Поскольку функции $\{\sqrt{2}\varphi(2t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированный базис пространства V_1, коэффициенты разложения функции φ по этому базису равны $c_k = (\sqrt{2}\varphi(2t-k), \varphi(t))$. Поэтому если функция φ имеет компактный носитель, то лишь конечное число этих коэффициентов отличны от нуля.

Не ограничивая общности (быть может, сдвигая аргумент t), считаем, что все ненулевые коэффициенты лежат между c_0 и c_N. Таким образом,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi(2t-k), \tag{43}$$

где $c_0 c_N \neq 0$. Тригонометрический полином $m(\xi) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{N} c_k e^{-2\pi i k}$ называется *маской* этого уравнения. Название объясняется тем, что функцию φ (теоретически) легко построить, если мы знаем m, т. е. φ прячется под маской m.

В образах Фурье это уравнение по-прежнему имеет вид $\widehat{\varphi}(2s) = m(s)\widehat{\varphi}(s)$. При $s = 0$ получаем, что $\widehat{\varphi}(0) = m(0)\widehat{\varphi}(0)$. Поэтому либо $\widehat{\varphi}(0) = 0$, либо $m(0) = 1$. Первое означало бы, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = 0$. Рассмотрение этого случая (чего мы не будем делать в рамках данного текста) путем преобразований опять сводится [14] ко второму случаю, и поэтому мы будем полагать, что $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, $m(0) = 1$. Это означает, что $\sum\limits_k c_k = 2$. Итак,

сумма коэффициентов масштабирующего уравнения (43) *равна* 2, *а значение тригонометрического полинома* m *в точке* $\xi = 0$ *равно единице*.

Теорема 17. *Пусть маска* m *масштабирующего уравнения* (43) *не обращается в ноль на интервале* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. *Тогда для выполнения условия* $\Phi(\xi) \equiv 1$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$|m(s)|^2 + \left|m\left(s + \frac{1}{2}\right)\right|^2 \equiv 1. \tag{44}$$

Доказательство. Поскольку $\widehat{\varphi}(2s) = m(s)\widehat{\varphi}(s)$, получаем

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(2s+k)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(2s+2n)|^2 + |\widehat{\varphi}(2s+1+2n)|^2 =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |m(s+n)|^2 \cdot |\widehat{\varphi}(s+n)|^2 + \left|m\left(s+\frac{1}{2}+n\right)\right|^2 \cdot \left|\widehat{\varphi}\left(s+\frac{1}{2}+n\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |m(s)|^2 \cdot |\widehat{\varphi}(s+n)|^2 + \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \cdot \left|\widehat{\varphi}\left(s+\frac{1}{2}+n\right)\right|^2 =$$

$$= |m(s)|^2 \Phi(s+n) + \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \Phi\left(s+\frac{1}{2}\right) = |m(s)|^2 + \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2. \tag{45}$$

Обратно, предположим теперь, что маска обладает свойством (44) и не обращается в ноль на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Если функция Φ — не тождественная константа, то точка $\xi = 0$ не может быть одновременно ее минимумом и максимумом. Пусть для определенности это не точка максимума. Тогда максимум на периоде достигается в какой-нибудь другой точке. Обозначим эту точку, отличную от нуля и от единицы, через $2s$ и положим $\Phi(2s) = M$. Пользуясь равен-

ством (45), получаем

$$\Phi(2s) = |m(s)|^2\Phi(s) + \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \Phi\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

Поскольку оба значения $\Phi(s)$ и $\Phi\left(s+\frac{1}{2}\right)$ не превосходят M, а

$$|m(s)|^2 + \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$$

и к тому же $m(s) > 0$, так как $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, данное равенство возможно, только если $\Phi(s) = M$. Рассуждая аналогично, получаем $M = \Phi(2^{-1}s) = \Phi(2^{-2}s) = \ldots$ Тогда по непрерывности получаем $\Phi(0) = M$, что противоречит предположению. □

Итак, для того чтобы построить кратномасштабный анализ, нужно найти тригонометрический полином $m(\xi)$, удовлетворяющий тождеству (44), взять его удвоенные коэффициенты $\{c_k\}_{k=1}^N$ и решить функциональное уравнение (43). Его решение φ будет порождать кратномасштабный анализ. А откуда же возьмется всплеск-функция ψ? Мы говорили, что она есть у любого кратномасштабного анализа. Да, она явно строится, причем теми же рассуждениями, которыми была получена сама функция φ.

Так как $\psi \in V_1$, эта функция также раскладывается по базису $\{\sqrt{2}\varphi(2t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, причем разложение будет конечным, поскольку ψ имеет компактный носитель. Получаем

$$\psi(t) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} p_k \varphi(2t-k).$$

В образах Фурье имеем $\widehat{\psi}(\xi) = p\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$, где

$$p(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=-N_1}^{N_2} p_k e^{-2\pi i\xi k}.$$

Для того чтобы ψ была ортогональной всем целым сдвигам функции φ, периодизация функции $\widehat{\psi}\overline{\widehat{\varphi}}$ должна быть тождественно равна нулю (лемма 3). Так же как при доказательстве теоремы 17, получаем, что тригонометрический полином p удовлетворяет тождеству

$$p(s)\overline{m}(s) + p\left(s+\frac{1}{2}\right)\overline{m}\left(s+\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Легко угадать одно его решение: это $p(s) = e^{-2\pi i s}\overline{m}\left(s+\frac{1}{2}\right)$. Более того, этот полином p удовлетворяет тождеству (44), потому что

$|p(s)|^2 = \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2$, а значит,

$$|p(s)|^2 + \left|p\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2 + |m(s+1)|^2 =$$
$$= \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2 + |m(s)|^2 = 1.$$

Следовательно, функция ψ обладает всеми необходимыми свойствами: ее целые сдвиги являются ортонормированными, и каждый из них ортогонален целым сдвигам функции φ. Таким образом, если кратномасштабный анализ построен, то всплеск-функция находится по явной формуле $\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i\xi}\overline{m}\left(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$. Во временно́й области (т. е. после обратного преобразования Фурье) эта формула превращается в простое соотношение $\psi(t) = \sum\limits_{k=0}^{N}(-1)^k\bar{c}_k\varphi(2t+k-1)$. Поскольку функция φ сосредоточена на отрезке $[0, N]$, всплеск-функция ψ располагается на отрезке $\left[-\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}\right]$.

Соберем все наши результаты в центральной теореме этого раздела.

Теорема 18. *Для любого тригонометрического полинома m, удовлетворяющего тождеству* (44) *и не имеющего корней на интервале* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, *решение φ функционального уравнения* (43) *с маской m порождает кратномасштабный анализ. Соответствующая система всплесков определена всплеск-функцией*

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\bar{c}_k\varphi(2t+k-1) \tag{46}$$

с носителем на отрезке $\left[-\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}\right]$.

Итак, для построения системы всплесков надо решить две задачи:

1) найти тригонометрический полином m, удовлетворяющий тождеству

$$|m(s)|^2 + \left|m\left(s+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$$

и условиям $m\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $m(\xi) \neq 0$, $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;

2) найти решение функционального уравнения

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi(2t-k),$$

где c_k — удвоенные коэффициенты полинома m, т. е.

$$m(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} c_k e^{-2\pi i k \xi}.$$

После этого сразу получаем всплеск-функцию ψ по формуле (46), и все готово.

Для решения первой задачи мы привлечем диофантовы уравнения, для решения второй — сжимающие отображения и фракталы. Начнем с первой задачи.

6.2. Полиномиальное уравнение

В этом пункте мы имеем дело с общими тригонометрическими полиномами вида (42) с произвольными n_1, n_2 $(n_1 \leqslant n_2)$.

Нам нужно найти тригонометрические полиномы m, удовлетворяющие уравнению (44) и условиям $m\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $m(\xi) \neq 0$, $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Поскольку тригонометрический полином m имеет корень в точке $\xi = \frac{1}{2}$, он делится на тригонометрический полином $\left(\frac{1+e^{-2\pi i \xi}}{2}\right)^n$, где $n \geqslant 1$ — кратность данного корня. Таким образом,

$$m(\xi) = \left(\frac{1+e^{-2\pi i \xi}}{2}\right)^n q(\xi), \tag{47}$$

где q — тригонометрический полином степени $N-n$, причем $q\left(\frac{1}{2}\right) \neq$ $\neq 0$. Поскольку $\left|\frac{1+e^{-2\pi i \xi}}{2}\right|^2 = \cos^2 \pi\xi$, получаем

$$|m(\xi)|^2 = (\cos^2 \pi\xi)^n |q(\xi)|^2.$$

Теперь нам понадобится следующий классический результат, который мы примем без доказательства.

Лемма 5 (Ф. Рисс). *Для любого тригонометрического полинома $a(\xi)$, удовлетворяющего условию $a(\xi) \geqslant 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}$, существует тригонометрический полином $r(\xi) = \sum_{k=0}^{s} r_k e^{-2\pi i k \xi}$, для которого $|r(\xi)|^2 = a(\xi)$. Если a имеет действительные коэффициенты, то*

$a(\xi) = \sum_{k=0}^{s} a_k \cos 2\pi k\xi$, $a_k \in \mathbb{R}$, *а полином* r *может быть также выбран с действительными коэффициентами.*

Лемма Рисса утверждает, что неотрицательный тригонометрический полином $a(\xi)$ всегда можно представить как квадрат модуля некоторого другого тригонометрического полинома $r(\xi)$; традиционно $r(\xi)$ называют *корнем* из тригонометрического полинома $a(\xi)$.

Например, тригонометрический полином $\cos(2\pi\xi) + \frac{5}{4}$ неотрицателен при всех значениях ξ, следовательно, он должен быть квадратом модуля некоторого тригонометрического полинома $r(\xi)$. В самом деле, $\cos(2\pi\xi) + \frac{5}{4} = \left|1 + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\xi}\right|^2$.

Доказательство леммы Рисса конструктивно, полином $r(\xi)$ строится явно путем аккуратной сортировки корней полинома a, см., например, [14, с. 570—572, § A.11].

