

**Дифференциальные  
формы и связности.  
Сборник статей**

МЦНМО

Летняя школа «Современная математика»  
Дубна, июль 2001

# Дифференциальные формы и связности

А. А. Болибрух

Уравнения Максвелла  
и дифференциальные формы

М. Э. Казарян

Дифференциальные формы,  
расслоения, связности

Электронное издание

Москва  
Издательство МЦНМО  
2018

УДК 514.762.5

ББК 22.151

Д50

Дифференциальные формы и связности

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2018

38 с.

ISBN 978-5-4439-3144-9

Книга написана по материалам лекций, прочитанных авторами на первой летней школе «Современная математике» в Дубне в июле 2001 года.

В нее вошли ранее издававшиеся брошюры А. А. Болибруха и М. Э. Казаряна, в которых рассказывается об основных понятиях дифференциальной геометрии: дифференциальных формах, расслоениях, связностях, а также об их использовании в современной физике.

Книга адресована студентам младших курсов и школьникам старших классов.

Материалы книги были опубликованы в двух брошюрах в 2002 г.

Подготовлено на основе книги: Дифференциальные формы и связности. Сборник статей. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-1144-1.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,  
тел. (499) 241-08-04.  
<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-3144-9

© Болибрух А. А., Казарян М. Э., 2002.

© МЦНМО, 2017.

# Уравнения Максвелла и дифференциальные формы

В этих двух лекциях мы хотим рассказать вам о дифференциальных формах, расслоениях и связностях. Эти понятия сейчас очень активно используются в самых разных областях математики и физики, и нам бы хотелось хотя бы немного вас с ними познакомить. Для того чтобы наш рассказ не был излишне абстрактным, мы решили привязаться к такому физическому объекту, как *электромагнитное поле*, и показать вам, как при попытке описания этого поля естественным образом возникают все перечисленные понятия.

Разумеется, эти лекции не претендуют на систематическое изложение теории дифференциальных форм или теории расслоений и связностей. Каждый из этих сюжетов занимает примерно семестровый курс на мехмате. Наша задача гораздо скромнее: предварительное знакомство с предметом и мотивировки (пришедшие из физики) необходимости его изучения.

## Лекция 1

### §1.

Принято считать, что электромагнитное поле характеризуется двумя величинами — *вектором электрической напряженности*  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  и *вектором магнитной напряженности*  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ . Предполагается, что компоненты этих векторов гладко зависят от точки пространства, а также от времени. Совокупность экспериментальных данных была обобщена Максвеллом в 1861—1862 годах в его знаменитых *уравнениях Максвелла*:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \end{cases}$$

где  $c$  — скорость света,  $\rho$  — плотность заряда, а  $\vec{j}$  — плотность тока, т. е. плотность заряда, умноженная на скорость перемещения этого заряда.

Напомним, как определяются ротор и дивергенция:

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

Но действительно ли величины  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\operatorname{rot} \vec{v}$  являются векторами? Как они меняются при замене координат? Скоро мы увидим, что они не очень похожи на векторы и что есть другая, более удобная форма записи тех же самых уравнений, которая возникла позднее, когда появилась теория дифференциальных форм, введенная Пуанкаре и Эли Картаном.

Чтобы лучше понять, как меняются компоненты вектора при замене координат, рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Рассмотрим  $n$ -мерное пространство  $\mathbb{R}^n$  (можно считать для простоты, что  $n = 3$ ) и гладкую кривую  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , задаваемую в некоторой системе координат  $(x^1, \dots, x^n)$  уравнениями  $x^i = \varphi^i(t)$ . При  $t = 0$  касательный вектор к этой кривой в выбранной системе координат имеет компоненты  $\xi^i = \dot{\varphi}^i(0)$  (точкой обозначается дифференцирование по  $t$ ). Теперь рассмотрим новую систему координат  $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ , связанную со старой при помощи гладких функций  $\hat{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$ . Компоненты касательного вектора в новой системе координат будем обозначать  $\hat{\xi}^i$ . Тогда

$$\hat{\xi}^i = \left. \frac{d\hat{x}^i}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{df^i(\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right|_{t=0} \xi^j$$

по формуле производной сложной функции. Вот как, оказывается, связаны координаты касательного вектора в новой и старой системах координат.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию  $\varphi$  от  $n$  переменных:  $\varphi = \varphi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ . Зачем мы записали ее сразу в новых координатах, станет ясно чуть позже. Рассмотрим *градиент* этой функции (который также часто называют вектором)

$$\operatorname{grad} \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^n} \right) = (\hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^n).$$

Теперь попробуем сделать замену координат и вычислить компоненты градиента, только на этот раз уже не в новой, а в старой системе координат:

$$\eta^i = \frac{\partial \varphi(f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^n(x^1, \dots, x^n))}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \hat{\eta}^j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}.$$

Сравним формулы, полученные в этих двух примерах. В обеих этих формулах участвуют выражения вида  $\partial f^i / \partial x^j$ , но между ними есть существенное отличие. В первом случае мы выражаем новые координаты через старые, а во втором — наоборот. Мы приходим к выводу, что при замене координат компоненты градиента меняются совсем по другому закону, чем компоненты касательного вектора. Градиент скорее напоминает не вектор, а дифференциал функции:

$$d\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^j} d\hat{x}^j.$$

И градиент функции, и касательный вектор являются тензорами, но тензорами разного типа.

## § 2.

Рассмотрим на  $\mathbb{R}^n$  пространство векторных полей  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Под векторным полем мы будем понимать выражение

$$\vec{v}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j=1}^n v_j(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

где  $v_j(x^1, \dots, x^n)$  — гладкие функции, а через  $\partial / \partial x^j$  обозначен вектор  $e_j$  стандартного базиса в  $\mathbb{R}^n$  (эти обозначения оказываются очень удобными при рассмотрении векторных полей на многообразиях). Такие поля еще иногда называют *касательными*. Множество гладких функций на  $\mathbb{R}^n$  мы будем обозначать  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

Множество векторных полей является линейным пространством: векторные поля можно складывать (покоординатно) и умножать на числа. Более того, их можно умножать на любые гладкие функции, заданные на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ . К сожалению, гладкие функции образуют не поле, а кольцо, поэтому говорят не о линейном пространстве векторных полей, а о *модуле векторных полей над кольцом гладких функций*.

Рассмотрим сопряженное пространство к  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  — пространство  $\mathcal{F}$ -линейных функционалов  $\alpha: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , т. е. таких отображений, что  $\alpha(f\vec{v}) = f\alpha(\vec{v})$  для любой гладкой функции  $f(x)$  и любого векторного поля  $\vec{v}$  и  $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1) + \alpha(\vec{v}_2)$ . Это сопряженное пространство также является модулем над кольцом гладких функций. Оно называется *пространством дифференциальных 1-форм* и обозначается  $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ . У этого модуля есть образующие, сопряженные к образующим  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,

которые мы будем обозначать через  $dx^j$ :

$$dx^j \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Любая 1-форма может быть представлена в виде  $\mathcal{F}$ -линейной комбинации этих образующих:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x^1, \dots, x^n) dx^i,$$

где  $\alpha_i(x^1, \dots, x^n)$  — гладкие функции из  $\mathcal{F}$ . При изменении координат в исходном пространстве соответственно меняются координаты и в сопряженном пространстве. Компоненты 1-формы при этом меняются по тому же закону, что и компоненты дифференциала. Это означает, что дифференциал функции  $f$  является частным случаем 1-формы (что оправдывает введение таких обозначений для базиса сопряженного пространства), т. е. у нас имеется отображение  $d: \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ . Не всякая дифференциальная 1-форма является образом некоторой функции при взятии дифференциала, но имеет место включение: образ  $d$  лежит в пространстве 1-форм. Таким образом, дифференциал является не вектором, а *ковектором* — так принято называть дифференциальные 1-формы.

Можно ли расширить это определение, т. е. рассмотреть не только 1-формы, но и, например, 2-формы? Оказывается, это сделать совсем нетрудно. Для этого нужно лишь вместо векторного поля рассмотреть пару векторных полей, и каждой паре векторных полей поставить в соответствие гладкую функцию. И если это отображение является  $\mathcal{F}$ -линейным по каждому аргументу, то мы приходим к понятию 2-ковектора на множестве векторных полей: это просто  $\mathcal{F}$ -билинейное отображение  $\alpha: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

**Пример 3.** Рассмотрим два векторных поля  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  в  $\mathbb{R}^3$  и отображение, сопоставляющее паре векторов их скалярное произведение:

$$r: \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad r(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \gamma.$$

Легко проверить что это отображение  $\mathcal{F}$ -билинейно; к тому же оно еще и симметрическое: если поменять местами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , то результат не изменится. Это отображение можно записать и в матричной форме:

$$r(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (x^1 y^1 z^1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix},$$

где  $x^i, y^i, z^i$  — координаты вектора  $\vec{v}_i$ . Получаем симметрическую 2-форму, которая называется евклидовой метрикой в  $\mathbb{R}^3$ .

**Пример 4.** А вот пример (тоже хорошо всем известный) антисимметрического 2-ковектора, или *внешней формы*. Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^2$  два векторных поля  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  и поставим им в соответствие *ориентированную площадь*  $\tau(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$  параллелограмма, построенного на этих векторах. В координатах эта площадь равна определителю

$$\begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} = x^1 y^2 - x^2 y^1.$$

Это отображение также является линейным по каждому из аргументов, но уже обладает свойством антикоммутативности:  $\tau(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\tau(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$ .

Именно такие 2-ковекторы (их еще называют *кососимметрическими*) представляют для нас особый интерес.

**Определение 1.** Отображение  $\alpha: \underbrace{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}_k \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  называется *внешней дифференциальной формой степени  $k$* , если оно  $\mathcal{F}$ -линейно по каждому аргументу и

$$\alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = -\alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n)$$

для любых  $i, j$ .

Пространство  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  внешних дифференциальных форм степени  $k$  и станет объектом нашего дальнейшего изучения. Естественно, что всякий 1-ковектор можно рассматривать как внешнюю дифференциальную форму (впрочем, точно так же его можно рассматривать и как симметрическую форму).

