

ЛЕТНЯЯ
СОВРЕМЕННАЯ



ШКОЛА
МАТЕМАТИКА

М. Э. Казарян

Тропическая геометрия

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2010

М. Э. Казарян

Тропическая геометрия

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2021

УДК 512.772
ББК 22.147
К14

Казарян М. Э.
Тропическая геометрия.
М.: МЦНМО, 2021.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2021.
43 с. ISBN 978-5-4439-2192-1

Тропическая геометрия — это открытый в конце XX века способ решения задач комплексной алгебраической геометрии, сводящий их к элементарному комбинаторному исследованию графов в вещественной евклидовой плоскости.

Благодаря большому количеству приложений, а также удачному громкому названию (не имеющему отношения к существу дела) тропическая геометрия быстро приобрела большую популярность и стремительно развивается в последние годы.

Эта брошюра представляет собой записки лекций, прочитанных автором на школе «Современная математика» для студентов и школьников в Дубне в разные годы. Тропическая геометрия рассматривается на примере решения следующей задачи: найти количество комплексных кривых фиксированной степени на плоскости, имеющих заданное число двойных точек и проходящих через заданный набор точек общего положения.

Подготовлено на основе книги:

Казарян М. Э. Тропическая геометрия. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2019. — 43 с. ISBN 978-5-4439-2903-3

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-2192-1

© Казарян М. Э., 2021.
© МЦНМО, 2021.

Введение

Двумерная комплексная геометрия изучает гладкие комплексные кривые на плоскости, заданные многочленом фиксированной степени. Топологические инварианты кривой не меняются при непрерывном изменении коэффициентов многочлена, пока кривая остается гладкой. Один из возможных способов изучения кривых состоит в том, чтобы рассмотреть предельные значения коэффициентов, при которых кривая становится особой. В некоторых случаях исследование особой кривой проще, и это дает информацию об исходной невырожденной кривой.

Тропическая геометрия — это способ решения задач комплексной геометрии при помощи «сверхвырождения» кривой, при котором она уже перестает быть, собственно говоря, комплексной, а описывается графом с прямыми рёбрами на вещественной евклидовой плоскости. В результате задача сводится к абсолютно элементарному комбинаторному исследованию полученных графов.

Благодаря большому количеству приложений, а также удачному громкому названию (не имеющему отношения к существу дела) тропическая геометрия приобрела большую популярность в последние годы.

В приведённых записках тропическая геометрия рассматривается на примере решения следующей задачи: найти количество комплексных кривых фиксированной степени на плоскости, имеющих заданное число двойных точек и проходящих через заданный набор точек общего положения.

§1. Тропическая прямая

«Тропическая геометрия» появилась изначально в теории информации и получила своё название по месту работы бразильского профессора Имре Саймона, работавшего в этой области. В настоящее же время тропическая геометрия обычно упоминается в связи с её приложениями к алгебраической геометрии, и к содержанию предмета её название отношения не имеет. Простейшим объектом тропической геометрии является *тропическая прямая*, изображённая на рис. 1. Это объединение трёх лучей на обычной вещественной плоскости, выходящих из одной точки, один из которых направлен строго влево, другой строго вниз, а третий — вправо вверх под углом ровно 45° . Различные тропические прямые получаются друг из друга параллельным переносом. Таким образом, множество всех тропических прямых само образует пространство $\mathbb{R}^2$. Термин «прямая» обосновывается следующими неожиданными, на первый взгляд, свойствами:

- любые две тропические прямые общего положения пересекаются в единственной точке;
- через любые две точки общего положения на плоскости проходит единственная тропическая прямая.

Условие общности положения важно, но не является слишком ограничительным. Рассмотрим какую-нибудь вырожденную конфигурацию, например, предположим, что заданные две точки нахо-

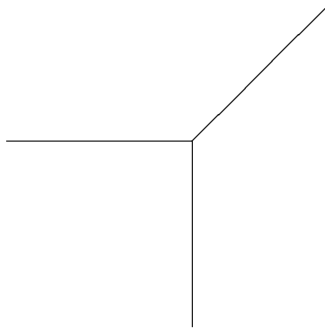


Рис. 1. Тропическая прямая

дятся на одной горизонтальной прямой. Пошевелив слегка эти две точки, мы получаем невырожденную конфигурацию, для которой проходящая через них прямая определена уже однозначно. Нетрудно заметить, что имеется единственное предельное положение этой прямой при стремлении пошевелинных точек к исходному положению (найдите его!). Таким образом, из всех тропических прямых, содержащих исходные две точки необщего положения, имеется одна, наиболее предпочтительная.

На первый взгляд, тропическая прямая мало чем напоминает обычную, к которой мы привыкли ещё со школьной программы. В действительности же тропическая прямая является своего рода бесконечным вырождением обычной (правда, комплексной) прямой, так что приведённые выше свойства являются следствиями соответствующих свойств прямых в классической геометрии. К описанию связи тропической геометрии с классической мы и перейдём.