Нам понадобится также следующая несложная лемма, доказательство которой (из симметрии при комплексном сопряжении) мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Лемма 6. *Тригонометрический полином с действительными коэффициентами, принимающий действительные значения, является алгебраическим полиномом от* $\cos 2\pi\xi$ *с действительными коэффициентами.*

Будем искать полином $|q(\xi)|^2$, предположив дополнительно, что он имеет действительные коэффициенты. Так как

$$\cos 2\pi\xi = 1 - 2\sin^2 \pi\xi,$$

воспользовавшись леммой 6, получаем $|q(\xi)|^2 = P(\sin^2 \pi\xi)$. Итак,

$$|m(\xi)|^2 = (\cos^2 \pi\xi)^n P(\sin^2 \pi\xi),$$

где $P(z)$ — алгебраический полином, неотрицательный на области значений функции $z = \sin^2 \pi\xi$, т. е. на отрезке $[0, 1]$, и $P(0) = 1$. Тогда тождество (44) приобретает следующий вид:

$$(1 - z)^n P(z) + z^n P(1 - z) = 1. \tag{48}$$

Это алгебраическое уравнение имеет единственное решение среди полиномов P степени, не превосходящей $n - 1$. Докажем это.

Для доказательства единственности рассмотрим более общее диофантово уравнение

$$(1 - z)^n P_1(z) + z^n P_2(1 - z) = 1. \tag{49}$$

Разность любых двух решений (обозначим ее через $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$) должна удовлетворять однородному уравнению

$$(1-z)^n \tilde{P}_1(z) + z^n \tilde{P}_2(1-z) = 0. \tag{50}$$

Поскольку полином $(1-z)^n$ взаимно прост с z^n, полином $\tilde{P}_1(z)$ обязан делиться на z^n, а значит, его степень не меньше n, и то же верно для полинома $\tilde{P}_2$. Таким образом, уравнение (50) имеет не более одного решения (P_1, P_2) со степенями полиномов, не превосходящими $n-1$. Значит, и уравнение (48) имеет не более одного решения степени не выше $n-1$.

Для доказательства существования вновь обратимся к общему диофантову уравнению (49). Применив к полиномам $(1-z)^n$ и z^n алгоритм Евклида (последовательное деление с остатком друг на друга), получим полиномы P_1 и P_2 степеней не выше $n-1$, удовлетворяющие уравнению (49). Заменив переменную $z \mapsto 1-z$, мы видим, что и пара $(P_2(1-z), P_1(1-z))$ удовлетворяет тому же уравнению. Тогда из единственности следует, что $P_2(z) = P_1(1-z)$. Следовательно, полином P_1 степени не выше $n-1$ удовлетворяет уравнению (48). Итак, для любого $n \geqslant 1$ уравнение (48) имеет единственное решение степени не выше $n-1$. Обозначим его P_n.

Найти P_n, как мы видели, можно как результат алгоритма Евклида, примененного к полиномам $(1-z)^n$ и z^n. Но есть способ лучше, позволяющий выразить решение явно. Перепишем уравнение в виде

$$P_n(z) = \frac{1}{(1-z)^n} + z^n \frac{P_n(1-z)}{(1-z)^n}$$

и разложим правую часть этого равенства в ряд Тейлора в точке $z=0$. Так как второе слагаемое в правой части делится на z^n, все члены ряда Тейлора со степенями, не превосходящими $n-1$, содержатся в разложении первого слагаемого:

$$(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} z^k + \ldots$$

Но поскольку степень полинома P_n не превосходит $n-1$, он совпадает со своим разложением в ряд Тейлора до степени $n-1$. Следовательно,

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} z^k. \tag{51}$$

А для того чтобы найти все решения уравнения (48), нужно прибавить к нему любое решение однородного уравнения (50). Получа-

ется, что $\tilde{P}(z)$ делится на z^n, значит, $\tilde{P}(z) = z^n \tilde{P}_1(z)$. Подставляя это выражение в уравнение, получим $\tilde{P}_1(z) + \tilde{P}_1(1-z) = 0$. Это означает, что график полинома $\tilde{P}_1$ симметричен относительно точки $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, следовательно, он имеет вид $\tilde{P}_1(z) = R\left(\frac{1}{2} - z\right)$, где R — нечетный полином. Итак, общее решение уравнения (48) имеет вид

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} z^k + z^n R\left(\frac{1}{2} - z\right), \tag{52}$$

где R — нечетный полином. Подведем итог: маска m удовлетворяет условиям теоремы 18, когда

$$|m(\xi)|^2 = (\cos^2 \pi\xi)^n P(\sin^2 \pi\xi), \tag{53}$$

где полином P задан формулой (52) с произвольным нечетным полиномом R, удовлетворяющим условию $P(z) > 0$ при всех $z \in [0, 1]$.

Для построения системы всплесков с компактным носителем надо фиксировать произвольное натуральное число n, взять произвольный нечетный полином R, удовлетворяющий вышеуказанному условию положительности, и получить полином P по формуле (52). Строго говоря, так мы получим не саму маску m, а лишь неотрицательный тригонометрический полином. Осталось извлечь из него корень, т. е. представить его в виде $|m(\xi)|^2$. А всегда ли это возможно? Да, согласно лемме Рисса. Причем у этой леммы есть конструктивное доказательство, позволяющее явно выписать полином m. Таким образом, мы получаем коэффициенты функционального уравнения (43). Осталось его решить и тем самым найти и функцию φ, порождающую кратномасштабный анализ, и функцию ψ (по формуле (46)), порождающую систему всплесков. Легко сказать — «решить». А как? Вот здесь мы и подходим к самому интересному.

6.3. Формула-обманка

Оказывается, решение масштабирующего уравнения

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi(2t - k)$$

можно получить в явном виде. Для этого перейдем в частотную область, где оно приобретает вид $\widehat{\varphi}(\xi) = m\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$. Последний множитель преобразуем по той же формуле: $\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m\left(\frac{\xi}{4}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right)$.

Далее сделаем то же самое с множителем $\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right)$ и т. д. Через n итераций получим

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(2^{-n}\xi) \prod_{j=1}^{n} m(2^{-j}\xi). \tag{54}$$

Учитывая, что $\widehat{\varphi}(2^{-n}\xi) \to \widehat{\varphi}(0) = 1$ при $n \to \infty$, получаем явную формулу для преобразования Фурье масштабирующей функции:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi). \tag{55}$$

Конечно, нужно строго обосновать сходимость бесконечного произведения, поэтому сформулируем и докажем следующее предложение.

Предложение 3. *Если масштабирующее уравнение*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi(2t - k)$$

имеет решение с компактным носителем, то это решение единственно с точностью до умножения на константу, а его преобразование Фурье дается формулой (55), *где* $m(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} c_k e^{-2\pi i k \xi}$ — *тригонометрический полином.*

Доказательство. Если функция φ имеет компактный носитель, то ее преобразование Фурье является аналитической функцией. Сделав n итераций равенства $\widehat{\varphi}(\xi) = m\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$, приходим к формуле (54). Ясно, что $\widehat{\varphi}(2^{-n}\xi)$ стремится к числу $\widehat{\varphi}(0)$, которое, не ограничивая общности, положим равным 1. Осталось доказать, что произведение тригонометрических полиномов сходится при каждом ξ. Учитывая, что $m(0) = 1$, и обозначив через M максимум модуля производной функции $m(\xi)$ на периоде, получим $m(\xi) = 1 + r(\xi)$, где $|r(\xi)| < M\xi$. Тогда для любых чисел n и k имеем

$$\prod_{j=n}^{n+k} m(2^{-j}\xi) = \prod_{j=n}^{n+k} (1 + r(2^{-j}\xi)),$$

откуда следует, что

$$\left|1 - \prod_{j=n}^{n+k} m(2^{-j}\xi)\right| \leqslant M \sum_{j=n}^{n+k} 2^{-j}\xi + C\left(\sum_{j=n}^{n+k} 2^{-j}\xi\right) \leqslant M \cdot 2^{-n} + C \cdot 2^{-2n}$$

(C — константа). Это выражение стремится к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, последовательность произведений $\prod_{j=1}^{n} m(2^{-j}\xi)$ является фундаментальной, а значит, сходится при $n \to \infty$. □

Решение масштабирующего уравнения найдено? Теоретически — да. Но на практике формула (55) дает не очень много. Чтобы найти функцию φ, надо «всего лишь» вычислить бесконечное произведение тригонометрических полиномов, а потом взять от него обратное преобразование Фурье. Из этой формулы неясно, как ответить на простейшие вопросы. Скажем, будет ли функция φ непрерывной? Тем не менее какие-то выводы из нее делать можно. И поможет нам в этом простой пример. Применим формулу (55) к масштабирующему уравнению, порождающему КМА Хаара.

Пример 5. Уравнение $\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1)$ имеет решение $\varphi = \chi_{[0,1)}$. Имеем $\widehat{\varphi}(\xi) = \dfrac{1-e^{-2\pi i\xi}}{2\pi i\xi} = e^{-\pi i\xi}\dfrac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$. С другой стороны, $m(\xi) = \dfrac{1}{2}(e^{-2\pi i\xi}+1) = e^{-\pi i\xi}\cos \pi\xi$. Подставив это выражение в формулу (55), получаем

$$e^{-\pi i\xi}\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} = \prod_{k=1}^{\infty} e^{-2^{-k}\pi i\xi}\cos 2^{-k}\pi\xi.$$

Заметим, что $e^{-\pi i\xi} = \prod_{k=1}^{\infty} e^{-2^{-k}\pi i\xi}$. Таким образом,

$$\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} = \prod_{k=1}^{\infty}\cos 2^{-k}\pi\xi. \tag{56}$$

Замечательная формула! Она, конечно же, известна, а сейчас мы получили еще одно ее доказательство. Обычно она доказывается по-другому. Мы предлагаем вам сделать это в упражнении 37. В качестве наводящего соображения можно использовать задачу школьной тригонометрии (упражнение 36). Тот же «принцип телескопа» используется и при доказательстве формулы (56).