Для того, чтобы записывать формы в координатах, мы введем новую операцию на дифференциальных формах — *внешнее произведение*. Сначала определим ее для пары 1-форм. Эта операция будет тоже  $\mathcal{F}$ -линейной, поэтому мы определим ее только на базисных 1-ковекторах, а затем распространим на все 1-формы по  $\mathcal{F}$ -линейности. Каждой паре 1-форм эта операция ставит в соответствие 2-форму, причем на базисных ковекторах она определяется следующим образом:

$$(dx^i \wedge dx^j)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = dx^i(\vec{v}_1) dx^j(\vec{v}_2) - dx^i(\vec{v}_2) dx^j(\vec{v}_1).$$

Легко проверить, что полученная форма кососимметрична. Замечательно, что таким образом можно получить весь базис в пространстве 2-форм. Поэтому любой элемент  $\omega$  из  $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$  записывается очень просто:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1 i_2}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}.$$

Аналогично можно определить внешнее произведение для форм произвольной степени. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  —  $p$ - и  $q$ -формы соответственно. Тогда внешним произведением форм  $\alpha$  и  $\beta$  называется  $(p+q)$ -форма

$$(\alpha \wedge \beta)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum \epsilon(s) \alpha(\vec{v}_{s^{-1}(1)}, \dots, \vec{v}_{s^{-1}(p)}) \times \beta(\vec{v}_{s^{-1}(p+1)}, \dots, \vec{v}_{s^{-1}(p+q)}),$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам  $p+q$  элементов, а  $\epsilon(s)$  — знак перестановки  $s$ .

Приведенное определение инвариантно, т. е. не зависит от выбора системы координат. Но если система координат фиксирована, то из него сразу следует, что базис в пространстве  $k$ -форм состоит из элементов вида  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ . Поэтому произвольная форма  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Отметим еще одно замечательное свойство операции внешнего дифференцирования:  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$ . Отсюда, в частности, следует, что если степень  $\alpha$  нечетна, то  $\alpha \wedge \alpha = 0$ .

### § 3.

Заметим, что операция дифференцирования каждой функции сопоставляет 1-форму. А можно ли определить операцию дифференцирования для произвольной формы? Оказывается, это очень легко сделать. По определению полагаем

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Видно, что дифференциал повышает на единицу степень формы. Кроме того, из этого определения сразу следует, что  $d^2\alpha = 0$ . Действие дифференциала на внешние формы можно представить следующей диаграммой:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \dots$$

Этот объект называется *комплексом де Рама*, и в нем содержится большой объем информации о пространстве, на котором заданы дифференциальные формы. В данном случае мы имеем дело с  $\mathbb{R}^n$ , которое устроено довольно просто, но если бы мы стартовали с другого пространства, скажем, со сферы, то по этому комплексу мы бы узнали очень многое о топологии пространства.

Нетрудно проверить, что введенная с помощью координат операция внешнего дифференцирования на самом деле от координат не зависит, т. е. является инвариантной (проверьте это самостоятельно).

Наконец, последняя операция, которую нам осталось ввести — операция внутреннего произведения. Пусть у нас есть векторное поле  $\vec{v}$  и внешняя форма  $\alpha$  порядка  $p$ . Тогда мы можем построить форму степени  $p - 1$ , которая называется внутренним произведением формы  $\alpha$  и поля  $\vec{v}$ :

$$(i_v \alpha)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1}).$$

Это определение также не зависит от выбора системы координат.

#### § 4.

Попробуем теперь понять, что означают операторы ротора и дивергенции на инвариантном языке дифференциальных форм. Хотя мы часто писали дифференциальные формы в координатах, определение их было инвариантным, от координат не зависящим. А вот определения ротора и дивергенции зависят от выбора системы координат. Так давайте выясним, в чем же состоит эта зависимость.

Разберемся сначала с дивергенцией. Мы начинаем с векторного поля  $\vec{v}$  на  $\mathbb{R}^3$ . По этому векторному полю мы построим 2-форму следующим образом. Возьмем форму объема  $\tau = dx \wedge dy \wedge dz$  и рассмотрим внутреннее произведение  $i_v \tau$  — это и есть обещанная 2-форма. Из нее мы получим 3-форму путем взятия внешнего дифференциала. Но пространство 3-форм на  $\mathbb{R}^3$  имеет единственный базисный вектор, и это в точности форма объема  $dx \wedge dy \wedge dz$ . Значит, полученная нами форма есть некоторая гладкая функция, помноженная на форму объема. Проверим, что эта гладкая функция и будет дивергенцией векторного поля  $\vec{v}$ . Пусть поле  $\vec{v}$  имеет вид

$$\vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда

$$(i_v \tau) \left( \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (dx \wedge dy \wedge dz) \left( \vec{v}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = v_x,$$

$$(i_v \tau) \left( \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = (dx \wedge dy \wedge dz) \left( \vec{v}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = v_y,$$

$$(i_v \tau) \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = (dx \wedge dy \wedge dz) \left( \vec{v}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = v_z.$$

Отсюда

$$i_v \tau = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy.$$

Теперь возьмем дифференциал:

$$\begin{aligned} d(i_v \tau) &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Мы получили в точности дивергенцию, помноженную на форму объема. Таким образом, дивергенцию можно записать в очень компактном виде:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{d(i_v \tau)}{\tau}.$$

Что же здесь зависит от выбора системы координат? Внутреннее произведение и дифференциал инвариантны относительно замен координат, от координат зависит только форма объема. Выясним, при каких заменах дивергенция не меняется.

При замене координат  $\hat{x}^i = f^i(x^1, x^2, x^3)$  получаем

$$\hat{\tau} = d\hat{x}^1 \wedge d\hat{x}^2 \wedge d\hat{x}^3 = J(f)\tau,$$

где  $J(f)$  — определитель матрицы  $(df^i/dx^j)$ , называемый якобианом замены. Поэтому

$$\frac{d(i_v \hat{\tau})}{\hat{\tau}} = \frac{d(J(f)i_v \tau)}{J(f)\tau} = \frac{dJ(f) \wedge i_v \tau}{J(f)\tau} + \frac{d(i_v \tau)}{\tau}.$$

В силу произвольности поля  $\vec{v}$  получаем, что дивергенция не меняется лишь при таких заменах, для которых

$$dJ(f) = 0, \quad \text{т. е.} \quad J(f) = \text{const.}$$

Если же под дивергенцией поля с компонентами  $v_x, v_y, v_z$  понимать компоненту внешнего дифференциала 2-формы с компонентами  $v_x, v_y, v_z$  (это форма  $i_v \tau$ , выписанная выше), то такое определение инвариантно полностью, т. е. при этом дивергенция никак от выбора координат не зависит.

Рассмотрим теперь ротор векторного поля  $\vec{v}$ . Для этого введем отображение

$$\sigma: \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^3), \quad \sigma \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Заметим, что

$$(d \circ \sigma)(\vec{v}) = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx.$$

Рассмотрим отображение  $\kappa: \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , «обратное» к внутреннему произведению, т. е. такое, что  $i_{\kappa(\alpha)}\tau = \alpha$  для всех  $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ , где  $\tau$  по-прежнему форма объема в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда

$$\text{rot } \vec{v} = (\kappa \circ d \circ \sigma)(\vec{v}).$$

Проверка полученного соотношения сводится к проверке тождества  $i_{\text{rot } \vec{v}}\tau = d(\sigma(\vec{v}))$ , которая проводится точно так же, как вычисление формы  $i_v\tau$  в случае дивергенции.

Проанализируем эту конструкцию. Нетрудно видеть, что задание  $\sigma$  равносильно определению отображения

$$r: \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad r(\vec{v}, \vec{w}) = (\sigma(\vec{v}))(\vec{w}).$$

Но из формулы для  $\sigma$  вытекает, что  $r$  совпадает с симметрической 2-формой из примера 3, т. е.  $r$  является евклидовой метрикой в  $\mathbb{R}^3$ .

Заметим, что в определении отображения  $\kappa$  существенную роль играет трехмерность пространства  $\mathbb{R}^3$ , так как степень формы  $i_{\kappa(\alpha)}\tau$  на единицу меньше размерности пространства, а форма  $\alpha$  имеет степень два.

Отсюда следует вывод: операция взятия ротора векторного поля может быть определена инвариантно лишь на ориентированном трехмерном многообразии, снабженном евклидовой метрикой (проверьте самостоятельно этот вывод, вычислив те замены координат, при которых компоненты ротора векторного поля действительно преобразуются как компоненты векторного поля).

Этот вывод показывает, что ротор лучше определять не как векторное поле, а инвариантным образом: как внешний дифференциал ко-векторного поля  $v_x dx + v_y dy + v_z dz$ .

## § 5.

Перейдем теперь непосредственно к анализу уравнений Максвелла. Если следовать традиционному взгляду, что составляющие электромагнитного поля — поля  $\vec{E}, \vec{H}$  — это векторные поля, то анализ структуры операторов ротора и дивергенции показывает, что уравнения Максвелла могут быть записаны корректно лишь в трехмерном ориентированном пространстве, снабженном евклидовой метрикой.

Но тот факт, что ротор и дивергенция могут меняться при каких-то заменах координат, не отражает физику уравнений Максвелла, потому что природа этих уравнений никак не связана с наличием, скажем, метрики в пространстве или с выбором системы координат. Поэтому нам хотелось бы иметь какое-то инвариантное описание уравнений

Максвелла. Все вышеперечисленное позволяет предположить, что электромагнитное поле есть дифференциальная форма степени два<sup>1</sup>.

Эта 2-форма  $\Omega$ , называемая *тензором электромагнитного поля*, определена на четырехмерном пространстве  $\mathbb{R}^4$  с координатами  $(x, y, z, t)$ , где  $t$  — время, и имеет вид:

$$\begin{aligned}\Omega = & cE_x dx \wedge dt + cE_y dy \wedge dt + cE_z dz \wedge dt + \\ & + H_x dy \wedge dz + H_y dz \wedge dx + H_z dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Вычислим дифференциал этой формы и приравняем его к нулю.

$$\begin{aligned}d\Omega = & c \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + c \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt + c \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt + \\ & + c \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dt + c \frac{\partial E_z}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dt + c \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt + \\ & + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \\ & + \frac{\partial H_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial H_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial H_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy = 0.\end{aligned}$$

Соберем коэффициенты при  $dx \wedge dy \wedge dz$ :

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

и мы получим второе уравнение Максвелла. Теперь соберем коэффициенты при  $dx \wedge dy \wedge dt$ :

$$c \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = 0.$$

Это есть  $z$ -компонента первого уравнения Максвелла. Собирая коэффициенты при  $dy \wedge dz \wedge dt$  и  $dz \wedge dx \wedge dt$ , мы получим  $x$ - и  $y$ -компоненты этого уравнения соответственно.