Рассмотрим обычную комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$ с комплексными координатами X, Y (строчные буквы x, y мы зарезервируем для обозначения вещественных координат на вещественной тропической плоскости $\mathbb{R}^2$). Рассмотрим пару точек P_1 и P_2 общего положения с координатами (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) соответственно и прямую L , проходящую через эти две точки. Эта прямая задаётся линейным уравнением

$$AX + BY + C = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого определяются координатами точек P_1 и P_2 однозначно с точностью до общего множителя. Например, мы можем, убедитесь в этом положить

$$A = \frac{1}{X_2 - X_1}, \quad B = -\frac{1}{Y_2 - Y_1}, \quad C = \frac{Y_1}{Y_2 - Y_1} - \frac{X_1}{X_2 - X_1}.$$

Нас интересуют комплексные решения этого уравнения. Всякое комплексное число X представимо в виде $X = \varphi r$, где φ — комплексное число единичной длины, называемое *фазой*, а $r \geq 0$ — вещественное число, называемое *амплитудой*. Предположив, что $r > 0$, мы можем положить $r = t^x$, где $t > 1$ — фиксированное вещественное число и $x \in \mathbb{R}$. В соответствии с этим положим

$$P_i = (\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i}), \quad |\varphi_i| = |\psi_i| = 1, \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2.$$

Предположим теперь, что фазы φ_i, ψ_i и показатели x_i, y_i амплитуд точек P_1 и P_2 фиксированы, а величина t меняется. В результате

мы получаем семейство прямых $L(t)$, зависящих от вещественного параметра t . Нас интересует поведение этих прямых при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что коэффициент $A = A(t)$ уравнения для кривой $L(t)$ ведёт себя при больших t как степенная функция вида $\text{const} \cdot t^\alpha$. Действительно, при $x_2 > x_1$ мы имеем

$$A(t) = \frac{1}{X_2 - X_1} = \frac{1}{\varphi_2 t^{x_2} - \varphi_1 t^{x_1}} = \frac{t^{-x_2}}{\varphi_2 - \varphi_1 t^{x_1 - x_2}} \sim \frac{1}{\varphi_2} t^{-x_2},$$

поскольку $t^{x_1 - x_2} \rightarrow 0$. Поэтому в данном случае мы получаем $\alpha = -x_2$. В случае $x_2 < x_1$ мы имеем аналогичное представление с $\alpha = -x_1$. Аналогичные вычисления приводят к асимптотическим разложениям вида $B \sim \text{const} \cdot t^\beta$, $C \sim \text{const} \cdot t^\gamma$. Положив также $X = \varphi t^x$, $Y = \psi t^y$, где $|\varphi| = |\psi| = 1$, мы можем приближённо переписать левую часть равенства (1) в виде

$$a t^{x+\alpha} + b t^{y+\beta} + c t^\gamma,$$

где комплексные числа a, b, c , хотя и содержат неизвестные фазы φ и ψ , являются отличными от нуля и ограниченными по модулю константой, не зависящей от t . Если показатели $x + \alpha$, $y + \beta$, и γ все различны, то из трёх мономов, участвующих в последнем выражении, один существенно преобладает над другими, так что выражение никак не может обратиться в нуль. Следовательно, для того чтобы точка $(\varphi t^x, \psi t^y)$ являлась решением уравнения (1), необходимо, чтобы максимум из трёх чисел $x + \alpha$, $y + \beta$, γ достигался по крайней мере в двух из них. Нетрудно видеть, что множество пар (x, y) , в которых выполняется это условие, является тропической прямой, а именно множеством негладкости кусочно-линейной функции

$$f(x, y) = \max(x + \alpha, y + \beta, \gamma).$$

Более формально сделанный вывод можно сформулировать следующим образом. Положим $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и рассмотрим отображение

$$\text{Log}_t: (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

заданное в координатах в виде

$$(X, Y) \mapsto (x, y), \quad x = \log_t |X|, \quad y = \log_t |Y|.$$

Предложение. Образ прямой $L(t)$ при отображении Log_t содержится при больших t в ε -окрестности некоторой тропической прямой. Размер ε этой окрестности тем меньше, чем больше t , и при $t \rightarrow \infty$ величина ε стремится к нулю.

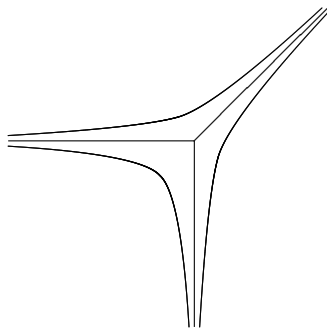


Рис. 2. Амёба комплексной прямой

Таким образом, тропическую прямую можно рассматривать как вырождение комплексной прямой $L(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Образ комплексной прямой при отображении Log_t называется её *амёбой*. Амёба, вместе с содержащейся в ней тропической прямой, изображена на рис. 2. Внутренние точки амёбы имеют по два прообраза на комплексной прямой, граничные — по одному. Саму комплексную прямую можно представлять себе как результат склейки двух экземпляров амёбы вдоль общей границы. Результат такой склейки (иногда называющийся также *штанами*) топологически эквивалентен двумерной сфере без трёх точек. Три выколотые точки, соответствующие «щупальцам» амёбы, отвечают двум точкам пересечения прямой $L(t)$ с координатными осями, а также точке $\infty \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$.