В следующем разделе мы уйдем из частотной области обратно во временну́ю и попытаемся решить масштабирующее уравнение напрямую, не прибегая к преобразованию Фурье. Метод, который мы при этом используем, так и называется «прямой», или «матричный». Он к тому же поможет понять природу масштабирующих функций и всплесков. Природа эта окажется нерегулярной, имеющей прямое отношение к фракталам и самоподобию.

Упражнения

33. Покажите, что масштабирующее уравнение

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-3)$$

удовлетворяет условию $|m(\xi)|^2 + \left|m\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$, однако его решение φ не имеет ортогональных целых сдвигов. Противоречит ли это теореме 17?

34. Докажите равенство

$$\frac{\sin \pi t}{\pi t} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(2^{-k}\pi t).$$

35. Извлеките корень из тригонометрического полинома $p(\xi) = 2 - \cos \xi$.

36. Решите уравнение $\cos t \cos 2t \cos 4t = \frac{1}{8}$.

37. Используя прием из упражнения 36, докажите формулу (56).

7. Фракталы и всплески

Связь всплесков и фракталов изучалась в литературе много и подробно. В отличие от гладкой и регулярной системы Фурье, всплески имеют фрактальную природу. Для того чтобы это объяснить, сначала определим, что мы имеем в виду под фракталами и самоподобием.

7.1. Фракталы и самоподобные функции

Фракталы знают все, и никто не знает, что это. Математически строго определить понятие фрактала чрезвычайно сложно. Можно сказать, что «фрактал — это объект, содержащий сколь угодно малые сложные части». Но это, конечно, не математическое определение. Одна из наиболее удачных попыток определить фракталы была сделана Дж. Хатчинсоном в 1981 году: см. определение 5 ниже. Оно довольно общее (подходит для многих известных фракталов), но не универсальное: не покрывает, скажем, фракталов Мандельброта. Для наших целей его будет достаточно.

В пространстве $\mathbb{R}^d$ рассмотрим некоторое сжимающее отображение (сжатие) F, т. е. отображение пространства на себя, при котором все расстояния между точками уменьшаются по крайней мере с коэффициентом $q < 1$. Это означает, что $\|Fx - Fy\| \leqslant q\|x - y\|$ для любых точек $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Определение 5. *Фракталом*, соответствующим конечному семейству сжатий $\mathscr{F} = \{F_0, \ldots, F_{m-1}\}$ пространства $\mathbb{R}^d$, называется непустое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^d$, обладающее следующим свойством:

$$K = \bigcup_{i=0}^{m-1} F_i K.$$

Таким образом, фрактал K является объединением нескольких частей K_i, каждая из которых подобна всему множеству K посредством сжимающего отображения F_i. Если образы $F_i K$ не пересекаются, то получается вполне естественное определение: фрактал состоит из нескольких частей, каждая из которых подобна целому. Если все F_i — операторы подобия, сжимающие все расстояния в одно и то же число раз, то каждая часть в буквальном, геометрическом смысле *подобна* целому. Именно такими являются ковер Серпинского, снежинка Коха и много других известных фракталов. Однако

определение 5 более общее: отображения F_i могут быть не только операторами подобия, но и произвольными сжатиями.

Определение 5 довольно общее, оно объединяет множество объектов разной природы. В этом его сила, в этом и его слабость: оно включает в себя много лишнего. Например, квадрат согласно этому определению тоже является фракталом. Он соответствует четырем двоичным сжатиям плоскости (гомотетиям с коэффициентом $\frac{1}{2}$) относительно своих вершин. Более того, любой многогранник в $\mathbb{R}^d$ является фракталом (упражнение 39). Но главное достоинство определения 5 — теорема существования и единственности, которую мы сейчас установим. Оказывается, каждое семейство сжатий порождает фрактал, причем только один! Обоснование этого факта использует общий принцип сжимающих отображений для произвольного метрического пространства.

Определение 6. *Метрическим пространством* называется произвольное множество M, на котором определена неотрицательная бинарная функция $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}_+$ (метрика), удовлетворяющая трем условиям:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность ее элементов имеет предел в этом пространстве.

Напомним, что *фундаментальная последовательность* $\{x_i\}_{i \geqslant 0}$, или *последовательность Коши*, определяется следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для любых номеров $k, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_k, x_m) < \varepsilon$. Фундаментальные последовательности дают возможность, не выходя за пределы метрического пространства, определить последовательности, которые «должны бы сходиться». Например, на открытой полупрямой $(0, +\infty)$ последовательность $x_k = \frac{1}{k}$ не сходится. Но она фундаментальна! Причина в том, что данное пространство неполно. Добавив предельную точку $x = 0$, мы получаем полное пространство $[0, +\infty)$.

Рассмотрим полное метрическое пространство M и сжимающее отображение $F\colon M \to M$, т. е. отображение, для которого существует такое $q < 1$, что

$$\rho(Fx_1, Fx_2) \leqslant q\rho(x_1, x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in M$. Точка $x \in M$ является неподвижной для этого отображения, если $Fx = x$.

Теорема 19 (принцип сжимающих отображений). *Если $F: M \to M$ — сжимающее отображение полного метрического пространства M, то F имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in M$ и проследим ее траекторию под действием отображения F. Она перейдет в некоторую точку x_1, которая, в свою очередь, перейдет в точку x_2, и т. д. Получаем последовательность $\{x_k\}_{k \geqslant 0}$, в которой $x_{k+1} = Fx_k$ для всех k. Поскольку

$$\rho(x_k, x_{k+1}) = \rho(Fx_{k-1}, Fx_k) \leqslant q\rho(x_{k-1}, z_k),$$

получаем, что $\rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant q^k \rho(x_0, x_1)$. Итак, для любых чисел $m < n$ имеем

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x_{m+1}) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant \\ \leqslant (q^m + q^{m+1} + \ldots + q^{n-1})\rho(x_0, x_1) \leqslant q^m C,$$

где константа C не зависит от m и n. Следовательно, последовательность имеет предел $x \in M$. Поскольку отображение F переводит последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ в последовательность $x_1, x_2, \ldots$, которая имеет тот же предел, приходим к выводу, что $Fx = x$ (см. рис. 31).

Докажем единственность неподвижной точки. Если есть другая неподвижная точка y, то $\rho(x, y) = \rho(Fx, Fy) \leqslant q\rho(x, y)$, откуда следует, что $1 \leqslant q$, а это противоречит предположению. □

Через $\rho(x, A)$ мы обозначаем расстояние между точкой x и множеством A, равное $\inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Между компактными подмноже-

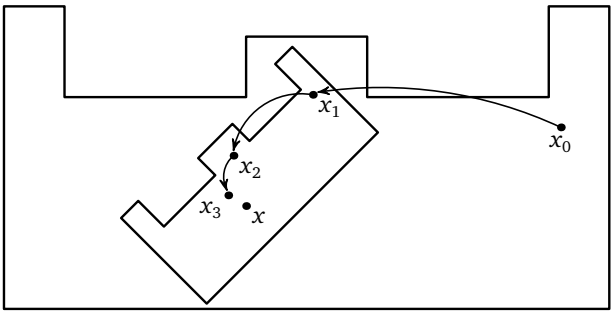


Рис. 31. Принцип сжимающих отображений: если внутри замка находится модель этого замка, где все расстояния уменьшены (в отделенное от единицы количество раз), то найдется точка x модели, соответствующая этой же точке пространства

ствами пространства $\mathbb{R}^d$ можно определить расстояние и таким образом превратить множество всех компактов в $\mathbb{R}^d$ в метрическое пространство.

Определение 7. *Расстоянием по Хаусдорфу* между двумя компактными множествами $A, B \in \mathbb{R}^d$ называется величина

$$\rho(A, B) = \max_{a \in A,\, b \in B} \{\rho(a, B), \rho(b, A)\}.$$

Таким образом, расстояние между двумя множествами — это максимум из двух расстояний: расстояний от каждого из множеств до самой далекой от него точки другого множества. Метрика Хаусдорфа превращает множество всех компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ в метрическое пространство. Обозначим это пространство через $\mathscr{K}(\mathbb{R}^d)$. В упражнении 38 читатель легко убедится в выполнении всех трех свойств метрики.

Если некоторое отображение F пространства $\mathbb{R}^d$ в себя является сжимающим, то отображение $\mathscr{F}$ пространства $\mathscr{K}(\mathbb{R}^d)$, естественно определяющееся как $\mathscr{F}A = FA = \{Fa \mid a \in A\}$, тоже сжимающее, причем с тем же коэффициентом $q < 1$. Если же есть несколько сжимающих отображения $F_1, \ldots, F_m$, то им мы также ставим в соответствие отображение пространства $\mathscr{K}(\mathbb{R}^d)$, которое определяется так: $\mathscr{F}A = \bigcup_{i=1}^{m} F_i A$. Оно тоже является сжатием в метрике Хаусдорфа. Применяя к нему принцип сжимающих отображений, получаем следующий результат.

Теорема 20 (Хатчинсон[1], 1981). *Конечное семейство сжатий пространства $\mathbb{R}^d$ имеет единственный фрактал.*

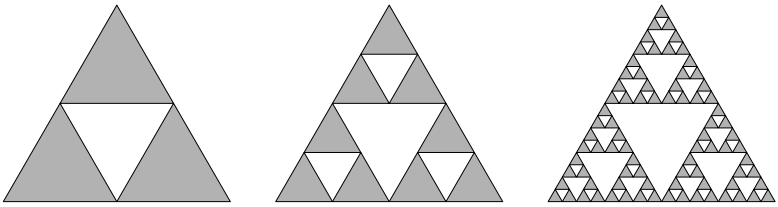


Рис. 32. Ковер Серпинского

Пример 6 (ковер Серпинского). Из треугольника убрали серединный треугольник (с вершинами в серединах его сторон). По-

[1]Джон Хатчинсон (John E. Hutchinson, род. 1981) — австралийский математик, который в статье [10] построил общую теорию фракталов и самоподобия.