Итак, первые два уравнения Максвелла мы можем записать очень просто:

$$d\Omega = 0.$$

В чем преимущество этой записи? Мы записали уравнения в инвариантной форме: ни дифференциальные формы, ни внешнее дифференцирование не зависят ни от координат, ни от ориентации, ни от метрики.

---

<sup>1</sup>Здесь уместно еще раз отметить, что традиционная форма записи уравнений Максвелла появилась до создания теории дифференциальных форм.

Вспомним теперь, что  $d^2 = 0$ . Отсюда следует, что  $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$ . Но в пространстве  $\mathbb{R}^4$  имеет место лемма Пуанкаре:  $\text{Im } d = \text{Ker } d$ . Из этой леммы следует, что всякая замкнутая форма (дифференциал от которой равен 0) является точной (т. е. является дифференциалом некоторой формы). В частности,  $\Omega = d\omega$ , где  $\omega$  есть 1-форма на пространстве  $\mathbb{R}^4$ :

$$\omega = A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_t dt.$$

Эта форма называется *4-потенциалом электромагнитного поля*. Введем, как это обычно делается в физике, координаты  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $x^4 = ct$ . Тогда мы можем записать наши формы в виде

$$\Omega = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \omega = A_\mu dx^\mu$$

(знак суммирования по повторяющимся верхнему и нижнему индексам опущен). Тот факт, что  $\Omega = d\omega$ , можно записать совсем просто:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu < \nu.$$

Именно так выглядят уравнения Максвелла во всех современных учебниках физики.

Заметим, что форма  $\omega$  определяется по форме  $\Omega$  неоднозначно: мы можем всегда прибавить к этой форме точную 1-форму, т. е. дифференциал функции:  $\omega' = \omega + dS$ . И вновь мы получим, что  $d\omega' = \Omega$ , так как квадрат дифференциала равен нулю. Это означает, что 4-потенциал определяется, как говорят, *с точностью до калибровочных преобразований*:  $A'_\mu = A_\mu + \partial S / \partial x_\mu$ . А поскольку в уравнения Максвелла входят только элементы  $F_{\mu\nu}$ , то, стало быть, выбор 4-потенциала не влияет на уравнения Максвелла.

Так обстоят дела в классической электродинамике. Но уже в квантовом случае движение частицы зависит не только от тензора электромагнитного поля, но и от 4-потенциала, и там калибровки имеют более важное значение.

## Лекция 2

На предыдущей лекции мы записали фарадееву часть уравнений Максвелла (т. е. первые два уравнения) в виде

$$d\Omega = 0,$$

где  $\Omega = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ ,  $\mu < \nu$  (знак суммирования по повторяющимся индексам здесь и ниже, как правило, опускается), — тензор электромагнитного поля.

Затем, используя тот факт, что для пространства  $\mathbb{R}^4$  имеет место лемма Пуанкаре (каждая замкнутая форма на этом пространстве является точной), мы переписали полученное уравнение в виде

$$\Omega = d\omega, \quad \omega = A_\mu dx^\mu,$$

или

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu < \nu.$$

Форма  $\omega$  называется 4-потенциалом электромагнитного поля и определяется с точностью до калибровочных преобразований  $A'_\mu = A_\mu + \partial S/\partial x_\mu$ .

Так обстоит дело, если пространство, на котором разворачиваются события, —  $\mathbb{R}^4$ . Но не всегда ареной физических событий бывает  $\mathbb{R}^4$ . Например, уравнение магнитного монополя Дирака описывает ситуацию, когда в одной точке пространства расположен магнитный заряд. Тогда все уравнения пишутся в пространстве  $(\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}) \times \mathbb{R}$ . В качестве такого пространства может также выступать произведение трехмерного тора на  $\mathbb{R}$  и т. д.

В этих случаях лемма Пуанкаре уже не всегда имеет место, т. е. глобальный 4-потенциал может не существовать. Однако, поскольку локально каждое многообразие устроено как евклидово пространство, в каждой карте свой 4-потенциал может быть построен. Но как связать вместе все эти локальные 4-потенциалы, как записать в инвариантной форме уравнения электромагнитного поля, заданного на всем пространстве и не зависящего от выбора карт (т. е. локальных систем координат)? Для этого и существует язык расслоений и связностей, к знакомству с которым мы теперь и приступаем.

## § 6.

Мы начнем с простого примера расслоения, который вам очень хорошо знаком.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ее можно представить в виде графика в пространстве  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$ . Это множество точек  $s = (x, f(x))$ , где  $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Имеется естественная проекция  $\pi$  пространства  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$ , состоящего из точек  $(x, y)$ , на  $\mathbb{R}^4$ :  $(x, y) \mapsto x$  (рис. 1). Наша функция есть не что иное, как отображение  $s$  из базы — пространства  $\mathbb{R}^4$  — в пространство  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$ ; при этом  $\pi \circ s = \text{id}$ . Всякое отображение  $s$ , обладающее таким свойством, называется *сечением*. А сама конструкция, которую мы построили, называется (*тривиальным*) *расслоением* или *прямым произведением*.

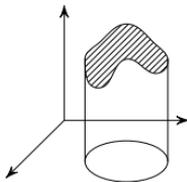


Рис. 1.

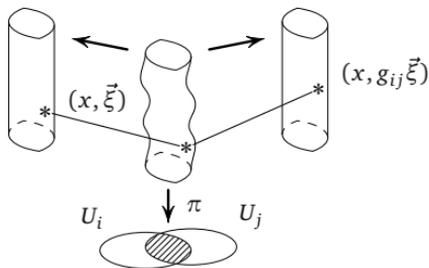


Рис. 2.

Теперь мы обобщим приведенную в примере конструкцию. Рассмотрим покрытие  $\mathbb{R}^4$  открытыми множествами  $U_i$ . Пусть для каждого непустого пересечения  $U_i \cap U_j$  задана некоторая функция со значениями в группе невырожденных матриц размера  $2 \times 2$ :

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(2; \mathbb{R}).$$

Если набор функций  $\{g_{ij}\}$  обладает свойствами

- 1)  $g_{ji}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$ ,
- 2)  $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = I$  (если  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ ),

то этот набор называют *склеивающим коциклом* (здесь  $(g_{ij}(x))^{-1}$  — это матрица, обратная к  $g_{ij}(x)$ ;  $I$  — единичная матрица). При помощи склеивающего коцикла можно построить новый объект, который локально похож на сконструированное в предыдущем примере прямое произведение. «Кирпичиками» в нашей конструкции будут пространства  $U_i \times \mathbb{R}^2$ , которые мы будем склеивать по множествам  $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^2$ .

Есть очень простой способ склейки: точка  $(x, \vec{\xi})$  из  $U_i \times \mathbb{R}^2$  склеивается (отождествляется) с точкой  $(x, \vec{\xi})$  из  $U_j \times \mathbb{R}^2$ . Тогда интуитивно ясно, что мы получим в точности прямое произведение. Давайте поступим иначе — склеим цилиндры «с подкруткой»: точку  $(x, \vec{\xi})$  отождествим с точкой  $(x, g_{ij}\vec{\xi})$  (рис. 2). Ограничения, наложенные на функции  $g_{ij}$ , обеспечивают корректность такой склейки. Свойство 1) означает, что если точка  $(x, \vec{\xi})$  склеивается с некоторой точкой  $(x, \vec{\eta})$ , то точка  $(x, \vec{\eta})$  склеивается с точкой  $(x, \vec{\xi})$ . Если у нас имеется пересечение трех цилиндров, то мы склеиваем точку из первого цилиндра с точкой из второго цилиндра, ту, в свою очередь, — с точкой из третьего цилиндра, а ее — с точкой из первого цилиндра. Свойство 2) гарантирует нам, что после таких склеек точка первого цилиндра перейдет в себя.

После склейки мы получим некоторое пространство  $P$ , сконструированное из этих цилиндриков, у которого будет естественная проек-

ция  $\pi$  на базу  $\mathbb{R}^4$ . Причем эта проекция корректно определена для всех цилиндров, и склейка ее не портит.

Полученный объект называют *векторным расслоением с базой  $\mathbb{R}^4$ , пространством расслоения  $P$ , слоем  $\mathbb{R}^2$  и структурной группой  $GL(2; \mathbb{R})$* .

Возьмем теперь другой склеивающий коцикл и построим соответствующее ему векторное расслоение  $P'$  с отображением проектирования  $\pi'$ . Если существует взаимно-однозначное гладкое в обе стороны линейное на каждом слое отображение  $F$  из  $P$  в  $P'$ , такое что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{F} & P' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & \mathbb{R}^4 & \end{array}$$

коммутативна (т. е.  $\pi' \circ F = \pi$ ), то говорят, что расслоения  $P$  и  $P'$  *эквивалентны*. Расслоения, эквивалентные прямому произведению, называют *тривиальными*. Можно доказать, что если в качестве базы выступает пространство  $\mathbb{R}^4$ , то все расслоения будут тривиальными. Но ясно, что в приведенной конструкции конкретный вид базы (в качестве которой мы выбрали для простоты пространство  $\mathbb{R}^4$ ) и размерность слоя (пространства  $\mathbb{R}^2$  в нашем случае) ни при чем. В качестве базы может выступать любое многообразие, а в качестве слоя — евклидово пространство любой размерности.

Приведем пример нетривиального расслоения с базой  $S^1$  (окружность).

**Пример 2.** Рассмотрим два экземпляра цилиндра  $S^1 \times \mathbb{R}$  и выбросим из первого цилиндра прямую  $\{x\} \times \mathbb{R}$ , а из второго — прямую  $\{y\} \times \mathbb{R}$ , где  $x$  и  $y$  — различные точки окружности  $S^1$ . Получим два кирпичика  $U_1 \times \mathbb{R}$  и  $U_2 \times \mathbb{R}$ , где  $U_1 = S^1 \setminus \{x\}$ , а  $U_2 = S^1 \setminus \{y\}$ . Пересечение  $U_1 \cap U_2$  состоит из двух компонент  $V_1$  и  $V_2$ . Если  $z \in V_1$ , то склеим точки  $(z, t)$  и  $(z, t)$ . Если же  $z \in V_2$ , то склеим наши кирпичики следующим образом: точка  $(z, t)$  первого кирпичика склеится с точкой  $(z, -t)$  второго, т. е. в нашем случае склеивающий коцикл состоит из одного элемента  $g_{12}$ , тождественно равного единице на  $V_1$  и равного  $-1$ , если  $z \in V_2$ . Структурная группа является группой  $GL(1; \mathbb{R})$ , т. е. группой ненулевых действительных чисел с операцией умножения.