§ 2. Тропическое полуполе

Другой, более алгебраический, взгляд на тропическую геометрию состоит в следующем. Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел и введём на нём модифицированные операции сложения и умножения следующим образом:

$$\langle x \times_t y \rangle = \log_t(t^x t^y) = x + y,$$

$$\langle x +_t y \rangle = \log_t(t^x + t^y),$$

где $t > 1$ — параметр. Очевидно, что так введённые операции совпадают с обычным умножением и сложением на полупрямой $\mathbb{R}_{>0}$ при

отождествлении $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, задаваемом соответствием $x \mapsto t^x$. Оказывается, что эти операции допускают предел при $t \rightarrow \infty$. Действительно, введённое умножение от t вообще не зависит, а для сложения заметим, что из двух слагаемых под знаком логарифма при больших t существенным является вклад только того из них, у которого показатель больше. В результате мы получаем предельные операции (в обозначении которых мы индекс опускаем)

$$\langle x \times y \rangle = x + y,$$

$$\langle x + y \rangle = \max(x, y).$$

Множество вещественных чисел с введёнными таким образом двумя операциями называется *тропическим полуполем*. Обе операции коммутативны, ассоциативны и удовлетворяют обычному свойству дистрибутивности. Эти свойства вытекают из того, что они выполняются до взятия предела. Конечно, их легко установить и непосредственно из определения. В тропическом полуполе отсутствует аддитивный ноль. Его роль играет $-\infty$. Тропическое частное $\langle x/y \rangle = x - y$ определено без ограничения на знаменатель y , а тропическая разность не определена вовсе. Потому и используется термин *полуполе*.

§ 3. Тропические многочлены и тропические кривые

Определение. *Тропическим многочленом степени d называется кусочно-линейная функция*

$$f(x, y) = \langle \sum_{i+j \leq d} \alpha_{i,j} x^i y^j \rangle = \max_{i+j \leq d} (i x + j y + \alpha_{i,j}),$$

где $\alpha_{i,j}$ — вещественные константы.

Может случиться так, что для некоторого из мономов

$$\langle \alpha_{i,j} x^i y^j \rangle = i x + j y + \alpha_{i,j}$$

значение функции не совпадает со значением этого монома ни в одной точке. В этом случае малое изменение коэффициента $\alpha_{i,j}$ не меняет многочлена. Иными словами, мы рассматриваем тропический многочлен не как набор коэффициентов $\alpha_{i,j}$, а именно как саму кусочно-линейную функцию. Пространство тропических многочленов можно отождествить с (замкнутым) конусом в пространстве коэффициентов $\alpha_{i,j}$. Ещё одно важное замечание заключается в том,

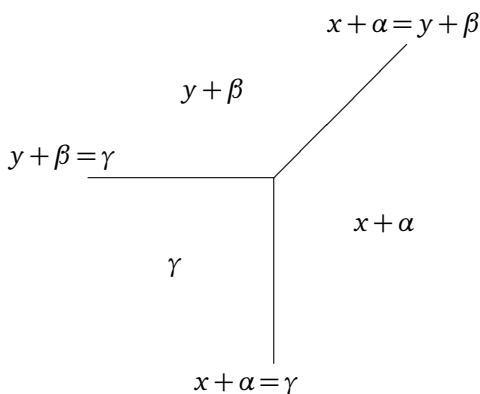


Рис. 3. Тропическая линейная функция

что тропический многочлен степени d не является частным случаем тропического многочлена степени d' при $d < d'$. Иными словами, степень d входит в определение многочлена.

Пример. Тропическая линейная функция

$$f(x, y) = \langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle = \max(x + \alpha, y + \beta, \gamma)$$

имеет следующее поведение (см. рис. 3). При x и y отрицательных и больших по абсолютной величине максимальным из трёх величин является постоянное значение γ . При увеличении x значение функции не меняется до тех пор, пока точка (x, y) не пересечёт вертикальную прямую $x + \alpha = \gamma$. Правее этой прямой максимальной является ветвь $x + \alpha$. Аналогично при движении точки (x, y) вверх переход к ветви $y + \beta$ осуществляется на горизонтальной прямой $y + \beta = \gamma$, вдоль которой максимум достигается на двух конкурирующих ветвях $y + \beta$ и γ . Наконец, области, в которых значение функции $f(x, y)$ совпадает с ветвями $x + \alpha$ и $y + \beta$, разделяются лучом прямой $x + \alpha = y + \beta$, имеющей наклон 1. Таким образом, множество негладкости линейной тропической функции служит тропическая прямая, рассмотренная в предыдущем пункте.