лучилась фигура из трех одинаковых треугольников. С каждым из них сделали то же самое — убрали серединный треугольник и т. д. Фигура, получающаяся в пределе, является фракталом. Она порождена семейством из трех операторов — двоичных сжатий плоскости относительно вершин треугольника.

Пример 7 (канторова лестница, или «чертова лестница» (Devil staircase)). Кривая строится внутри единичного квадрата, который будем считать комнатой, нижняя сторона — пол, верхняя — потолок. Соединяем лестницей точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Сначала делим пол на три равные части, а высоту потолка пополам. Поднимаем среднюю часть пола (отрезок длины $\frac{1}{3}$) на половину высоты потолка ($\frac{1}{2}$). Так получили первую ступеньку. Далее каждую из двух оставшихся частей пола делим на три равные части и средние части поднимаем на половины высот соответствующих ступенек: первую — на высоту $\frac{1}{4}$, вторую — на $\frac{3}{4}$ и т. д.

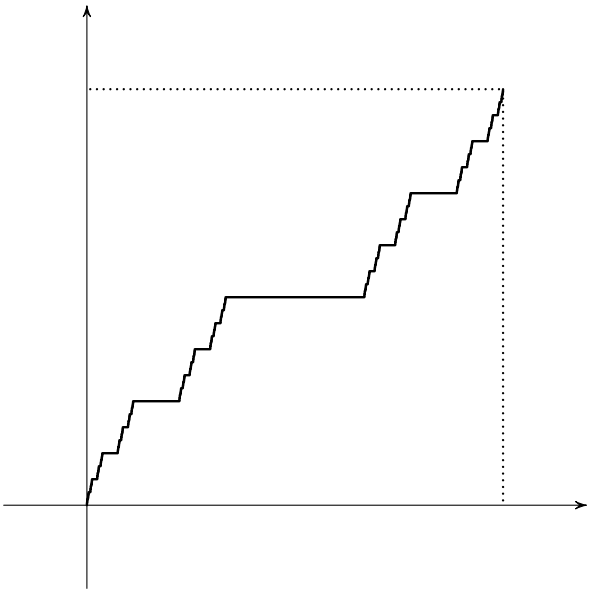


Рис. 33. Канторова лестница

В пределе получаем график непрерывной функции, являющийся фракталом. Он порожден тремя отображениями: F_0 сжимает плоскость относительно точки $(0, 0)$ вдвое по вертикали и втрое по гори-

зонтали, F_2 так же сжимает плоскость, но относительно точки (1, 1), а F_1 сначала проецирует всю плоскость на прямую $y = \frac{1}{2}$, а затем сжимает в три раза относительно точки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Пример 8 (кривая Коха, или снежинка Коха (Koch snowflake, Koch island, Koch star)). Впервые исследована Х. фон Кохом[1]. Делим единичный отрезок на три равные части, среднюю часть заменяем на две стороны равностороннего треугольника. Получили ломаную из четырех одинаковых звеньев. Далее с каждым из четырех звеньев проделываем то же самое: делим на три равные части и заменяем среднюю часть на две стороны равностороннего треугольника. Затем проделываем то же с каждым из 16 звеньев новой ломаной и т. д. Каждый равносторонний треугольник откладывается во внешнюю сторону, чтобы основание отделяло его от остальной части ломаной.

В пределе получаем фрактал, порожденный двумя операторами подобия F_0 и F_1. Чтобы их определить, обозначим через $ABCDE$ четырехзвенную ломаную, возникающую после первой итерации. Тогда подобие F_0 переводит треугольник ACE в треугольник ABC (порядок вершин учитывается!), а подобие F_1 переводит тот же треугольник ACE в треугольник CDE. Таким образом, F_0 — композиция гомотетии относительно точки A с коэффициентом $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и симметрии относительно биссектрисы угла BAC, а F_1 — композиция гомотетии с тем же коэффициентом относительно точки E и симметрии относительно биссектрисы угла DEC.

Иногда построение кривой Коха начинают не с отрезка, а с равностороннего треугольника, каждую сторону которого делят на три части, и т. д. Результат больше похож на снежинку, но это не фрактал (в смысле определения 5)! Получающаяся замкнутая кривая составлена из трех одинаковых фракталов — кривых Коха, описанных выше.

Пример 9 (кривая де Рама). Эта кривая предложена и исследована Ж. де Рамом[2]. В 1949—53 годах он написал серию статей, которые стояли несколько в стороне от его главных исследований.

---

[1]Нильс Фабиан Хельге фон Кох (Niels Fabian Helge von Koch, 1870—1924) — шведский математик, специалист по теории чисел. Построил и исследовал один из первых фракталов.

[2]Жорж де Рам (Georges de Rham, 1903—1990) — швейцарский математик, автор фундаментальных трудов по теории когомологий и по римановым поверхностям.

В них изучались кривые, получающиеся в пределе с помощью *алгоритма срезания углов* (*cutting-angle algorithm*).

Берем произвольный многоугольник с n вершинами. Каждую его сторону делим на три части в отношении $r : (1-2r) : r$, где $r \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ — заданный параметр. Соединяя соседние точки деления, получаем $2n$-угольник. Далее так же срезаем углы у него с тем же параметром r, получаем $4n$-угольник и т. д. Получающаяся в пределе замкнутая кривая проходит через середины сторон исходного многоугольника. Сама она фракталом не является, но ее дуга, соединяющая две соседние середины сторон (эту дугу мы и будем называть кривой де Рама), — фрактал. Таким образом, из каждого n-угольника бесконечным срезанием углов с параметром r получается кривая, составленная из n аффинно подобных друг другу фракталов — кривых де Рама. Для описания этой кривой достаточно рассмотреть случай, когда две соседние стороны исходного n-угольника равны 2 и перпендикулярны. Общий случай сводится к этому аффинным преобразованием. Обозначим через O вершину, а через A и B — середины двух сторон и введем систему координат с базисными векторами OA и OB. Наконец, возьмем точки $M = (2r, 0)$, $N = (0, 2r)$ и $K = (r, r)$. На первой итерации алгоритма угол с вершиной O срезается и возникает новая сторона MN. Кривая де Рама, соединяющая точки A и B, является фракталом, порожденным двумя аффинными операторами F_0 и F_1. Первый переводит треугольник AOB в треугольник AMK, второй переводит тот же треугольник AOB в треугольник KNB (порядок вершин учитывается). В координатах эти операторы записываются так:

$$\begin{aligned} F_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-2r & -r \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2r \\ 0 \end{pmatrix}; \\ F_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ -r & 1-2r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{57}$$

Как показал де Рам, при $r < \frac{1}{3}$ эта кривая будет принадлежать классу C^1 и ни при каком $r \neq \frac{1}{4}$ она не будет принадлежать классу C^2. Ее вторая производная будет равна нулю на всюду плотном множестве точек, а на другом всюду плотном множестве будет обращаться в $+\infty$. Лишь при $r = \frac{1}{4}$ она будет кривой класса C^2. Более того, в этом случае кривая де Рама является дугой параболы (упражнение 40).

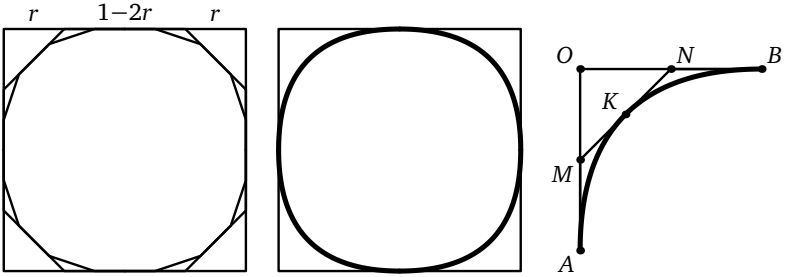


Рис. 34. Кривая де Рама, $r = \frac{1}{4}$: первые два шага процедуры для квадрата (слева), предельная кривая (в центре), один шаг процедуры срезания в одном углу (справа)

7.2. Фрактальные кривые

Как можно заметить на приведенных в предыдущем пункте примерах, некоторые фракталы, например кривые Кантора, Коха и де Рама, являются непрерывными кривыми, т. е. образами непрерывных отображений отрезка, а некоторые, как, скажем, ковер Серпинского, — нет. Этот феномен объясняется в следующей теореме, которую мы для простоты сформулируем только для случая $m = 1$, т. е. для двух отображений F_0 и F_1. Сначала заметим, что в силу принципа сжимающих отображений каждое отображение F_i имеет единственную неподвижную точку; обозначим ее v_i, $i = 0, 1$.

Теорема 21. *Если для сжимающих отображений F_0, F_1 пространства $\mathbb{R}^d$ выполнено перекрестное условие на их неподвижные точки*:

$$F_0 v_1 = F_1 v_0, \tag{58}$$

то порожденный ими фрактал является непрерывной кривой и совпадает с образом непрерывной функции $v\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^d$. Эта функция задается формулой

$$v(t) = \lim_{k\to\infty} F_{t_1} \dots F_{t_k} \bar{v}, \tag{59}$$

где $t = 0{,}t_1 t_2 \dots$ — запись числа t в двоичной системе счисления, $\bar{v}$ — произвольная точка пространства $\mathbb{R}^d$. Функция $v(t)$ является единственным непрерывным решением функционального уравнения

$$v(t) = \begin{cases} F_0 v(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ F_1 v(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{60}$$

Заметим, что кроме существования и единственности непрерывной фрактальной кривой $v(t)$ теорема утверждает, что предел (59) существует и не зависит от точки $\bar{v}$, а для двоично-рациональных чисел t он не зависит от того, оканчивается ли двоичная запись числа t последовательностью нулей или последовательностью единиц. Также утверждается, что уравнение (60) корректно определено в точке $t = \frac{1}{2}$ (это число можно подставлять в обе формулы, и результат совпадает).