Пространство этого расслоения — поверхность, похожая на лист Мёбиуса, только бесконечная. Она не гомеоморфна цилиндру  $S^1 \times \mathbb{R}$ , поскольку цилиндр — ориентируемое многообразие, а полученное нами пространство расслоения — нет. Значит, это расслоение нетривиально.

Сечение произвольного расслоения определяется точно так же, как и в разобранным случае прямого произведения: это такое отображение  $s$  из базы в пространство расслоения, что  $\pi \circ s = id$ . Сечения расслоения образуют модуль над кольцом гладких функций базы: их можно складывать (покоординатно и поточечно) и умножать на функции.

## § 7.

У прямого произведения есть следующее замечательное свойство: сечение прямого произведения можно дифференцировать вдоль любого векторного поля  $\vec{v}$  базы. А именно, возьмем сечение  $(x, f(x))$  и поставим ему в соответствие новое сечение  $(x, \partial_v f)$ , где  $\partial_v f = df(\vec{v})$ . Выражение  $df$  есть векторнозначная 1-форма вида  $(df^1, \dots, df^4)$ ; ее значение на векторном поле  $\vec{v}$  — гладкая вектор-функция  $((df^1(\vec{v}), \dots, df^4(\vec{v}))$ . А ее график (т. е. сечение  $(x, df(\vec{v}))$ ) и будет искомой производной  $(x, \partial_v f)$  исходного сечения вдоль  $\vec{v}$ .

Можно ли похожим образом научиться дифференцировать сечения произвольного расслоения? На сечение расслоения можно смотреть как на согласованную совокупность  $(x, f_i)$  сечений кирпичиков  $U_i \times \mathbb{R}^2$ . Условие согласованности состоит в том, что эти локальные сечения склеиваются в глобальное, т. е. для любой точки  $x \in U_i \cap U_j$  имеет место тождество  $f_i(x) = g_{ij}(x)f_j(x)$ .

Давайте продифференцируем каждое такое элементарное сечение обычным образом вдоль векторного поля. Нужно только проверить, что полученные локальные сечения вновь корректно склеиваются:

$$\partial_v f_i = \partial_v (g_{ij} f_j) = (\partial_v g_{ij}) f_j + g_{ij} \partial_v f_j.$$

Если бы члена  $(\partial_v g_{ij}) f_j$  не было, сечения бы склеивались и при склеивании давали глобально определенное, без разрывов, сечение. Но если функции  $g_{ij}$  зависят от  $x$ , то это определение ни к чему хорошему не приводит. Заметим, что *невязка* этой формулы — член, линейный по  $f_j$ . Давайте чуть-чуть подправим определение производной вдоль векторного поля, добавив такую линейную по  $f$  часть, чтобы новые сечения склеились. А именно, определим новую производную, которая будет называться *ковариантной производной вдоль векторного поля  $\vec{v}$* :

$$\nabla_v f_i = \partial_v f_i + A_v^i f_i,$$

где  $A_v^i$  — матрица размера  $2 \times 2$  (здесь суммирование по индексу  $i$  не производится). Мы постараемся подобрать матрицы  $A_v^i$  (свою для каждого кирпичика) так, чтобы в итоге после применения ковариантной производной все локальные сечения склеились в одно.

Распишем определение  $\nabla_v$ :

$$\begin{aligned}\nabla_v f_i &= \partial_v f_i + A_v^i f_i = \partial_v (g_{ij} f_j) + A_v^i (g_{ij} f_j) = (\partial_v g_{ij}) f_j + g_{ij} \partial_v f_j + A_v^i g_{ij} f_j = \\ &= g_{ij} (g_{ij}^{-1} (\partial_v g_{ij})) f_j + \partial_v f_j + g_{ij}^{-1} A_v^i g_{ij} f_j = g_{ij} \nabla_v f_j.\end{aligned}$$

Последнее равенство необходимо для того, чтобы локальные сечения склеились. Выражение  $\nabla_v f_j$  должно содержать член  $\partial_v f_j$ , следовательно, сумма остальных членов должна равняться  $A_v^j f_j$ :

$$A_v^j = g_{ij}^{-1} \partial_v g_{ij} + g_{ij}^{-1} A_v^i g_{ij}.$$

Отсюда

$$A_v^i = -\partial_v g_{ij} g_{ij}^{-1} + g_{ij} A_v^j g_{ij}^{-1}.$$

Итак, если удастся найти матричные функции  $A_v^i$ , удовлетворяющие полученному условию, то можно ввести операцию дифференцирования сечений вдоль векторного поля  $\vec{v}$ .

Но как быть, если надо продифференцировать сечения вдоль другого векторного поля? Искать каждый раз подходящие матричные функции было бы довольно затруднительно. Кроме того, естественно было бы ожидать, что  $\nabla_{v_1} f + \nabla_{v_2} f = \nabla_{v_1+v_2} f$ , как в случае обычных функций. Поэтому давайте потребуем, чтобы на каждой окрестности  $U_i$  была задана матричная дифференциальная форма (т. е. матрица размера  $2 \times 2$ , все элементы которой являются 1-формами)  $\omega_i$  так, что

$$\omega_i = -d g_{ij} g_{ij}^{-1} + g_{ij} \omega_j g_{ij}^{-1} \quad (*)$$

для любых пересекающихся  $U_i$  и  $U_j$ .

Тогда оказывается, что мы можем дифференцировать любое сечение вдоль любого векторного поля. Для этого нужно лишь положить

$$A_v^i = \omega_i(\vec{v}).$$

**Определение 2.** Говорят, что в векторном расслоении задана *связность*, если для любого набора окрестностей и склеивающих коциклов, по которым можно построить это расслоение, задан набор дифференциальных матричных 1-форм  $\{\omega_i\}$ , удовлетворяющих свойству (\*). Связность обозначается обычно значком  $\nabla$ . Форма  $\omega_i$  называется локальной формой связности.

Связность соотносится с ковариантной производной примерно так же, как дифференциал функции с частной производной. Если  $s$  — сечение расслоения, имеющее в цилиндре  $U_i \times \mathbb{R}^2$  вид  $(x, f_i(x))$ , то

$$\nabla s = (x, df_i + \omega_i f_i). \quad (**)$$

Другими словами, если мы применим к сечению не ковариантное дифференцирование, а оператор связности, то мы получим сечение с коэффициентами в 1-формах. Проиллюстрируем это диаграммой:

$$\nabla : \{\text{сечение}\} \rightarrow \{\text{сечение}\} \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^4).$$

Итак, связность в векторном расслоении — это просто возможность дифференцировать сечения. Связность является линейным отображением (т. е.  $\nabla(s_1 + s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2$ ) и удовлетворяет правилу Лейбница: для любого  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$  и для любого сечения  $s$  имеем  $\nabla(fs) = (df)s + f\nabla s$ .

Это инвариантное определение связности: говорят, что на расслоении задана связность, если любому сечению ставится в соответствие  $\{\text{сечение}\} \otimes \{\text{дифференциальная форма}\}$ , и это отображение линейно и удовлетворяет правилу Лейбница. Легко показать что такое определение связности эквивалентно данному выше «координатному».

Рассмотрим снова цилиндр  $U_i \times \mathbb{R}^2$ . В нем есть стандартный базис сечений  $\xi_1 = (x, e_1)$ ,  $\xi_2 = (x, e_2)$  (где  $e_1$  и  $e_2$  образуют стандартный базис в  $\mathbb{R}^2$ ). Любое сечение  $s = (x, f_i(x))$  над  $U_i$  может быть записано в виде  $s = f_i^1 \xi_1 + f_i^2 \xi_2 = (\xi_1, \xi_2) f_i$  (где последнее выражение понимается как произведение строки на столбец). Для построенных сечений имеем

$$\nabla \xi_j = (x, \nabla e_j) = (x, \omega_i e_j) = (x, \omega_i^j),$$

где через  $\omega_i^j$  обозначен  $j$ -й столбец матричной дифференциальной формы  $\omega_i$ .

Следовательно,  $(\nabla \xi_1, \nabla \xi_2) = (\xi_1, \xi_2) \omega_i$  (вектор-строка умножается на матрицу), поэтому на матрицу  $\omega_i$  можно смотреть как на матрицу связности в базисе  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Теперь делается более понятным смысл выражения (\*\*). Его можно переписать в виде

$$\nabla f_i = df_i + \omega_i f_i.$$

Это действие связности на координатах сечения  $s$  (по отношению к базисным сечениям  $\xi_1, \xi_2$ ).

Во всяком ли векторном расслоении можно ввести связность? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, которое мы оставляем читателю в качестве упражнения.

*В любом гладком векторном расслоении можно ввести связность.*

(Указание: Рассмотрите гладкое разбиение единицы  $\{\lambda_i\}$ , подчиненное покрытию  $\{U_i\}$ ; так как над каждым  $U_i$  расслоение имеет вид прямого произведения, в ограничении расслоения на  $U_i$  можно ввести некоторую связность  $\nabla_i$ ; покажите, что линейная комбинация  $\sum \lambda_i \nabla_i$  является корректно определенной связностью в исходном расслоении.)

Сечение  $s$  называется *горизонтальным* (по отношению к связности  $\nabla$ ), если  $\nabla s = 0$ .

Из (\*\*\*) следует, что в базисе  $\xi_1, \xi_2$  локальных сечений расслоения над  $U_i$  координаты горизонтальных сечений удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$df_i = -\omega_i f_i.$$

Если расслоение тривиально, то в базисе  $\xi_1, \xi_2$  глобальных сечений расслоения координаты горизонтальных сечений удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$df = -\omega f.$$

В другом базисе сечений (при другой тривиализации расслоения)  $\xi'_1, \xi'_2$  согласно (\*) уравнение горизонтальных сечений принимает вид

$$df' = -\omega' f', \quad \text{где} \quad f' = \Gamma y, \quad \omega' = -d\Gamma\Gamma^{-1} + \Gamma\omega\Gamma^{-1}$$

(и где в свою очередь  $(\xi_1, \xi_2) = (\xi'_1, \xi'_2)\Gamma$ ). Заметим, что такие преобразования называются *калибровочными преобразованиями* формы связности.