Пример. Рассмотрим тропические многочлены второй степени. Множество негладкости такого многочлена называется *тропической кривой второй степени*, служащей тропическим аналогом эллипса и гиперболы из классической геометрии. Как и для обычной гиперболы, тропическую кривую второй степени можно получить,

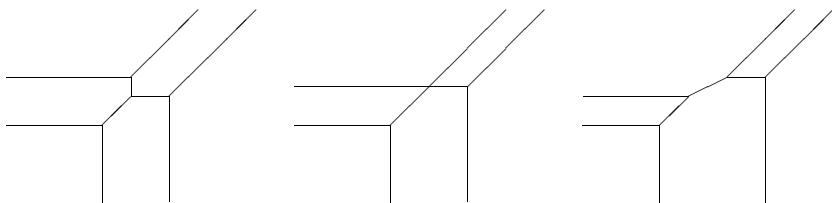


Рис. 4. Вырожденная тропическая кривая второй степени и два её шевеления

пошевелив слегка объединение двух тропических прямых. Объединение двух прямых задаётся произведением (в тропическом смысле) двух линейных функций. У графа, являющегося множеством негладкости такого произведения, имеется вершина валентности 4, в которой максимум достигается одновременно на четырёх конкурирующих линейных функциях. После небольшого шевеления одной из этих линейных функций точка валентности четыре распадается на две точки валентности три. Некоторые из возможных тропических кривых второй степени приведены на рис. 4.

Задача. Определите наклон каждого из рёбер тропических кривых, изображённых на рисунке. Найдите все возможные конфигурации тропических кривых второй степени общего положения (под конфигурацией я понимаю комбинаторный тип графа и наклон его рёбер, но не их длины и положение).

Рассмотрим один из отрезков множества негладкости тропического многочлена. Предположим, что в одной из областей, граничащих с этим отрезком, максимальной является ветвь $i x + j y + \alpha_{i,j}$, а другой — ветвь $\hat{i} x + \hat{j} y + \alpha_{\hat{i},\hat{j}}$. Тогда прямая, содержащая данный отрезок, задаётся уравнением

$$(i - \hat{i}) x + (j - \hat{j}) y + (\alpha_{i,j} - \alpha_{\hat{i},\hat{j}}) = 0.$$

Назовём *кратностью* отрезка множества негладкости наибольший общий делитель чисел $i - \hat{i}$ и $j - \hat{j}$.

Определение. *Тропической кривой*, ассоциированной с данным тропическим многочленом, называется граф на тропической плоскости, являющийся множеством негладкости этого многочлена и снабжённый кратностями всех его рёбер.

Кратные рёбра тропической кривой обозначают на рисунках обычно двойными (тройными и т. д.) линиями.

Лемма. Тропические кривые, ассоциированные с многочленами степени d , обладают следующими свойствами.

1. Наклон каждого ребра рационален.
2. В каждой вершине выполняется следующее условие сбалансированности. Обозначим через v_i вектор с началом в данной вершине, имеющий направление i -го ребра, выходящего из вершины, и равный кратчайшему целочисленному вектору с данным направлением, умноженному на кратность ребра. Тогда

$$\sum v_i = 0.$$

3. Имеется $3d$ бесконечных рёбер, взятых с учётом кратностей, d из которых направлены строго влево, d направлены строго вниз, и d направлены вправо вверх под углом 45° .

Первое свойство очевидно. Докажем второе. Рассмотрим вершину кривой и предположим, что к этой вершине подходит r областей дополнения к кривой, в которых максимум достигается на функциях $i_1x + j_1y + \alpha_{i_1, j_1}$, ..., $i_r x + j_r y + \alpha_{i_r, j_r}$ соответственно (мы считаем области занумерованными против часовой стрелки). Тогда, очевидно, выполняется векторное равенство

$$\begin{pmatrix} i_2 - i_1 \\ j_2 - j_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} i_r - i_{r-1} \\ j_r - j_{r-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 - i_r \\ j_1 - j_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось заметить только, что вектор $\begin{pmatrix} i_{s+1} - i_s \\ j_{s+1} - j_s \end{pmatrix}$ отличается от вектора v_s , участвующего в условии сбалансированности, только лишь поворотом на 90° .

Доказательство третьего свойства оставляется в качестве упражнения. Его наглядный смысл будет разъяснён в следующем пункте.

Теорема. Тропический многочлен восстанавливается по своей кривой однозначно с точностью до аддитивной (то есть тропически мультипликативной) константы. Более того, всякий граф на плоскости с прямыми рёбрами и предписанными кратностями, удовлетворяющий свойствам 1—3 предыдущей леммы, является тропической кривой, ассоциированной с некоторым многочленом степени d .