Доказательство. Докажем сначала, что предел (59) существует и не зависит от точки $\bar{v}$. Поскольку оба оператора F_i сжимающие с показателем $q < 1$, они переводят в себя любой шар B достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. В самом деле, обозначим $F_i x = A_i x + b_i$, где A_i — линейный оператор, а b_i — вектор сдвига, и возьмем $R > \max_{i=0,1} \frac{\|b_i\|}{1-q}$. Тогда для любого $x \in B$ имеем $\|F_i x\| \leqslant \|A_i x\| + \|b_i\| \leqslant qR + \|b_i\| < R$. Последнее неравенство следует из условия $R > \frac{\|b_i\|}{1-q}$. Таким образом, $F_i B \subset B$, $i = 0, 1$.

Возьмем произвольную точку $\bar{v}$ и число $R > \frac{\|b_i\|}{1-q}$. Тогда для любых k и n имеем

$$\|F_{t_1} \ldots F_{t_k} \bar{v} - F_{t_1} \ldots F_{t_k} F_{t_{k+1}} \ldots F_{t_{k+n}} \bar{v}\| \leqslant q^k \|\bar{v} - F_{t_{k+1}} \ldots F_{t_{k+n}} \bar{v}\|.$$

Однако расстояние между точками $\bar{v}$ и $F_{t_{k+1}} \ldots F_{t_{k+n}} \bar{v}$ не превосходит $2R$, поскольку обе они лежат в шаре B. Следовательно,

$$\|F_{t_1} \ldots F_{t_k} \bar{v} - F_{t_1} \ldots F_{t_k} F_{t_{k+1}} \ldots F_{t_{k+n}} \bar{v}\| \leqslant 2Rq^k.$$

Это выражение стремится к нулю равномерно по всем $n \in \mathbb{N}$, поэтому последовательность $F_{t_1} \ldots F_{t_k} \bar{v}$ является фундаментальной (последовательностью Коши), а значит, сходится при $k \to \infty$. Она не зависит от точки $\bar{v}$. В самом деле, для любой другой точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^d$ расстояние $\|F_{t_1} \ldots F_{t_k} \bar{v} - F_{t_1} \ldots F_{t_k} \bar{u}\|$ не превосходит $q^k \|\bar{v} - \bar{u}\|$, а значит, стремится к нулю при $k \to \infty$.

Для любого двоично-рационального числа $t = 0{,}t_1 \ldots t_{n-1} t_n$ (мы всегда предполагаем, что $t_n = 1$) формула (59) при $\bar{v} = v_0$ имеет конечный вид:

$$v(t) = F_{t_1} \ldots F_{t_n} v_0. \tag{61}$$

Для доказательства достаточно подставить $\bar{v} = v_0$, так как предел не зависит от $\bar{v}$. Для любого $k > n$ имеем

$$F_{t_1} \ldots F_{t_k} v_0 = F_{t_1} \ldots F_{t_n} (F_0)^{k-n} v_0 = F_{t_1} \ldots F_{t_n} v_0,$$

следовательно, и предел (59) равен $F_{t_1}\ldots F_{t_n}v_0$. Если же заменить запись числа $t=0{,}t_1\ldots t_{n-1}t_n$ на $0{,}t_1\ldots t_{n-1}011\ldots$, то, подставляя $\bar{v}=v_1$ в формулу (59), получим $v(t)=F_{t_1}\ldots F_{t_{n-1}}F_1v_0=F_{t_1}\ldots F_{t_{n-1}}F_0v_1$, поскольку $F_0v_1=F_1v_0$. Таким образом, $v(t)$ не зависит от способа представления двоично-рационального числа t.

Итак, формула (59) корректно определяет функцию $v(t)$. Прямой подстановкой убеждаемся, что эта функция удовлетворяет уравнению (60), причем согласно формуле (61) мы имеем $v\left(\frac{1}{2}\right)=F_1v_0$, что равно F_0v_1 в силу равенства (58). Поэтому в точке $t=\frac{1}{2}$ функция может быть вычислена по любой из двух формул в (60). Осталось доказать непрерывность функции $v(t)$.

Фиксируем $j\in\mathbb{N}$, рассмотрим произвольную пару точек $s,t\in[0,1]$, для которой $s<t<2^{-j}$, и возьмем двоично-рациональное число h наименьшего порядка n, для которого $s<h\leqslant t$. Заметим, что $n\geqslant j$. Оценим расстояние $\|v(t)-v(h)\|$:

$$\|v(t)-v(h)\|\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\|F_{t_1}\ldots F_{t_k}F_{t_{k+1}}v_0-F_{t_1}\ldots F_{t_k}F_0v_0\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}q^k\|F_{t_{k+1}}v_0-F_0v_0\|\leqslant\|F_1v_0-v_0\|\sum_{k=n}^{+\infty}q^k=\frac{\|F_1v_0-v_0\|}{1-q}q^n\leqslant\frac{\|F_1v_0-v_0\|}{1-q}q^j.$$

Итак, если $|t-s|\to 0$, а значит, $j\to\infty$, то $\|v(t)-v(h)\|\to 0$. Так же доказываем, что $\|v(s)-v(h)\|\to 0$, нужно только заменить в конце двоичной записи числа h начиная с $t_n=1$ последовательность $1000\ldots$ на последовательность $0111\ldots$

Итак, формула (59) действительно задает непрерывную кривую. Непосредственной проверкой убеждаемся, что она удовлетворяет уравнению (60). Поскольку полный образ $K=\{v(t)\mid t\in[0,1]\}$ является объединением образов отрезков $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2},1\right]$, из уравнения (60) следует, что $K=F_0K\cup F_1K$. □

Таким образом, «первая половина» фрактальной кривой, соединяющая точки $v(0)$ и $v\left(\frac{1}{2}\right)$, подобна всей кривой посредством отображения F_0, а вторая половина, соединяющая $v\left(\frac{1}{2}\right)$ и $v(1)$, подобна всей кривой посредством F_1 (см. рис. 35).

Кривые Коха и де Рама — фрактальные кривые. У Коха неподвижными точками являются $v_0=A$ и $v_1=E$, и перекрестное условие выполнено: $F_0v_1=F_1v_0=C$. У де Рама неподвижными точками являются $v_0=A$, $v_1=B$, и перекрестное условие также выполнено:

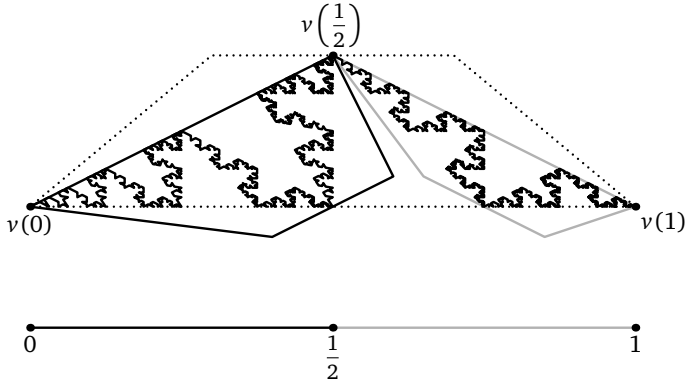


Рис. 35. Фрактальная кривая и составляющие ее части: $\nu\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ как F_0-образ всей кривой (внутри черной трапеции) и $\nu\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ как F_1-образ всей кривой (внутри серой)

$F_0\nu_1 = F_1\nu_0 = K$. Поэтому обе кривые имеют непрерывную параметризацию (59), удовлетворяющую уравнению (60). Канторова лестница также является фрактальной кривой, но для трех отображений. В этом случае теорема 21 приобретает несколько иной вид (двоичная система заменяется на троичную, меняется перекрестное условие (58) и т. д.). Мы не будем рассматривать обобщения теоремы 21, для наших целей ее вполне достаточно. Оказывается, всплески с компактным носителем порождаются фрактальными кривыми для двух операторов.

7.3. Построение всплесков как фрактальных кривых

Ключевое наблюдение, сделанное И. Добеши[1] и Дж. Лагариасом[2] в 1991 году в работах [4, 5], состоит в том, что решение любого масштабирующего уравнения становится фрактальной кривой, если перейти к вектор-функциям. Каждой функции $\varphi(t)$, сосредото-

[1]Ингрид Добеши (Ingrid Daubechies, р. 1954) — бельгийский и американский математик. Автор фундаментальных работ по математической физике, теории приближений и теории всплесков. Впервые построила гладкие всплески с компактным носителем.

[2]Джеффри Лагариас (Jeffrey Clark Lagarias, р. 1949) — американский математик, успешно работающий в теории чисел, комбинаторике, символических вычислениях и т. д.

ченной на отрезке $[0, N]$, поставим в соответствие вектор-функцию

$$v(t) = (\varphi(t), \varphi(t+1), \ldots, \varphi(t+N-1)) \in \mathbb{R}^N,$$

определенную на отрезке $[0, 1]$. Мы нарезали функцию φ на N кусочков единичной длины: k-я координата $v_k(t)$ вектора $v(t)$ равна функции φ на отрезке $[k-1, k]$, и, таким образом, $v_k(t) = \varphi(t+k-1)$, $t \in [0, 1]$. Оказывается, $v(t)$ — фрактальная кривая. Масштабирующее уравнение на функцию φ равносильно уравнению самоподобия (60) с линейными отображениями $F_0 v = T_0 v$, $F_1 v = T_0 v$, где T_0, T_1 — это $(N \times N)$-матрицы, которые определены по элементам следующей формулой:

$$(T_s)_{ij} = c_{2i-j-s}, \quad i, j = 1, \ldots, N; \ s = 0, 1. \tag{62}$$

Здесь c_k — коэффициенты масштабирующего уравнения (при $k > N$ и $k < 0$ полагаем $c_k = 0$). Например, при $N = 6$ матрицы T_0, T_1 выглядят так:

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & c_5 \end{pmatrix}; \quad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_6 & c_5 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор-функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению самоподобия

$$v(t) = \begin{cases} T_0 v(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ T_1 v(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{63}$$

У каждой матрицы T_0, T_1 в каждом столбце стоят коэффициенты c_k либо только с четными, либо только с нечетными номерами. Поскольку $\sum_i c_{2i} = \sum_i c_{2i+1} = 1$ (мы это доказали, перед тем как формулировать теорему 17), каждая из матриц переводит в себя аффинное пространство

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_k x_k = 1 \right\},$$

состоящее из точек с суммой координат, равной 1. Поэтому операторы T_0, T_1 задают аффинные отображения на пространстве L, и фрактальная кривая $v(t)$, $t \in [0, 1]$, целиком лежит в L.