Итак, *связность в тривиальном расслоении задает систему дифференциальных уравнений с точностью до калибровочных преобразований*.

Если же расслоение нетривиально, то связность задает согласованное (в смысле соотношений (\*)) семейство систем дифференциальных уравнений.

## § 8.

Попробуем продолжить диаграмму дифференцирования сечений:

$$\{\text{сечение}\} \xrightarrow{\nabla} \{\text{сечение}\} \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \{\text{сечение}\} \otimes \Lambda^2(\mathbb{R}^n),$$

где отображение  $\tilde{\nabla}$  каждому сечению с коэффициентами в 1-формах ставит в соответствие сечение с коэффициентами в 2-формах. Мы также потребуем, чтобы для него выполнялось правило Лейбница:

$$\tilde{\nabla}(f\alpha) = df \wedge \alpha + f \tilde{\nabla}\alpha, \quad \tilde{\nabla}(\beta s) = (d\beta)s - \beta \wedge \nabla s$$

для произвольной функции  $f$ , сечения  $s$  и 1-формы  $\beta$ . Определим сквозное отображение  $K = \tilde{\nabla} \circ \nabla$ .

**Лемма.** *Отображение  $K$  является  $\mathcal{F}$ -линейным.*

**Доказательство.** Пусть  $f$  — функция,  $s$  — сечение. Тогда

$$\begin{aligned} K(fs) &= \tilde{\nabla}(\nabla(fs)) = \tilde{\nabla}((df)s + f \nabla s) = \\ &= (d^2 f)s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + fK(s) = fK(s), \end{aligned}$$

поскольку  $d^2 f = 0$ , а второй и третий члены сокращаются.  $\square$

Отображение  $K$  называется *тензором кривизны связности*. Локально над  $U_i$  в базисе  $\xi_1, \xi_2$  тензор кривизны можно записать в виде

$$K(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2)\Omega_i,$$

где  $\Omega_i$  — матрица дифференциальных 2-форм.

Вычислим эту матрицу в нашем базисе через  $\omega_i$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(\nabla(\xi_1, \xi_2)) &= \tilde{\nabla}((\xi_1, \xi_2)\omega_i) = (\nabla\xi_1, \nabla\xi_2) \wedge \omega_i + (\xi_1, \xi_2) d\omega_i = \\ &= (\xi_1, \xi_2)(\omega_i \wedge \omega_i) + (\xi_1, \xi_2) d\omega_i = (\xi_1, \xi_2)(\omega_i \wedge \omega_i + d\omega_i). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при базисных векторах слева и справа, мы получаем уравнение  $\Omega_i = d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_i$ . (Внешнее произведение  $\omega_i \wedge \omega_i$  не обязано равняться нулю, поскольку  $\omega_i$  — матричная форма.) Полученное уравнение называется *структурным уравнением*. Дифференцируя это уравнение, мы получим  $d\Omega_i = \Omega_i \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \Omega_i$ . Это равенство носит название *тождество Бьянки*. Введя новый оператор  $D\Omega_i = d\Omega_i - \Omega_i \wedge \omega_i + \omega_i \wedge \Omega_i$  (его называют *ковариантной производной формы*), данное выражение можно переписать в виде

$$D\Omega_i = 0.$$

## § 9.

По аналогии с конструкцией векторного расслоения рассмотрим теперь *главное расслоение*. Для этого вместо  $\mathbb{R}^2$  в наших кирпичиках возьмем  $GL(2; \mathbb{R})$ , т. е. в качестве элементарных цилиндров будем рассматривать цилиндры  $U_i \times GL(2; \mathbb{R})$ . Склеивать мы их будем точно так же, с помощью коцикла  $\{g_{ij}\}$ :

$$(x, G) \sim (x, g_{ij}G), \quad \text{если } x \in U_i \cap U_j.$$

Только умножать матрицу  $g_{ij}$  нам придется уже не на вектор, а на другую матрицу  $G$ . Расслоение, у которого структурная группа и слой — это одно и то же пространство, называют *главным расслоением*.

В главном расслоении также можно ввести связность, формально воспользовавшись данным ранее определением (как совокупность со-

гласованных с помощью соотношения (\*) матричных дифференциальных форм). Но ее уже нельзя будет рассматривать как дифференцирование вектор-сечений. Геометрическая интерпретация связности в главном расслоении состоит в том, что связность выделяет в касательном пространстве к каждой точке пространства расслоения подпространство так называемых горизонтальных векторов, гладко зависящее от точки.

Объем данной брошюры не позволяет нам познакомиться подробнее с этой интерпретацией. Отметим лишь еще раз, что аналогично случаю векторного расслоения в главном расслоении можно ввести кривизну связности и выписать структурное уравнение и тождество Бьянки.

## § 10.

Вернемся вновь к уравнениям Максвелла. Оказывается, на электромагнитное поле можно смотреть как на связность в главном расслоении над  $\mathbb{R}^4$  со структурной группой и слоем  $U(1) \subset GL(1; \mathbb{C})$  ( $U(1)$  — это группа комплексных чисел, равных по модулю 1, т. е. геометрически это окружность  $S^1$ ).

В этом расслоении функции склейки  $g_{ij}$  принимают значение в группе  $U(1)$ , а формы связности и кривизны становятся скалярными, а не матричными. Поэтому для локальных форм связности и кривизны связности получаем:  $\omega_i \wedge \omega_i = 0$  и  $\Omega_i \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \Omega_i = 0$ . Структурное уравнение принимает при этом вид  $\Omega_i = d\omega_i$ , а тождество Бьянки —  $d\Omega_i = 0$ .

Поэтому локальную форму связности  $\omega_i = A_\mu^i dx^\mu$  мы будем интерпретировать как локальный 4-потенциал в данной калибровке, т. е. в данной локальной тривиализации расслоения над  $U_i$ , локальную форму кривизны  $\Omega_i$  — как тензор электромагнитного поля в данной калибровке, а тождество Бьянки превратится в фарадееву часть уравнений Максвелла.

При переходе от одной локальной формы связности к другой (т. е. при замене калибровки) получим согласно соотношению (\*) (и согласно тому, что функции склейки — скалярные):

$$\omega_i = -dg_{ij}g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega_jg_{ij}^{-1} = \omega_j + dS_{ij},$$

где  $S_{ij} = d \log(-g_{ij})$ , или в терминах компонент формы  $\omega_i$ :

$$A_\mu^i = A_\mu^j + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \mu}.$$

Согласно этой формуле, компоненты локальной формы связности преобразуются точно так же, как компоненты 4-потенциала электромагнитного поля при калибровочных преобразованиях, что еще раз подтверждает правильность нашей интерпретации.

Итак, в случае главного расслоения все наши формулы могут быть описаны на двух языках: геометрическом и физическом. Составим соответствующий словарь:

Выбор локального цилиндра (локальная тривиализация)	$U_i \times G$ $(U_i \times S^1)$	Калибровка
Локальная форма связности	$\omega_i = A_\mu^i dx^\mu$	4-потенциал электромагнитного поля в данной калибровке
Связность	$\nabla$	Электромагнитное поле
Локальная форма кривизны связности	$\Omega_i$	Тензор электромагнитного поля в данной калибровке
Тензор кривизны связности	$K$	Тензор электромагнитного поля
Тождество Бьянки	$D\Omega_i = 0$	Фарадеева часть уравнений Максвелла
Пространство расслоения	$P(\mathbb{R}^4 \times S^1)$	Фазовое пространство физической системы
База расслоения	$B(\mathbb{R}^4)$	Пространство-время
Структурная группа расслоения	$G(U(1))$	Группа «вращений» в зарядовом пространстве.

Последняя строчка словарика требует пояснения. Дело в том, что структурная группа  $U(1)$  появляется в описании электромагнитного поля в связи с тем, что физическая ситуация не должна зависеть от выбора фазы (выбора направления в зарядовом пространстве), что соответствует инвариантности относительно калибровочных преобразований вида  $g_{ij} = \exp(is(x))$  со значениями в  $U(1)$ .

## § 11.

Случай электромагнитного поля — в каком-то смысле простейший из возможных, так как структурная группа расслоения в этом случае очень проста. Однако этим примером не исчерпывается описание физических полей в терминах расслоений и связностей.

Другой известный пример — это знаменитые поля Янга—Миллса, служащие для описания поведения нуклонов (протонов и нейтронов). Эти поля интерпретируются как связности в главном расслоении со структурной группой  $G = SU(2)$  (так обозначается группа всех невы-

рожденных комплексных матриц размера  $2 \times 2$ , определитель которых равен 1). В этом случае все формы связности и кривизны являются матричными, и те упрощения, которые были возможны в случае электромагнитного поля, здесь не проходят. Однако выписанный нами словарь «работает» и для этих полей.

Исследуя подобного рода модели, физики научились вычислять такие величины, как масса протона и масса нейтрона, просто решая с помощью компьютера соответствующие уравнения. Но это тема совсем другой лекции.

## Дифференциальные формы, расслоения, связности

Приведенные ниже записки занятий данного курса следует рассматривать как практическое руководство для работы с основными понятиями дифференциальной геометрии — дифференциальными формами, расслоениями, метриками, связностями и т. п. Мы пытались разработать язык, который не требует использования сложных формул с многоэтажными индексами, столь обычных для данного предмета. В результате значительно упрощаются и становятся более понятными все вычисления.