Действительно, предположим, что в некоторой области тропический многочлен совпадает с линейной функцией $i x + j y + \alpha_{i,j}$. Пусть прямая, содержащая отрезок границы этой области, имеет уравнение $p x + q y + \beta = 0$. Тогда в соседней области, граничащей

с исходной вдоль отрезка, многочлен совпадает с линейной функцией $(i + p)x + (j + q)y + (\alpha_{i,j} + \beta)$. Иными словами, мы устанавливаем равенство $\alpha_{i+p,j+q} = \alpha_{i,j} + \beta$. Продолжая таким же образом, мы восстанавливаем весь многочлен область за областью по индукции. Условие сбалансированности гарантирует нам, что в процессе построения мы никогда не придём к противоречию. Условие поведения тропической кривой на бесконечности обеспечит наличие только тех «тропических мономов», полученных в процессе построения, которые только и возможны для многочленов данной степени.

Приведённая теорема показывает, что всякая попытка определить «абстрактную» тропическую кривую приводит неизбежно к кривой, связанной с некоторым многочленом.

§ 4. Диаграмма Ньютона и её разбиение

Мономы $\alpha_{i,j}x^i y^j$, встречающиеся у многочленов степени d , нумеруются целыми точками на плоскости с координатами i, j , лежащими внутри треугольника Δ с вершинами $(0, 0)$, $(d, 0)$ и $(0, d)$. Этот треугольник называется *диаграммой Ньютона* (см. рис. 5). Со всякой тропической кривой связывается некоторое разбиение диаграммы Ньютона на выпуклые многоугольники с целочисленными вершинами. Это разбиение двойственно разбиению тропической плоскости, задаваемому тропической кривой. А именно, рассмотрим область дополнения тропической кривой, в которой многочлен совпадает с тропическим мономом $\langle \alpha_{i,j}x^i y^j \rangle = ix + jy + \alpha_{i,j}$. Этой области мы сопоставим вершину с координатами (i, j) на диаграмме Ньютона. Ребру тропической кривой, разделяющему две области, сопоставляется отрезок на диаграмме Ньютона, соединяющий вершины, отвечающие этим двум областям. Наконец, всякой вершине тропической кривой, к которой подходит r областей её дополнения, соответствует r -угольник на диаграмме Ньютона, вершины которого отвечают этим r областям. В частности, бесконечным областям соответствуют вершины разбиения, входящие в границу Δ , а бесконечным рёбрам — отрезки границы Δ (см. рис. 6). Полезно отметить, что направление всякого ребра тро-

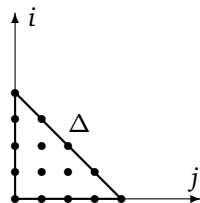


Рис. 5. Диаграмма Ньютона

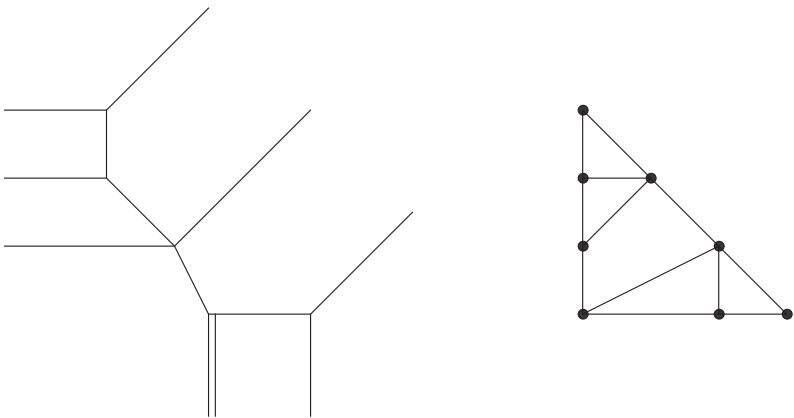


Рис. 6. Тропическая кривая и соответствующее ей разбиение диаграммы Ньютона

пической кривой ортогонально направлению двойственного ребра разбиения Δ .

Вот ещё одно эквивалентное описание разбиения диаграммы Ньютона. Рассмотрим в трёхмерном пространстве с координатами (i, j, z) набор лучей $z \leq \alpha_{i,j}$, где пары (i, j) пробегают целочисленные точки диаграммы Ньютона. Рассмотрим многогранную область, являющуюся выпуклой оболочкой этого набора лучей. Построенная область задаётся неравенством $z \leq g(i, j)$, $(i, j) \in \Delta$ (в котором координаты (i, j) уже не предполагаются целочисленными), для некоторой кусочно-линейной функции g . Эквивалентное определение функции g состоит в том, что она является преобразованием Лежандра исходной функции f :

$$g(i, j) = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} (f(x, y) - ix - jy).$$

Так вот, утверждение состоит в том, что описанное выше разбиение треугольника Δ совпадает с его разбиением на области гладкости функции g .

Отметим, что форма тропической кривой (комбинаторный тип графа, направления и кратности рёбер) несёт в себе ровно столько же информации, сколько содержится в двойственном разбиении диаграммы Ньютона. В зависимости от ситуации удобнее бывает пользоваться либо одним, либо вторым описанием. Например,

кратность ребра тропической кривой равна количеству отрезков, на которые делят целые точки двойственное ребро разбиения Δ , и т. д.