Итак, *масштабирующая функция, порождающая всплески с компактным носителем, является фрактальной кривой*.

Этот факт позволяет не только понять, как устроены масштабирующие функции и всплески, но и строить их.

Строится масштабирующая функция φ последовательно. Подставив $t=0$ в первое уравнение системы (63), получаем $v(0)=T_0v(0)$. Таким образом, $v(0)$ можно найти, вычислив собственный вектор матрицы T_0, соответствующий собственному значению 1, и умножив его на число так, чтобы сумма его координат была равна 1, т. е. чтобы выполнялось условие $v(0)\in L$. А так как

$$v(0)=(\varphi(0),\varphi(1),\ldots,\varphi(N-1)),$$

получается, что мы нашли значения функции φ во всех целых точках $t\in\mathbb{Z}$.

Теперь подставляем $t=\frac{1}{2}$ во второе уравнение системы (63) и получаем $v\left(\frac{1}{2}\right)=T_1v(0)$. Мы нашли $v\left(\frac{1}{2}\right)$, т. е. нашли значения φ во всех полуцелых точках.

Подставляя $t=\frac{1}{4}$ и $t=\frac{3}{4}$, получаем $v\left(\frac{1}{4}\right)=T_0v\left(\frac{1}{2}\right)$ и $v\left(\frac{3}{4}\right)=$ $=T_1v\left(\frac{1}{2}\right)$. Мы нашли $v\left(\frac{1}{4}\right)$ и $v\left(\frac{3}{4}\right)$, т. е. нашли значения φ во всех двоично-рациональных точках порядка 2.

Так через n итераций находим значения $\varphi(t)$ во всех точках вида $2^{-n}k$, $k\in\mathbb{Z}$. А поскольку эти точки плотно покрывают всю прямую, мы приближенно вычислили функцию φ. Затем по формуле (46) вычисляем всплеск-функцию.

Мы описали основной способ построения всплесков с компактным носителем. Для них, за исключением всплесков Хаара, нет формул, поэтому вычисляются они приближенно с некоторой точностью.

Пример 10. Для масштабирующего уравнения

$$\varphi(t)=\frac{1}{3}\varphi(2t)+\varphi(2t-1)+\frac{2}{3}\varphi(2t-2)$$

вектор-функция $v(t)=(\varphi(t),\varphi(t+1))\in\mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению (63) с матрицами

$$T_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix};\quad T_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Находим $v(0)$ как собственный вектор матрицы T_0 с собственным значением 1 и с суммой координат, равной 1. Таким образом, $v(0)=$ $=(0,1)$. Далее, $v\left(\frac{1}{2}\right)=T_1v(0)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Затем вычисляем значения

$\nu(t)$ в двоично-рациональных точках следующего порядка: $\nu\left(\frac{1}{4}\right) = T_0\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{9}, \frac{8}{9}\right)$ и $\nu\left(\frac{3}{4}\right) = T_1\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$. Так можно последовательно вычислять $\nu(t)$ в двоично-рациональных точках.

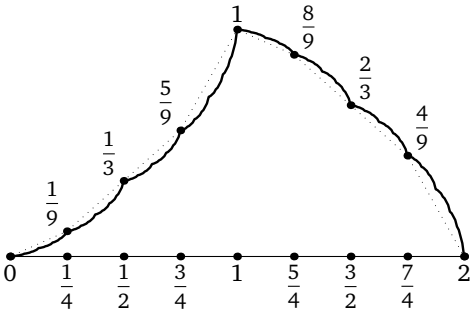


Рис. 36

Функция φ обладает фрактальными свойствами. Например, в каждой двоично-рациональной точке интервала $(0, 2)$ производная справа равна нулю, а производная слева обращается в $+\infty$. Более точно: при положительных h имеем

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \approx Ch^{\log_2 3},$$

где $\log_2 3 = 1{,}58\ldots$, а при отрицательных h имеем

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \approx Ch^{\log_2(3/2)},$$

где $\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}58\ldots$ Таким образом, функция φ не дифференцируема ни в одной двоично-рациональной точке интервала $(0, 2)$. Но при этом на множестве полной меры («почти в каждой точке») имеем $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \approx Ch^{\log_2(9/4)}$, где $\log_2\left(\frac{4}{9}\right) = 1{,}16\ldots$ Следовательно, почти в каждой точке функция φ дифференцируема и $\varphi'(t) = 0$.

Фрактальные кривые являются примерами «функций дробной гладкости». Для того чтобы понять, что это такое, нужно сначала определить, как измерять гладкость функции. Для этого есть много подходов. Один из них — с помощью показателя Гёльдера.

Определение 8. *Показателем Гёльдера* в $C[a, b]$ непрерывной функции f называется величина

$$\gamma_f = \sup\{\alpha \geqslant 0 \mid |f(t+h) - f(t)|^\alpha \leqslant Ch^\alpha \ \forall\, t \in [a, b], h \in [a, b-h]\}.$$

Например, для функции $f(t) = \sqrt{t}$ на отрезке $[0, 1]$ имеем $\gamma_f = \frac{1}{2}$. А для любого малого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[\varepsilon, 1]$ имеем $\gamma_f = 1$. Таким образом, исключив из области определения маленький интервал, мы получим, что на оставшемся промежутке $\gamma_f = 1$. Можно предположить, что это свойство всех непрерывных функций: после исключения нескольких маленьких интервалов функция становится «хорошей». Но это не так. Простейший пример дают фрактальные кривые и масштабирующие функции как их частный случай. Так, у функции φ из примера 10 на любом интервале (!) показатель Гёльдера один и тот же и равен $\log_2 \frac{3}{2} = 0{,}58\ldots$

Упражнения

38. Докажите, что расстояние по Хаусдорфу задает метрику на множестве компактов, т. е. что оно симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника.

39. Докажите, что каждый выпуклый многогранник является фракталом по Хатчинсону. Верно ли это для невыпуклых многогранников?

40. Докажите, что кривая де Рама при $r = \frac{1}{4}$ является дугой параболы. (Указание: докажите, что парабола, касающаяся сторон угла AOB в точках A и B, удовлетворяет свойству самоподобия с указанными линейными операторами.)

41. Докажите, что если показатель Гёльдера функции больше единицы, то эта функция является тождественной константой.

42. Является ли функция φ решением масштабирующего уравнения? Если да, то какого?

а) $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$;

б) $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-2\pi i\xi}\left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2$;

в) $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in [0, 2]; \\ 2 - \frac{t}{2}, & t \in [2, 4]; \\ 0, & t \notin [0, 4]; \end{cases}$

г) $\varphi(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1]; \\ 1, & t \in [1, 2]; \\ 3 - t, & t \notin [2, 3]; \\ 0, & t \notin [0, 3]. \end{cases}$

43. Найдите решение φ масштабирующего уравнения

$$\varphi(t) = \frac{3}{4}\varphi(2t) + \varphi(2t-1) + \frac{1}{4}\varphi(2t-2)$$

в точках $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \ldots, \frac{7}{4}, 2$.

44. Найдите решение φ масштабирующего уравнения

$$\varphi(t) = 2\varphi(2t) + \varphi(2t-1) - \varphi(2t-2)$$

в точках $t = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \ldots, \frac{15}{8}, 2$.

45. Решите масштабирующее уравнение

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(2t) + \frac{1}{2}\varphi(2t-1) + \frac{1}{2}\varphi(2t-2) + \frac{1}{2}\varphi(2t-3).$$

(Указание: вначале найдите решение φ в нескольких двоичных точках, далее постарайтесь угадать формулу для решения, затем проверьте, что данная функция действительно удовлетворяет этому уравнению.)

46. а) Докажите, что для функции φ из примера 10 выполняется равенство $\gamma_\varphi = \log_2 \frac{3}{2}$.

б)* Докажите, что на любом интервале $(a, b) \subset [0, 1]$ показатель Гёльдера функции φ из равен $\log_2 \frac{3}{2}$.

47*. Найдите показатель Гёльдера канторовой лестницы (пример 7). Верно ли, что он один и тот же на всех интервалах из отрезка $[0, 1]$?

48*. Найдите показатели Гёльдера масштабирующих функций из упражнений 43 и 44.

8. Всплески Добеши

8.1. Построение всплесков Добеши

В предыдущем разделе мы научились строить решения масштабирующих уравнений, а в п. 6.2 — находить маски $m(\xi)$ этих уравнений (фактически — последовательности коэффициентов $\{c_k\}_{k=0}^N$), при которых решения φ порождают систему всплесков. При этом всплеск-функция ψ находится по явной формуле (46). Маска m строится следующим образом: фиксируется $n \geqslant 1$, выбирается произвольный нечетный полином $R(z)$, и применяется формула (52). Получаем полином $P(z)$. Единственное условие, которое при этом должно выполняться, — это положительность $P(z)$ на отрезке $[0, 1]$. Это условие на полином R. Далее применяем формулу (53) и получаем квадрат модуля маски $|m(\xi)|^2$. Пользуясь леммой Рисса, извлекаем корень и получаем маску $m(\xi)$. Таким образом, коэффициенты масштабирующего уравнения найдены. Далее строим его решение и получаем из него всплеск-функцию.

Определение 9. *Всплесками Добеши порядка* $n \geqslant 1$ называется система всплесков с компактным носителем, порожденная всплеск-функцией ψ_n, которая получена из маски m, построенной по формулам (52) и (53) с полиномом $R = 0$.

Заметим, что при $R = 0$ все коэффициенты полинома P положительны и, значит, $P(z) > 0$ при $z \in [0, 1]$. Полином P при этом имеет степень $n - 1$, а при всех других полиномах R его степень не менее n. Следовательно, степень маски при $R = 0$ минимальна. Согласно формуле (53) она равна $n - 1$. Таким образом, справедлив следующий результат.