### Дифференциальные формы

Инвариантное определение *дифференциальной  $k$ -формы* в области  $U \subset \mathbb{R}^n$  (или на многообразии) состоит в том, что это произвольная полилинейная (по отношению к умножению на функции) кососимметричная функция от набора  $k$  векторных полей. Для практических нужд вполне достаточно координатного определения, согласно которому пространство  $\Omega^k U$  дифференциальных  $k$ -форм образовано выражениями вида

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (1)$$

где  $a_{i_1, \dots, i_k}$  — гладкие функции. Таким образом,  $k$ -форма задается набором из  $C_n^k$  функций — своих коэффициентов. Выражение  $dx_i$  можно воспринимать как единый символ (его истинный смысл будет обсуждаться ниже). Знак *внешнего умножения* « $\wedge$ » говорит о том, что это умножение *косокоммутативно*,  $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ . Можно сказать, что алгебра  $\Omega^* U = \bigoplus \Omega^k U$  дифференциальных форм — свободная косокоммутативная алгебра над кольцом функций от переменных  $x_1, \dots, x_n$  с образующими  $dx_1, \dots, dx_n$ . Операция внешнего умножения  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$  билинейна по отношению к умножению на функции и градуированно антикоммутативна:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \in \Omega^{k+l} U, \quad \alpha \in \Omega^k U, \quad \beta \in \Omega^l U.$$

Помимо внешнего умножения, имеется операция  $d$  внешнего дифференцирования, повышающая степень формы на 1,

$$\Omega^0 U \xrightarrow{d} \Omega^1 U \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n U.$$

Если  $f$  — 0-форма, то есть функция, то  $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  — полный дифференциал этой функции. В общем случае дифференциал  $d\omega$  формы (1) имеет вид

$$d\left(\sum a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) = \sum da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (2)$$

Операция внешнего дифференцирования удовлетворяет следующим свойствам, которые можно использовать в качестве ее аксиоматического определения:

- 1) эта операция  $\mathbb{R}$ -линейна;
- 2) для 0-формы  $f$  (т. е. функции)  $df$  — полный ее дифференциал;
- 3) правило Лейбница:  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ , где  $\alpha \in \Omega^k U$ ;
- 4)  $d \circ d = 0$ .

Ясно, что единственность такой операции, и, в частности, формула (2) вытекают из этих свойств. Проверка существования несколько труднее: нужно убедиться, что дифференциальная форма (2) не зависит от выбора координат. Иной способ доказательства корректности определения дифференциала состоит в том, чтобы воспользоваться его инвариантным определением, формулируемым на языке функций от векторных полей, которое мы здесь не приводим.

**Пример.** В пространстве  $\mathbb{R}^3$  1-формы  $A dx + B dy + C dz$  и 2-формы  $P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$  задаются, как и векторные поля, наборами из трех функций, а 3-формы  $g dx \wedge dy \wedge dz$  — одной функцией. Это влечет за собой несправедливое отождествление разных понятий и происходящую от этого путаницу. Соответствующие этим отождествлениям операции называются в классическом анализе *градиентом*, *ротором* и *дивергенцией* соответственно,

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 U & \xrightarrow{d} & \Omega^1 U & \xrightarrow{d} & \Omega^2 U & \xrightarrow{d} & \Omega^3 U \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathcal{F}U & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{F}^3 U & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathcal{F}^3 U & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{F}U. \end{array}$$

Здесь  $\mathcal{F}U$  — пространство функций,  $\mathcal{F}^3 U$  — пространство «векторных полей», то есть наборов из трех функций.

**Задача.** Напишите координатные выражения для градиента, ротора и дивергенции на языке функций и векторных полей.

Представление (1) зависит от выбора локальных координат в области  $U$ . При переходе к координатам  $y_1, \dots, y_n$  коэффициенты формы меняются следующим образом: нужно в выражении (1) рассматривать  $dx_i$  не как независимые символы, а как полные дифференциалы координатных функций  $x_i$  старой системы координат,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial y_n} dy_n.$$

После этого нужно подставить полученные выражения в (1) и упростить выражение, воспользовавшись полилинейностью и кососимметричностью. Приведенное правило гораздо более естественно и легче запоминается, чем приводимое в учебниках по дифференциальной геометрии правило преобразования ковариантных тензоров, каковыми являются дифференциальные формы.

Приведенное правило замены координат имеет следующее обобщение. Пусть задано отображение  $f: V \rightarrow U$  областей евклидовых пространств (или многообразий), возможно, различных размерностей. Тогда аналогичным образом определяется операция индуцирования

$$f^*: \Omega^k U \rightarrow \Omega^k V,$$

действующая «в обратном направлении». Обобщением инвариантности операций внешнего умножения и дифференциала являются равенства

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta, \quad f^*d\alpha = d f^*\alpha.$$

Несмотря на всю важность приведенных выше свойств дифференциальных  $k$ -форм, стоит признать, что основное их назначение — *интегрирование* по  $k$ -мерным поверхностям. Вот формальное определение. Пусть  $M$  — гладкая *ориентированная*  $k$ -мерная поверхность, лежащая в области (или многообразии)  $U$ . Введем на ней локальные координаты  $y_1, \dots, y_k$ , согласованные с выбранной ориентацией. Иными словами, параметризуем поверхность точками некоторой области  $D$  координатного пространства  $\mathbb{R}^k$ . Тогда ограничение на  $M$  данной  $k$ -формы  $u$  принимает вид  $u|_M = g(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$  и интегрирование формы сводится к обычному кратному интегралу

$$\int_M u = \int_D g(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k = \int_D g(y) dy_1 \dots dy_k.$$

Если на поверхности  $M$  нельзя ввести единую систему координат, то можно разбить ее на области, и положить интеграл по всей поверхности равным сумме интегралов по отдельным областям.

Основной теоремой теории интегрирования является формула Стокса. Пусть  $M$  —  $k$ -мерная ориентированная поверхность (многообразие) с краем  $\partial M$ . Ориентация поверхности  $M$  индуцирует естественную ориентацию на краю<sup>1</sup>. Тогда для всякой  $(k - 1)$ -формы  $\omega$  имеет место формула Стокса:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Различными вариантами этой формулы являются формулы Ньютона—Лейбница, Грина, Гаусса—Остроградского, Стокса, изучающиеся в классическом анализе.

## Связность в $S^1$ -расслоении

В лекциях А. А. Болибруха (см. наст. изд., с. 3—24) неоднократно подчеркивалось, что связность в векторном расслоении — это возможность ковариантного дифференцирования его сечений. Мы здесь изложим иной, геометрический подход к понятию связности. Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда слоем расслоения является окружность.

**Определение.**  $S^1$ -расслоением называется гладкое отображение  $W \xrightarrow{\pi} M$ , такое, что для каждой достаточно малой окрестности  $U \subset M$  всякой точки задан изоморфизм  $\pi^{-1}(U) \cong U \times S^1$ , переводящий слой проекции  $\pi$  в слой проекции  $U \times S^1 \rightarrow U$  на первый сомножитель. Такой изоморфизм называется *тривиализацией* расслоения над областью  $U$ . Если задана другая тривиализация (например, над пересечением окрестностей), то переход к ней  $U \times S^1 \rightarrow U \times S^1$  задается *функцией перехода*  $\psi$  на  $U$ , принимающей значения в группе диффеоморфизмов окружности. Потребуем для  $S^1$ -расслоений, чтобы все эти диффеоморфизмы являлись поворотами окружности, то есть чтобы все функции перехода принимали значения в группе  $S^1$  поворотов окружности.

*Сечением* расслоения называется отображение, сопоставляющее точке базы точку в слое над ней, то есть такое отображение  $s: M \rightarrow W$ , что  $\pi \circ s = \text{id}$ .

На каждом слое  $W_x = \pi^{-1}(x) \cong S^1$  расслоения определен угловой параметр  $\varphi \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  с точностью до прибавления константы (то есть выбора начала отсчета). Выбор тривиализации равносителен выбору ло-

---

<sup>1</sup>Граница ориентируется по правилу: **внешнюю нормаль — в начало**. Если  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  — положительный касательный репер поверхности  $M$  в точке своего края, причем  $\xi_2, \dots, \xi_k$  касаются края, а вектор  $\xi_1$  трансверсален краю и направлен наружу, то  $\xi_2, \dots, \xi_k$  — положительный касательный репер края  $\partial M$ .

кального сечения, то есть начала отсчета на каждом слое над заданной областью  $U$  базы.

Хотя все слои  $W_x \cong S^1$  изоморфны между собой, этот изоморфизм неоднозначен. Связность позволяет частично сократить эту неоднозначность.

**Определение.** Связностью в  $S^1$ -расслоении называется поле касательных гиперплоскостей в пространстве расслоения, трансверсальное слоям и инвариантное относительно действия группы поворотов  $S^1$ .

Для всякого гладкого пути  $\gamma$  на базе  $M$ , ведущего из точки  $x_0$  в  $x_1$  и всякой начальной точки  $w_0 \in W_{x_0}$  существует единственное поднятие  $\hat{\gamma}$  в пространство расслоения, такое, что  $\pi(\hat{\gamma}) = \gamma$ ,  $\hat{\gamma}(0) = w_0$  и такое, что путь  $\hat{\gamma}$  касается плоскостей связности в каждой точке (рис. 3). Сопоставляя точке  $w_0$  конечную точку  $w_1$  над  $x_1$  пути  $\hat{\gamma}$ , мы получаем отображение слоев  $\Pi_\gamma: W_{x_0} \rightarrow W_{x_1}$ . Построенное отображение называется *параллельным переносом* вдоль пути  $\gamma$ .

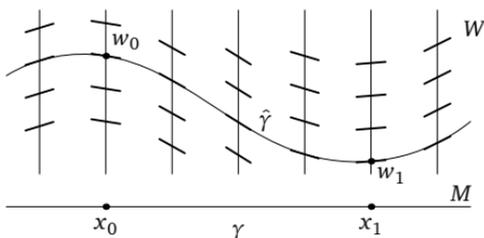


Рис. 3. Параллельный перенос слоев вдоль пути на базе

Таким образом, можно утверждать, что связность — это инфинитезимальный параллельный перенос, то есть способ отождествить бесконечно близкие слои.

Поле гиперплоскостей связности можно задать как поле ядер некоторой 1-формы  $\alpha$  в пространстве расслоения. Форма  $\alpha$  определена с точностью до умножения на ненулевую функцию. Нормируем  $\alpha$  условием того, что ее значение на единичном касательном векторе к слою  $\partial/\partial\varphi$  равно 1 ( $\varphi$ -угловой параметр на слое). Если выбрать некоторую тривиализацию, то из  $S^1$ -инвариантности поля связности вытекает, что форма  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha = d\varphi - \pi^*\theta,$$

где 1-форма  $\theta$  задана на базе расслоения (точнее, в той области базы, над которой выбрана тривиализация). Форма  $\theta$  называется *1-формой связности*. Эта форма зависит от выбора тривиализации. Если задана

другая тривиализация с угловой координатой  $\varphi' = \varphi - \psi(x)$ ,  $x \in M$ , то из равенства

$$\alpha = d\varphi - \pi^*\theta = d\varphi' - \pi^*\theta'$$

мы получаем

$$\theta' = \theta - d\psi, \quad (3)$$

то есть при изменении тривиализации из формы связности вычитается дифференциал функции перехода. Для того, чтобы задать связность в  $S^1$ -расслоении, достаточно задать ее 1-форму на каждой области, над которой задана тривиализация, так, чтобы на пересечении областей эти 1-формы были согласованы условием (3).