Пример. Имеется ровно 4 разбиения диаграммы Ньютона при $d = 2$ на треугольники минимально возможной площади $1/2$. Эти разбиения изображены на рисунке 7. Тропические кривые, соответствующие этим разбиениям, имеют только простые рёбра (кратности 1) и вершины валентности 3. Они доставляют, в частности, решение задачи на странице 10. Кривые, соответствующие первым двум разбиениям, изображены на крайне левом и крайне правом рис. 4.

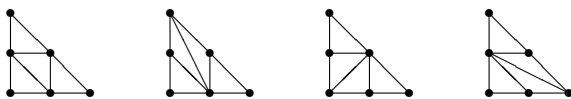


Рис. 7. Различные разбиения диаграммы Ньютона ($d = 2$)

Задача. Как выглядят тропические кривые, соответствующие оставшимся двум разбиениям, изображённым на рисунке 7? Какое разбиение соответствует средней кривой рисунка 4?

§ 5. Задача пересчёта плоских алгебраических кривых

Одно из самых ярких применений тропической геометрии состоит в решении задачи пересчёта плоских комплексных кривых. Приведём постановку этой задачи.

Комплексная кривая степени d на комплексной плоскости задаётся многочленом степени d от двух переменных. Количество коэффициентов этого многочлена равно числу точек на диаграмме Ньютона, то есть $(d + 1)(d + 2)/2$. Количество комплексных параметров, необходимых для задания кривой, на один меньше, поскольку многочлен определён с точностью до умножения на константу. Кроме того, мы будем рассматривать *нодальные* кривые, то есть кривые с двойными точками (самопересечениями). Самопересечение появляется, например, в семействе гипербол $XY = \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Условие наличия особой точки уменьшает на один количество свободных параметров, необходимых для задания кривой (то есть является

условием коразмерности один). В результате семейство кривых степени d с n двойными точками имеет размерность

$$c(d, n) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n - 1,$$

иными словами, кривые этого семейства зависят локально от $c(d, n)$ комплексных параметров. Отсюда следует, что для $c(d, n)$ точек общего положения на плоскости имеется лишь конечное число кривых семейства, проходящих через эти точки. Обозначим это число через N_d^n . Из общих принципов комплексной геометрии следует, что это число не зависит от выбора точек (при условии, что они общего положения). Наша задача состоит в его вычислении.

Пример. $N_d^0 = 1$. Действительно, условие прохождения кривой через заданную точку задаёт *линейное* уравнение на коэффициенты многочлена. Для точек общего положения полученная линейная система уравнений невырождена, и из курса линейной алгебры следует, что у неё имеется единственное решение.

Пример. $N_2^1 = 3$. Действительно, нодальная кривая степени 2 — это объединение двух прямых. Две прямые можно провести через $c(2, 1) = 4$ точек тремя способами, в соответствии с тремя способами разбиения четырёх точек на две пары.

Задача. Найдите N_3^2 и N_3^3 .

Среди нодальных кривых, проходящих через заданные точки, могут быть как неприводимые, так и приводимые (представимые в виде объединения кривых меньших степеней). Обозначим через $\bar{N}_d^n$ количество тех из них, которые являются неприводимыми. Как показывает решение последней задачи, переход от $\bar{N}_d^n$ к N_d^n и обратно осуществляется несложным комбинаторным пересчётом. Значения чисел N_d^n и $\bar{N}_d^n$ для небольших d и n приведены в следующей таблице (пропущенные числа означают нули).

$n \backslash d$	2	3	4	5
0	1	1	1	1
1	3	12	27	48
2		21	225	882
3		15	675	7915
4			666	36975
5			378	90027
6			105	109781

$n \backslash d$	2	3	4	5
0	1	1	1	1
1		12	27	48
2			225	882
3			620	7915
4				36855
5				87192
6				87304

Способ нахождения этих чисел при помощи тропической геометрии описан в следующем пункте.

§ 6. Тропическое вырождение комплексных кривых

Метод тропической геометрии для решения задачи предыдущего пункта состоит в том, чтобы выбрать $c(d, n)$ точек на плоскости специальным образом. А именно, выберем эти точки в виде $P_i = (\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i})$, где $|\varphi_i| = |\psi_i| = 1$, а $p_i = (x_i, y_i)$ — фиксированные точки на тропической плоскости. Конечно, для всякого конечно-го t любой набор точек на плоскости представим в указанном виде. Идея состоит в том, чтобы проследить за поведением искомым N_d^n кривых при $t \rightarrow \infty$ для фиксированных φ_i, ψ_i, x_i и y_i .