Следствие 4. *При заданном n всплески Добеши имеют наименьшую возможную степень маски, равную $N = 2n - 1$, и, соответственно, наименьшую длину носителя функций φ и ψ, равную тому же числу. Для всех остальных всплесков с компактным носителем $N \geqslant 2n$.*

Заметим, что извлечение корня из неотрицательного тригонометрического полинома по лемме Рисса неоднозначно, у полинома может быть несколько (конечное множество) корней, с точностью до умножения на константу. В качестве маски m_n можно брать любой из этих корней. Получаются разные маски и разные всплеск-функции, но с похожими свойствами. Начнем изучение всплесков Добеши с малых n.

$n = 1$, первый всплеск Добеши ψ_1. Это всплеск Хаара! В самом деле, $P(z) = 1$, $|m(\xi)|^2 = \cos^2(\pi\xi)$, поэтому в качестве корня можно взять $m(\xi) = \cos(\pi\xi)$, а можно, например,

$$e^{\pi i\xi}\cos(\pi\xi) = m(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi i\xi}).$$

В этом случае масштабирующее уравнение имеет два коэффициента $c_0 = c_1 = 1$ и, таким образом,

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1).$$

Решение этого уравнения $\varphi_1 = \chi_{[0,1)}$ порождает всплески Хаара со всплеск-функцией $\psi_1 = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$. Итак, *всплеск Хаара — это первый всплеск Добеши*. Вся теория всплесков с компактным носителем начинается со второго всплеска Добеши. Как мы уже упоминали, переход от первого ко второму всплеску занял 79 лет.

$n = 2$, второй всплеск Добеши ψ_2. В данном случае степень многочлена $m(\xi)$ равна 3, а соответствующее масштабирующее уравнение имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2t) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-1) + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-2) + \\ + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-3). \quad (64)$$

Его решение — функция φ_2, сосредоточенная на отрезке $[0, 3]$. Она непрерывна (первая непрерывная всплеск-функция с компактным носителем!), но не принадлежит C^1. В каждой двоично-рациональной точке $t \in (0, 3)$ функция φ_2 дифференцируема слева и не дифференцируема справа. Ее производная справа обращается в $+\infty$. Более

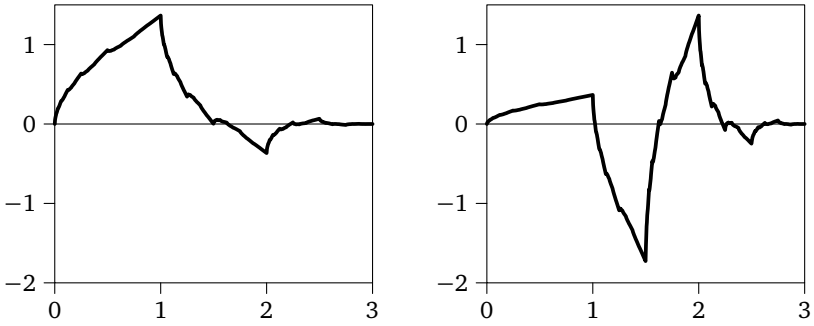


Рис. 37. Всплески Добеши: функции φ_2 (слева) и ψ_2 (справа)

того, для $h>0$ имеем $|\varphi_2(t+h)-\varphi_2(t)|\asymp h^\alpha$, где $\alpha=1+\log_2(\sqrt{3}-1)=$ $=0{,}55\ldots$ Так будет в каждой двоично-рациональной точке t.

Все вышесказанное верно и для всплеск-функции ψ_2.

$n=3$, третий всплеск Добеши ψ_3. Степень многочлена $m(\xi)$ равна 5, коэффициенты масштабирующего уравнения:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}; & c_1 &= \frac{5+\sqrt{10}+3\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}; \\ c_2 &= \frac{10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}; & c_3 &= \frac{10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}; \\ c_4 &= \frac{5+\sqrt{10}-3\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}; & c_5 &= \frac{1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}. \end{aligned} \tag{65}$$

Его решение φ_3 сосредоточено на отрезке $[0,5]$, оно уже принадлежит $C^1(\mathbb{R})$. Однако производная φ_3' не будет дифференцируема ни в одной точке интервала $(0,5)$. То же верно для всплеск-функции ψ_3.

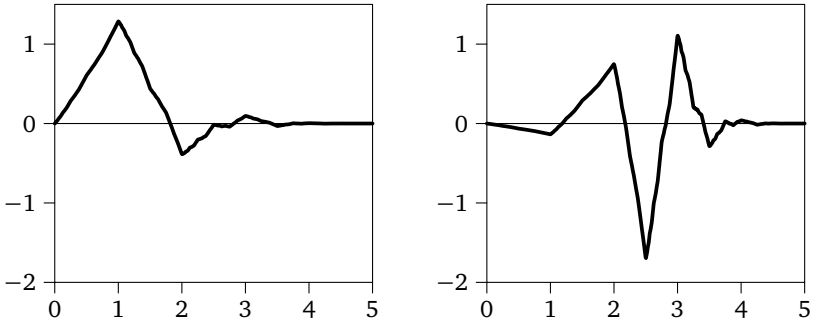


Рис. 38. Всплески Добеши: функции φ_3 (слева) и ψ_3 (справа)

$n=4$, четвертый всплеск Добеши ψ_4. Степень многочлена $m(\xi)$ равна 7, коэффициенты масштабирующего уравнения:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0{,}325802; & c_4 &= -0{,}264507; \\ c_1 &= 1{,}010945; & c_5 &= 0{,}043616; \\ c_2 &= 0{,}892200; & c_6 &= -0{,}046503; \\ c_3 &= -0{,}039575; & c_7 &= -0{,}014976. \end{aligned} \tag{66}$$

Его решение φ_4 сосредоточено на отрезке $[0,7]$, оно принадлежит $C^1(\mathbb{R})$, но пока не принадлежит $C^2(\mathbb{R})$.

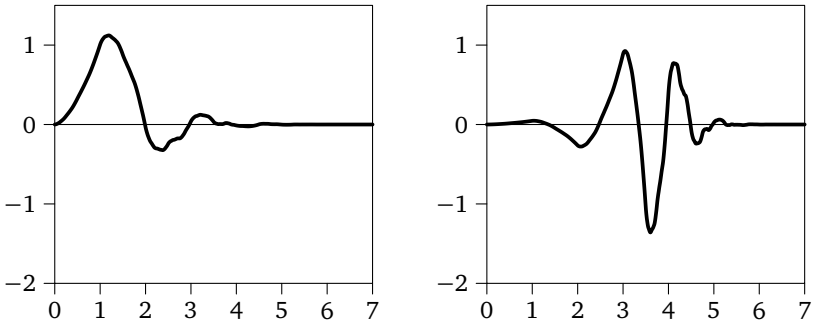


Рис. 39. Всплески Добеши: функции φ_4 (слева) и ψ_4 (справа)

8.2. Шкала регулярности всплесков Добеши

Как мы видим, уже второй всплеск Добеши ψ_2 решает многолетнюю задачу: он является непрерывным всплеском с компактным носителем. Таким образом, ψ_2 — это «непрерывный Хаар». Правда, функция стала гораздо сложнее, она по-прежнему не дифференцируема, и длина ее носителя увеличилась до трех. У следующего всплеска ψ_3 гладкость выше — он уже принадлежит $C^1(\mathbb{R})$. Кажется, что дальше гладкость так и будет увеличиваться на единицу каждый раз, но этого не происходит. Четвертый всплеск Добеши все еще не принадлежит $C^2(\mathbb{R})$. На самом деле гладкость увеличивается, но не на единицу, а меньше. Чтобы сформулировать соответствующий результат, мы должны использовать непрерывную шкалу гладкости. В следующем определении нам понадобится показатель Гёльдера (определение 8).

Определение 10. *Общим показателем Гёльдера* непрерывной функции f называется величина

$$\alpha_f = k + \gamma_{f^{(k)}},$$

где k — наибольшее целое число, для которого $f \in C^k$.

Таким образом, если $f \notin C^1$, то $\alpha_f = \gamma_f$. Несложно показать, что если f не является тождественной константой, то $\gamma_f \leqslant 1$ (упражнение 41). Далее всегда будем предполагать, что f — не тождественная константа. Если функция f липшицева, то $\gamma_f = 1$. Если f принадлежит C^k, то $\alpha_f \geqslant k$; обратно, если $\alpha_f > k$, то $f \in C^k$.

Теорема 22 (И. Добеши, 1988 [3]). *Для любого $n \geqslant 1$ выполнено неравенство $\alpha_{\psi_n} > \frac{1}{5}n$.*

Таким образом, существуют сколь угодно гладкие всплески Добеши. Однако платить за увеличение гладкости приходится ростом длины носителя. Из примеров видно, что уже при малых n настоящая гладкость превосходит данную оценку. Но асимптотически при $n \to \infty$ она, по-видимому, близка к реальной. Вот точные значения гладкости всплесков Добеши при всех $n \leqslant 20$, значения взяты из работы [9].

n	α	n	α	n	α	n	α
		6	2,189…	11	3,603…	16	4,786…
2	0,550…	7	2,460…	12	3,833…	17	5,024…
3	1,087…	8	2,760…	13	4,073…	18	5,239…
4	1,617…	9	3,073…	14	4,316…	19	5,465…
5	1,968…	10	3,361…	15	4,556…	20	5,691…

Таблица 2. Показатели Гёльдера всплесков Добеши ψ_n для $n \leqslant 20$

Таким образом, начиная с $n = 6$ функция ψ_n принадлежит C^2, начиная с $n = 9$ принадлежит C^3, начиная с $n = 13$ принадлежит C^4 и т. д.