Если путь целиком лежит в области, над которой задана тривиализация, то поднятие  $\hat{\gamma}$ , задающее параллельный перенос вдоль  $\gamma$ , задается равенством  $(d\varphi - \theta)(\dot{\hat{\gamma}}) = 0$ , то есть изменение угловой координаты  $\varphi$  удовлетворяет уравнению  $\dot{\varphi} = \theta(\dot{\gamma})$ . Поэтому угол, на который поворачивается слой при параллельном переносе, равен

$$\Delta\varphi = \int_{\gamma} \theta.$$

Как зависит параллельный перенос от пути  $\gamma$ , ведущего из точки  $x_0$  в точку  $x_1$ ? Если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — два таких различных пути, то  $\gamma_2^{-1}\gamma_1$  — замкнутый путь. Поэтому рассмотрим близкий вопрос: чему равен параллельный перенос вдоль замкнутого пути? (Связь с предыдущим вопросом возникает из рассмотрения замкнутого пути  $\gamma_2^{-1}\gamma_1$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — два различных пути из  $x_0$  в  $x_1$ .) Пусть  $\gamma$  — замкнутая стягиваемая петля, то есть  $\gamma = \partial D$  является границей некоторого двумерного диска  $D$ . Тогда по формуле Стокса

$$\Delta\varphi = \int_{\partial D} \theta = \int_D \omega, \quad \text{где } \omega = d\theta.$$

Дифференциальная 2-форма  $\omega = d\theta$  называется *формой кривизны* заданной связности. Она инвариантно определена, то есть не зависит от выбора тривиализации. Действительно, для другого выбора тривиализации мы имеем  $\omega' = d\theta' = d\theta + ddg = d\theta = \omega$ .

Из приведенных рассуждений мы получаем следующий вывод: *параллельный перенос не меняется при гомотопии пути в пространстве кривых с фиксированными концами, если и только если форма кривизны связности тождественно обращается в нуль.*

Связность с нулевой формой кривизны называется *плоской*. Связность плоская тогда и только тогда, когда выбором тривиализации в

окрестности любой точки базы ее форму связности можно превратить в нулевую. Действительно, дифференциал нулевой формы равен нулю. И обратно, если форма кривизны нулевая, то в произвольной тривиализации 1-форма связности замкнута, а значит, является дифференциалом некоторой функции, и используя эту функцию в качестве функции перехода, мы получаем новую тривиализацию, в которой форма связности нулевая.

Выбор тривиализации, в которой форма связности нулевая, равносильно выбору плоского (или, как говорят, *ковариантно постоянного*) сечения, то есть такого сечения, образ которого касается плоскостей связности. Таким образом, связность плоская тогда и только тогда, когда над окрестностью любой точки базы можно построить плоское сечение.

## Дифференциальная геометрия поверхностей

Покажем в качестве примера, как язык связностей в  $S^1$ -расслоении позволяет существенно упростить все вычисления в дифференциальной геометрии поверхностей.

**Определение.** *Метрикой*, или *римановой структурой* на поверхности называется невырожденное скалярное произведение в каждой ее касательной плоскости.

В локальных координатах  $u, v$  на поверхности ее метрика записывается в виде  $g = a du^2 + 2b du dv + c dv^2$ , где  $a, b, c$  — гладкие функции (обратим внимание, что в данном случае умножение симметрическое, поэтому знак внешнего умножения  $\wedge$  между дифференциалами координат не ставится).

Если  $M \subset \mathbb{R}^3$  — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, то ограничение евклидовой структуры на поверхность задает на ней риманову структуру. Это ограничение можно вычислить, подставляя в выражение  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  соответствующие дифференциалы евклидовых координат  $x, y, z$ .

**Задача.** Единичную сферу в евклидовом пространстве можно задать параметрически

$$x = \cos \varphi \cos \psi, \quad y = \cos \varphi \sin \psi, \quad z = \sin \varphi.$$

Найдите выражение для метрики на сфере в этой параметризации.

Рассмотрим произвольную поверхность  $M$  с метрикой (не обязательно заданную вложением в евклидово пространство). Обозначим через  $W$  пространство касательных векторов единичной длины. Это

пространство образует  $S^1$ -расслоение  $\pi: W \rightarrow M$ . Слоем этого расслоения служит окружность касательных векторов единичной длины, приложенных к данной точке поверхности. Тривиализация этого расслоения задается полем ортонормированных касательных реперов  $(e_1, e_2)$  (полю  $e_1$  соответствует значение углового параметра  $\varphi = 0$ , полю  $e_2$  соответствует значение  $\varphi = \pi/2$ ). Выбор такого базиса равносильно приведению выражения для метрики к сумме квадратов  $g = u_1^2 + u_2^2$ , где  $(u_1, u_2)$  — двойственный базис 1-форм. 2-форма  $\sigma = u_1 \wedge u_2$ , задающая элемент площади, не зависит от выбора тривиализации (с точностью до знака, который меняется при обращении ориентации поверхности).

**Теорема.** *Расслоение  $\pi$  обладает естественной связностью, называемой римановой. В тривиализации, задаваемой полем  $(e_1, e_2)$  ортонормированных касательных реперов, 1-форма римановой связности имеет вид*

$$\theta = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,$$

где коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2$  разложения по базису  $u_1, u_2$  определяются равенствами

$$du_1 = -\alpha_1 \sigma, \quad du_2 = -\alpha_2 \sigma.$$

Условие, задающее форму связности  $\theta$ , равносильно равенствам

$$du_1 = -\theta \wedge u_2, \quad du_2 = \theta \wedge u_1.$$

**Доказательство.** Для доказательства теоремы нужно убедиться, что при изменении тривиализации заданная этими формулами форма связности преобразуется правильным образом. Поле реперов  $(e'_1, e'_2)$ , соответствующее другой тривиализации, получается из поля  $(e_1, e_2)$  поворотом на угол  $\psi(x)$ . Аналогичным образом преобразуется и двойственный базис 1-форм,

$$u'_1 = \cos \psi u_1 + \sin \psi u_2, \quad u'_2 = -\sin \psi u_1 + \cos \psi u_2.$$

Дифференцируя базисные формы, получаем

$$\begin{aligned} du'_1 &= \cos \psi du_1 + \sin \psi du_2 + d\psi \wedge (-\sin \psi u_1 + \cos \psi u_2) \\ &= -(\cos \psi) \theta \wedge u_2 + (\sin \psi) \theta \wedge u_1 + d\psi \wedge u'_2 \\ &= -\theta \wedge u'_2 + d\psi \wedge u'_2 = -(\theta - d\psi) \wedge u'_2, \\ du'_2 &= -\sin \psi du_1 + \cos \psi du_2 - d\psi \wedge (\cos \psi u_1 + \sin \psi u_2) \\ &= (\sin \psi) \theta \wedge u_2 + (\cos \psi) \theta \wedge u_1 - d\psi \wedge u'_1 \\ &= \theta \wedge u'_1 - d\psi \wedge u'_1 = (\theta - d\psi) \wedge u'_1. \end{aligned}$$

Отсюда  $\theta' = \theta - d\psi$ , что согласуется с (3). Теорема доказана.  $\square$

Форма кривизны римановой связности имеет вид  $\omega = d\theta = K\sigma$ . Функция  $K$  точки поверхности называется *гауссовой кривизной*. В случае, когда  $M$  — поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , гауссова кривизна равна ее *гауссовой кривизне*, определяемой как произведению главных кривизн  $K = \lambda_1\lambda_2$ . Именно, выберем ортогональные координаты в  $\mathbb{R}^3$  так, чтобы плоскость  $Oxy$  касалась поверхности в начале координат. Тогда поверхность задается как график функции  $z = f(x, y)$ . При указанном выборе координат разложение Тейлора функции  $f$  начинается с квадратичных членов,

$$f = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \dots$$

Тогда главные кривизны  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения квадратичной формы  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ , а гауссова кривизна  $K = \lambda_1\lambda_2 = b^2 - ac$  — ее определитель. Знаменитая «*блистательная*» теорема Гаусса утверждает, что, в отличие от главных кривизн, гауссова кривизна полностью определяется метрическими свойствами поверхности, то есть римановой структурой на ней. Это свойство гауссовой кривизны мы и взяли выше за определение.

**Задача.** Вычислить гауссову кривизну метрики  $g = dx^2 + \cos^2 x dy^2$ .

**Решение.** Поскольку  $dx^2 + \cos^2 x dy^2 = dx^2 + (\cos x dy)^2$ , мы можем положить

$$u_1 = dx, \quad u_2 = \cos x dy$$

(этот базис 1-форм двойственен ортонормированному базису векторных полей  $e_1 = \partial_x, e_2 = \frac{\partial_y}{\cos x}$ ). Соответственно, форма площади равна  $\sigma = u_1 \wedge u_2 = \cos x dx \wedge dy$ . Дифференцируя  $u_1$  и  $u_2$ , находим форму связности

$$du_1 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad du_2 = -\sin x dx \wedge dy = -\operatorname{tg} x \sigma, \quad \alpha_2 = \operatorname{tg} x, \\ \theta = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \operatorname{tg} x u_2 = \sin x dy.$$

Отсюда получаем окончательно

$$\omega = d\theta = \cos x dx \wedge dy = \sigma,$$

то есть  $K \equiv 1$ . Заметим, что приведенная метрика есть стандартная метрика на единичной сфере в сферических координатах.  $\square$

**Задача.** Докажите, что метрика  $g = dx^2 + x^2 dy^2$  евклидова и найдите евклидовы координаты  $X, Y$  (в которых метрика принимает вид  $dX^2 + dY^2$ ).