Можно показать, аналогично тому, как мы это делали в случае прямых, что каждая из искомым N_d^n кривых задаётся уравнением вида

$$\sum_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} A_{i,j}(t) X^i Y^j = 0,$$

где зависящий от t коэффициент $A_{i,j}$ имеет при больших t разложение вида $A_{i,j}(t) = \text{const} \cdot t^{\alpha_{i,j}} + o(t^{\alpha_{i,j}})$. Подставив в левую часть уравнения координаты точки $(X, Y) = (\varphi t^x, \psi t^y)$, мы получаем приближённое выражение вида

$$\sum_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} a_{i,j} t^{ix+jy+\alpha_{i,j}}.$$

Как и в случае прямых, мы заключаем, что внутри каждой из областей дополнения к тропической кривой, отвечающей тропическому многочлену $\max(ix+jy+\alpha_{i,j})$, один из мономов исходного многочлена преобладает над остальными, и этот многочлен может обратиться в нуль только в том случае, если точка (x, y) тропической плоскости находится вблизи тропической кривой. Иными словами, образ изучаемой комплексной кривой при отображении

$$\text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (X, Y) \mapsto (\log_t |X|, \log_t |Y|),$$

лежит в узкой окрестности тропической кривой, и размер этой окрестности стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. По построению, предельная тропическая кривая проходит через точки $p_i = \text{Log}_t P_i$, однако какая именно тропическая кривая получается в пределе, зависит от выбора комплексной кривой.

Детальный анализ этой ситуации, который мы опускаем, поскольку он достаточно сложен и техничен, позволяет определить, какому вырождению тропической кривой соответствует условие нодальности комплексных кривых, а также каково количество комплексных кривых построенного семейства, сходящихся к каждой из возможных тропических кривых.

Определение. *Нодальной тропической кривой* называется тропическая кривая, удовлетворяющая следующим условиям.

- 1) Кривая имеет только вершины валентности три и четыре, причём в четырёхвалентных вершинах противоположные рёбра имеют одинаковое направление (как у трансверсального пересечения двух отрезков прямых).
- 2) Все бесконечные рёбра имеют кратность 1.

Числом виртуальных двойных точек $n(\Gamma)$ нодальной тропической кривой Γ называется сумма числа её четырёхвалентных вершин и числа «отсутствующих областей», то есть пар индексов (i, j) диаграммы Ньютона, которым не соответствует ни одна область дополнения к тропической кривой. Число отсутствующих областей можно вычислить также как разницу «ожидаемого» числа ограниченных областей, равного числу внутренних целых точек диаграммы Ньютона, то есть $(d-1)(d-2)/2$, и реального числа ограниченных областей дополнения тропической кривой.

Кратностью μ трёхвалентной вершины тропической кривой называется площадь параллелограмма, натянутого на любые два из трёх векторов v_1, v_2, v_3 , участвующих в условии сбалансированности вершины из леммы на с. 11. Равенство площадей всех трёх параллелограммов вытекает из условия сбалансированности $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Кратностью $m(\Gamma)$ нодальной тропической кривой называется произведение кратностей всех её трёхвалентных вершин.

На двойственном языке диаграмм Ньютона нодальность тропической кривой означает, что в соответствующем ей разбиении треугольника Δ участвуют только треугольники и параллелограммы, причём все граничные целочисленные точки треугольника Δ участвуют в разбиении. Число $n(\Gamma)$ равно сумме числа параллелограммов и числа (внутренних) целых точек в Δ , не являющихся вершинами разбиения; $m(\Gamma)$ равно произведению удвоенных площадей всех треугольников разбиения.

Каждое из двух вырождений, участвующих в определении виртуального числа двойных точек, является условием вещественной коразмерности 1. Поэтому нодальные тропические кривые степени d с n виртуальными двойными точками образуют открытую многогранную область в вещественном векторном пространстве вещественной размерности

$$c(d, n) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n - 1.$$

Отсюда следует, что для общего выбора $c(d, n)$ точек на тропической плоскости существует лишь конечное число проходящих через них нодальных тропических прямых Γ степени d , таких что $n(\Gamma) = n$.

Зафиксируем $c(d, n)$ точек (x_i, y_i) общего положения на тропической плоскости, а также соответствующий набор фаз (φ_i, ψ_i) . Рассмотрим семейство N_d^n комплексных кривых, проходящих через точки $(\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i})$ комплексной плоскости и зависящих от вещественного параметра $t \gg 0$.

Теорема соответствия Г. Михалкина. Образ при отображении Log_t каждой из N_d^n комплексных кривых, проходящих через точки $(\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i})$, стремится к одной из нодальных тропических кривых, проходящих через точки (x_i, y_i) тропической плоскости. Предельная тропическая кривая имеет n виртуальных двойных точек, и число комплексных кривых семейства, аппроксимирующих данную тропическую кривую, равно её кратности.

Следствие. Количество нодальных тропических кривых степени d , имеющих n виртуальных двойных точек, проходящих через $c(d, n)$ точек общего положения на тропической плоскости и подсчитанных с учётом кратностей, не зависит от выбора этих точек (при условии, что они общего положения), и равно N_d^n .