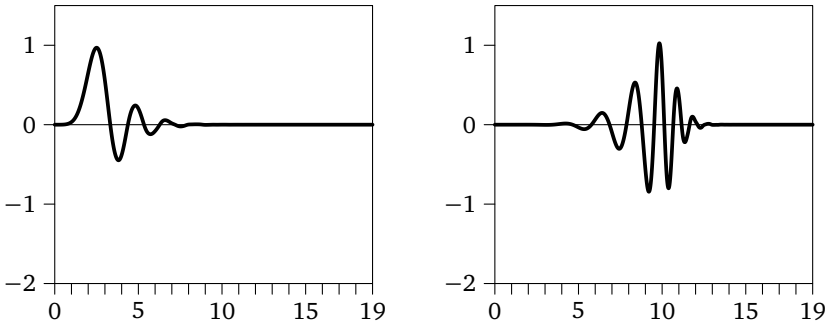


Рис. 40. Всплески Добеши: функции φ_{10} (слева) и ψ_{10} (справа)

На рис. 41 представлен график α_{ψ_n} как функции от n. Видно, что рост тут действительно близок к линейному. Разность $\alpha_{\psi_n} - \alpha_{\psi_{n-1}}$ не является монотонной по n, но приближается к 0,226. Верно ли это только для $n \leqslant 20$ или при $n \to \infty$, неизвестно.

А как объяснить, что гладкость всплесков Добеши увеличивается с ростом n? В этом нам поможет «бесполезная» формула бесконечного произведения (55). Согласно соотношению (47) полином

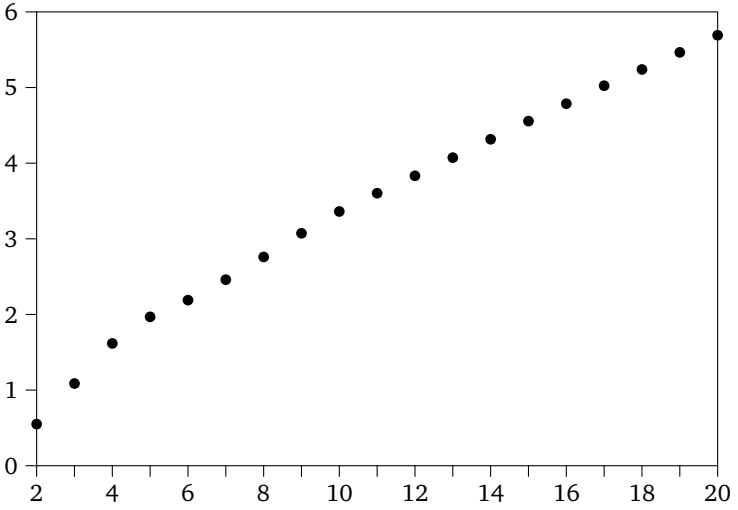


Рис. 41. Функция α_{ψ_n}

$m = m_n$ для n-го всплеска Добеши дается формулой

$$m_n(\xi) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi} + 1}{2}\right)^n q_n(\xi),$$

где q_n — тригонометрический полином. Из конструкции следует, что степень q_n равна $n - 1$. Далее, воспользовавшись примером 5, получаем

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-2^{-k}2\pi i\xi} + 1}{2}\right)^n = e^{-n\pi i\xi}\left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^n.$$

Таким образом, для масштабирующей функции φ_n n-го всплеска Добеши имеем

$$\widehat{\varphi}_n(\xi) = e^{-n\pi i\xi}\left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^n \prod_{k=1}^{\infty} q_n(2^{-k}\xi).$$

Сомножитель $\left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^n$ убывает при $\xi \to \infty$ как ξ^{-n}. Поэтому чем больше n, тем быстрее он убывает. Это влияет на убывание функции $\widehat{\varphi}_n(\xi)$ при $n \to \infty$: чем больше n, тем быстрее она убывает. Влияние это не прямое, поскольку есть еще полином q_n, который также зависит от n. Но поведение функции $\prod_{k=1}^{\infty} q_n(2^{-k}\xi)$ при $n \to \infty$ мож-

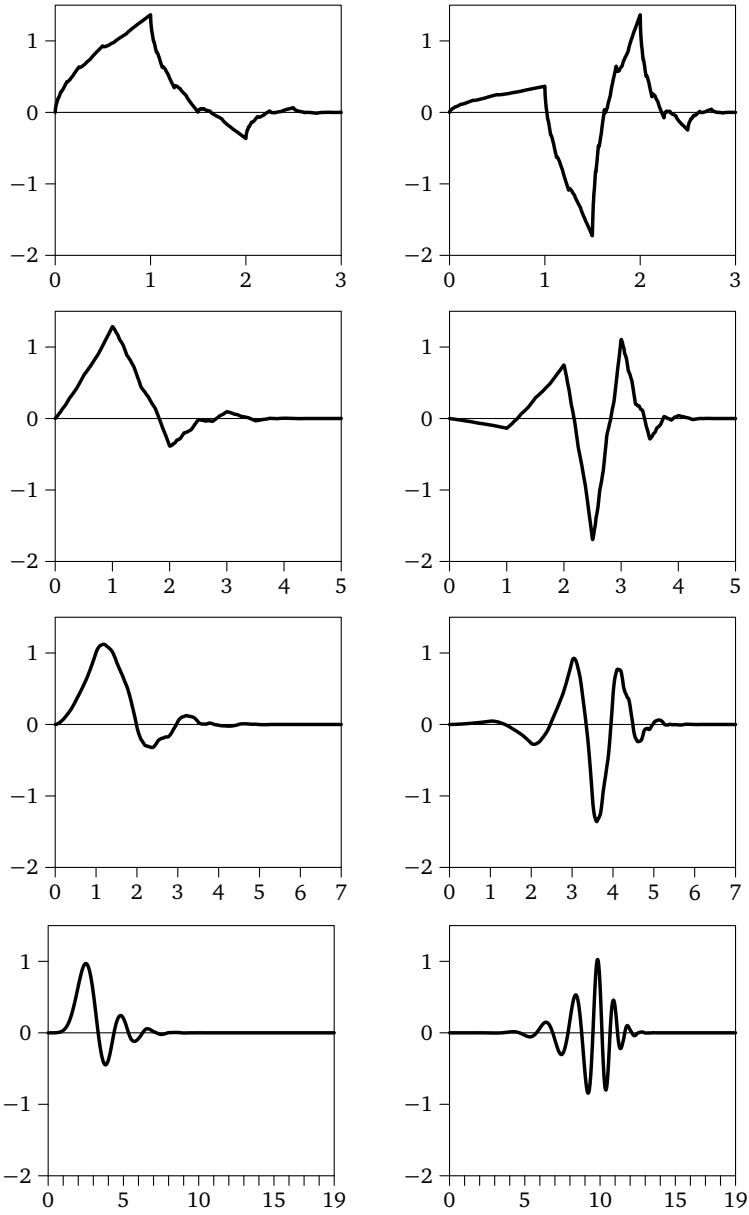


Рис. 42. Всплески Добеши: функции φ_n (левая колонка) и ψ_n (правая) для $n = 2, 3, 4, 10$ (строчки сверху вниз)

но оценить в зависимости от n. В этом состоит главная сложность доказательства теоремы 22. При этом действительно можно доказать, что с ростом n функция $\widehat{\varphi}_n(\xi)$ быстрее убывает на бесконечности. А это означает, что функция φ_n становится более гладкой (см. п. 5.1).

Заключение

Конечно же, мы смогли пройти лишь первые основные этапы «функциональной» части теории обработки сигналов. На всплесках Добеши, изобретенных почти 30 лет назад, все не закончилось, а многое только началось. Продолжают создаваться новые системы функций, новые принципы разложений и преобразований сигналов. Хотя прорывов, подобных созданию всплесков Мейера и Добеши, с тех пор, пожалуй, не было. Думается, это — дело ближайшего будущего.

Литература

[1] *M. Barnsley*. Fractals everywhere. Boston: Academic Press, 1988.

[2] *B. Cipra*, *P. Zorn*. Parlez-vous Wavelets? // What's Happening in the Mathematical Sciences. V. 2. AMS, 1994. P. 23—26.

[3] *I. Daubechies*. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992. (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics; Vol. 61). Рус. перев.: *И. Добеши*. Десять лекция по вейвлетам. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

[4] *I. Daubechies*, *J. Lagarias*. Two-scale difference equations. Existence and Global Regularity of Solutions // SIAM. J. Math. Anal. 1991. V. 22. P. 1388—1410.

[5] *I. Daubechies*, *J. Lagarias*. Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1031—1079.

[6] *G. De Rham*. Sur une courbe plane // J. Math. Pures Appl. (9). 1956. V. 35 P. 25—42.

[7] *M. W. Frazier*. An introduction to wavelets through linear algebra. New York: Springer, 1999.

[8] *A. Graps*. An introduction to wavelets // IEEE Comput. Sc. Engin. 1999. V. 2. P. 50—61.

[9] *N. Guglielmi*, *V. Yu. Protasov*. Invariant polytopes of sets of matrices with applications to regularity of wavelets and subdivisions // SIAM J. Matrix Anal. 2016. V. 37, № 1. P. 18—52.

[10] *J. E. Hutchinson*. Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, № 5. P. 713—747.

[11] *A. Krivoshein*, *V. Protasov*, *M. Skopina*. Multivariate wavelet frames. Singapore: Springer, 2016.

[12] *Б. С. Кашин*, *А. А. Саакян*. Ортогональные ряды. М.: Издательство АФЦ, 1999.

[13] *Ch. A. Micchelli*, *H. Prautzsch*. Uniform refinement of curves // Linear Algebra Appl. 1989. V. 114/115. P. 841—870.

[14] *И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина*. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.

[15] *I. Novikov, E. Semenov*. Haar series and linear operators. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1997. (Mathematics and its Applications; V. 367).

[16] *И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин*. Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53, № 6. С. 53—128.

[17] *А. П. Петухов*. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Издательство СПбГУ, 1999.

[18] *В. Ю. Протасов*. Фрактальные кривые и всплески // Изв. РАН. Сер. мат. 2006. Т. 70. С. 123—162.

[19] *В. М. Тихомиров*. Теория приближений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 14. Анализ — 2. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 103—260.

[20] *M. Ueda, S. Lodha*. Wavelets: an elementary introduction and examples. Technical Report, University of California at Santa Cruz, 1995.