**Решение.** Действуя, как в предыдущей задаче, находим последовательно

$$\begin{aligned} dx^2 + x^2 dy^2 &= dx^2 + (x dy)^2, & u_1 &= dx, & u_2 &= x dy, & \sigma &= x dx \wedge dy. \\ du_1 &= 0, & du_2 &= dx \wedge dy = \frac{1}{x} \sigma, \\ \theta &= 0 u_1 - \frac{1}{x} u_2 = -dy, \\ \omega &= d\theta = -ddy = 0, & K &= 0. \end{aligned}$$

Итак, связность плоская. Значит, существует другой репер  $(E_1, E_2)$ , состоящий из *ковариантно постоянных* (касающихся поля связности) полей. Найдем эти поля. Всякое сечение расслоения  $W$  имеет вид

$$u = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2,$$

где угол  $\varphi$  является функцией точки базы. Условие ковариантной постоянности имеет вид

$$d\varphi - \theta = 0, \quad \text{то есть} \quad d\varphi = -dy, \quad \varphi = -y + \text{const.}$$

Поля  $E_1, E_2$  соответствуют значениям константы 0 и  $\pi/2$  соответственно,

$$E_1 = \cos y e_1 - \sin y e_2, \quad E_2 = \sin y e_1 + \cos y e_2.$$

Нам нужно найти координаты, для которых указанные поля являются координатными. Чтобы найти их, заметим, что дифференциалы этих координат образуют двойственный базис:

$$\begin{aligned} dX = E_1^* &= \cos y e_1^* - \sin y e_2^* = \cos y dx - x \sin y dy = d(x \cos y), \\ dY = E_2^* &= \sin y e_1^* + \cos y e_2^* = \sin y dx + x \cos y dy = d(x \sin y). \end{aligned}$$

Значит,  $X = x \cos y$ ,  $Y = x \sin y$ . Иными словами,  $x, y$  — полярные координаты на стандартной евклидовой плоскости с евклидовыми координатами  $X, Y$ .  $\square$

Вычисления, проведенные в предыдущих задачах, существенно проще тех, которые проводятся при помощи стандартного формализма с использованием многоэтажных индексов. Объясним причину такого успеха. Обычно связность задается (в базисе *коммутирующих* координатных полей) своей матрицей, состоящей из 1-форм (см. лекцию А. А. Болибруха)

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 dx + \Gamma_{12}^1 dy & \Gamma_{21}^1 dx + \Gamma_{22}^1 dy \\ \Gamma_{11}^2 dx + \Gamma_{12}^2 dy & \Gamma_{21}^2 dx + \Gamma_{22}^2 dy \end{pmatrix}.$$

Даже с учетом симметрий символов Кристоффеля  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ , связность задается набором из 6 функций. В наших же вычислениях связность определяется двумя коэффициентами формы  $\theta$ , что позволяет утверждать, что наши вычисления в **три** раза короче обычных, не говоря уж о том, что благодаря инвариантной форме записи не возникает опасность запутаться в индексах и знаках. Выигрыш достигается за счет того, что в *ортонормированном* базисе символы Кристоффеля имеют больше симметрий: матрица связности кососимметрична и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

## Формула Гаусса—Бонне

Пусть  $M$  — произвольная замкнутая ориентированная двумерная поверхность. И пусть задано произвольное  $S^1$ -расслоение  $\pi: W \rightarrow M$ . Введем в нем произвольную связность. Тогда форма кривизны  $\omega$  этой связности — 2-форма, и ее можно по  $M$  проинтегрировать.

**Теорема. Интеграл**

$$\chi(\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_M \omega$$

*принимает целые значения и является топологическим инвариантом, называемым числом Эйлера расслоения. В случае, когда  $W$  — расслоение касательных единичных векторов,  $\chi(\pi)$  совпадает с эйлеровой характеристикой  $\chi(M) = 2 - 2g$  самой поверхности  $M$ .*

Классическая формула Гаусса—Бонне, являющаяся частным случаем этой теоремы, утверждает, что для всякой замкнутой ориентированной поверхности  $M \subset \mathbb{R}^3$  выполняется равенство

$$\int_M K \sigma = 2\pi \chi(M).$$

Эта замечательная теорема является простейшим проявлением того, как глобальные топологические инварианты могут изучаться при помощи тех или иных дифференциально-геометрических структур. Более современными проявлениями этих идей являются теория Черна—Вейля, инварианты Дональдсона и Зайберга—Виттена, гомологии Флора.

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что если заданы две связности, то разница их форм связности  $\eta = \theta_1 - \theta_2$  является глобально заданной 1-формой на  $M$ , не зависящей от выбора тривиализации. Действительно, при другом выборе тривиализации мы имеем

$$\theta'_1 - \theta'_2 = (\theta_1 - d\psi) - (\theta_2 - d\psi) = \theta_1 - \theta_2.$$

Отсюда вытекает, что формы кривизны этих связностей связаны соотношением  $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$ , откуда по формуле Стокса

$$\int_M \omega_1 - \int_M \omega_2 = \int_M d\eta = 0.$$

Таким образом, число  $\chi(\pi)$  действительно является инвариантом. Чтобы вычислить его, постараемся построить у расслоения  $\pi$  глобальное непрерывное сечение  $s$ . Если нам это удастся, то расслоение тривиально, и связность, в которой  $s$  ковариантно постоянно, является плоской. Поэтому  $\int_M \omega = 0$  в данном случае. В общем случае глобальное сечение построить нельзя. Покажем, однако, что его всегда можно построить в дополнении к некоторому конечному набору точек.

Реализуем расслоение  $W$  как расслоение единичных окружностей в некотором двумерном векторном расслоении  $E \rightarrow M$ . Выберем сечение  $v: M \rightarrow E$  этого векторного расслоения (для этого уже никаких топологических препятствий не будет). Пусть  $X \subset M$  — множество нулей этого сечения. В каждом слое над дополнением  $M \setminus X$  точку сечения  $v$  можно спроектировать вдоль направления радиус-вектора на единичную окружность и получить, тем самым, сечение исходного расслоения  $\pi$  над  $M \setminus X$ . Осталось заметить, что если  $v$  — сечение общего положения, то множество его нулей состоит из конечного числа точек (строгое обоснование этого интуитивно понятного утверждения требует привлечения дополнительных технических средств, например, теоремы Сарда). Если, например,  $E$  — расслоение касательных векторов, то  $v$  — векторное поле, и  $X$  — множество его особых точек.

Итак, пусть выбрано сечение  $s$  расслоения  $\pi$ , заданное в дополнении к набору точек  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ . Пусть  $U_i$  — маленькая окрестность точки  $x_i$ . Тогда при обходе вокруг точки  $x_i$  в положительном направлении сечение  $s$  делает некоторое количество оборотов в слое (в некоторой тривиализации над  $U_i$ ). Количество этих оборотов мы назовем индексом сечения  $s$  в точке  $x$  и обозначим через  $\text{ind}_s(x)$ . Мы хотим доказать равенство

$$\chi(\pi) = \sum_{x \in X} \text{ind}_s(x) \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Это равенство доказывает первое утверждение теоремы. В случае, когда расслоение образовано касательными векторами, сумма (4) совпадает с суммой индексов особых точек общего векторного поля на поверхности, откуда и будет следовать второе утверждение теоремы.

Для доказательства равенства (4) рассмотрим плоскую связность в  $M \setminus X$ , для которой сечение  $s$  ковариантно постоянно. В тривиализации

над (проколотой) окрестностью  $U_i \setminus x_i$  эта связность задается формой  $\tilde{\theta}_i$ , которая замкнута,  $d\tilde{\theta}_i = 0$ , и для которой, по построению, имеет место равенство

$$\int_{\gamma_i} \tilde{\theta}_i = 2\pi \operatorname{ind}_s(x_i),$$

где  $\gamma_i$  — произвольный путь в  $U_i$ , обходящий точку  $x_i$  один раз в положительном направлении.

Рассмотрим произвольную гладкую форму  $\theta_i$ , которая определена на всей области  $U_i$  и совпадает с  $\tilde{\theta}_i$  вблизи границы  $\partial U_i$  (например, можно положить  $\theta_i = \rho_i \tilde{\theta}_i$ , где функция  $\rho_i$  равна единице вблизи  $\partial U_i$  и равна нулю в некоторой меньшей окрестности точки  $x_i$ ).

Построенные формы  $\theta_i$  склеиваются в связность нашего расслоения, определенную уже на всем  $M$ . Эта связность больше не является плоской, однако носитель формы кривизны сосредоточен в объединении областей  $U_i$ , поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_M \omega &= \sum \frac{1}{2\pi} \int_{U_i} \omega = \sum \frac{1}{2\pi} \int_{U_i} d\theta_i = \\ &= \sum \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_i} \theta_i = \sum \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_i} \tilde{\theta}_i = \sum \operatorname{ind}_s(x_i), \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (4), а вместе с ним и теорему.  $\square$

**Задача.** Найдите число Эйлера расслоения Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ , сопоставляющего точке единичной сферы  $S^3 \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  проходящую через нее комплексную прямую, рассматриваемую как точка проективной прямой  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ . (Ответ:  $-1$ .)

## Оглавление

<b>А. А. Болибрух. Уравнения Максвелла и дифференциальные формы</b>	
Лекция 1 . . . . .	3
Лекция 2 . . . . .	13
<b>М. Э. Казарян. Дифференциальные формы, расслоения, связности</b>	
Дифференциальные формы . . . . .	25
Связность в $S^1$ -расслоении . . . . .	28
Дифференциальная геометрия поверхностей . . . . .	31
Формула Гаусса—Бонне . . . . .	35

## Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)  
Книга — почтой: [biblio.mcsme.ru/shop/order](http://biblio.mcsme.ru/shop/order)  
Книги в электронном виде: [www.litres.ru/mcnmo](http://www.litres.ru/mcnmo)

### Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; [www.umlit.ru](http://www.umlit.ru), [www.textbook.ru](http://www.textbook.ru), [абрис.рф](http://абрис.рф)
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; [www.kniga.ru](http://www.kniga.ru)

### Наши партнеры в Москве и Подмоскowie

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; [www.mdk-arbat.ru](http://www.mdk-arbat.ru)
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; [www.bookmg.ru](http://www.bookmg.ru)
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; [www.arg.ru](http://www.arg.ru)
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; [www.uchebnik.com](http://www.uchebnik.com)
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; [www.shkolkniga.ru](http://www.shkolkniga.ru)
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, [www.urss.ru](http://www.urss.ru)
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

### Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; [k\\_i@bk.ru](mailto:k_i@bk.ru)
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

### Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

### Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине; тел. 067-136-37-35; [df-al-el@bk.ru](mailto:df-al-el@bk.ru)