Для первого утверждения следствия можно привести прямое комбинаторное доказательство, не использующее привлечения средств комплексной геометрии. Нужно перечислить все возможные перестройки наборов тропических кривых при движении отмеченных точек и убедиться, что при каждой из возможных перестроек скачок инварианта равен нулю. Это утверждение вовсе не очевидно, как показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим изображённый на левой части рисунка 8 фрагмент тропической кривой, проходящей через заданные отмеченные точки. При движении навстречу друг другу нижних двух

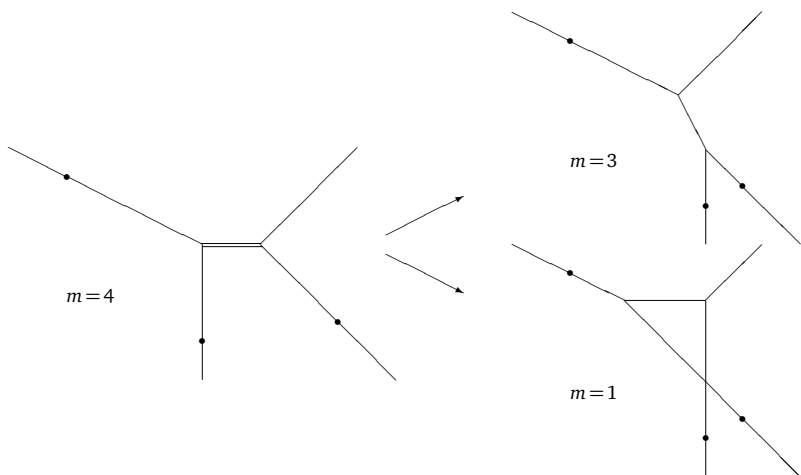


Рис. 8. Перестройка тропической нодальной кривой

отмеченных точек двойной отрезок тропической кривой укорачивается, и в некоторый момент происходит перестройка. После перестройки конфигурации отмеченных точек соответствуют два возможных фрагмента нодальных кривых, изображённые в правой части рисунка. Отметим, что на одной из кривых, появившихся после перестройки, появляется новая двойная точка, что компенсируется возникновением новой ограниченной области. Кратность кривой до перестройки равна четырём, а кратности двух кривых, появившихся в результате перестройки, равны трём и одному соответственно.

Задача. Выберите каким-нибудь способом $s(3, 1) = 8$ точек на тропической плоскости и постарайтесь перечислить все проходящие через них тропические кривые степени 3 с одной виртуальной двойной точкой. Чему равно значение инварианта N_3^1 ? (Ответ см. на с. 27.)

Имеется ещё одна полезная интерпретация теоремы о тропическом вырождении. Положим $M = S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ и рассмотрим изоморфизм $M \simeq (\mathbb{C}^*)^2$, задаваемый равенствами $X = \varphi t^x$, $Y = \psi t^y$, где $(\varphi, \psi) \in S^1 \times S^1$ и $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. При этом изоморфизме прообразы в M точек, через которые проводятся кривые, не зависят от t . Кроме того, при этом изоморфизме отображению Log_t соответствует проекция пространства M на сомножитель $\mathbb{R}^2$ (в частности, эта проекция

также не зависит от t). Поэтому можно считать, что мы проводим комплексные кривые через фиксированный набор точек пространства M . Ни пространство, ни положение точек не зависят от t , а зависит от t только лишь комплексная структура на этом пространстве, то есть способ, которым мы его отождествляем с $(\mathbb{C}^*)^2$. Всякая комплексная кривая является вещественно двумерной поверхностью, и условие на поверхность являться комплексной существенно зависит от выбора комплексной структуры. Таким образом, тропическую кривую можно рассматривать также как предел семейства комплексных кривых при вырождении комплексной структуры.

§ 7. Род нодальной кривой

Предположим, что комплексная нодальная кривая неприводима, имеет степень d и содержит n двойных точек. Рассмотрим её замыкание на комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$, получаемое добавлением d точек «на бесконечности». После этого, «разъединив» ветви кривой в двойных точках, мы получим уже гладкую компактную комплексную кривую, то есть гладкую вещественную ориентированную поверхность, иными словами, сферу с ручками. Род g этой поверхности, то есть число ручек, вычисляется по **формуле Римана—Гурвица**:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n.$$

В силу формулы Римана—Гурвица, вместо числа двойных точек кривой степени d , можно фиксировать её род. Подчёркивая зависимость числа нодальных кривых от рода, полезно использовать обозначение

$$\bar{N}_{g,d} = \bar{N}_d^{(d-1)(d-2)/2-g}.$$

Размерность пространства неприводимых нодальных кривых рода g и степени d равна

$$c(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g) = 3d - 1 + g.$$

Иными словами, $\bar{N}_{g,d}$ — это количество неприводимых кривых рода g и степени d , проходящих через фиксированный набор из $3d - 1 + g$ точек общего положения на комплексной плоскости.

Род неотрицателен, в частности, $\bar{N}_d^n = 0$ при $n > \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ (см. таблицы в конце параграфа 5).

Если кривая степени d с n двойными точками приводима и имеет компоненты родов $g_1, \dots, g_k$, то из сравнения эйлеровых характеристик вытекает соотношение

$$\sum_{i=1}^k (g_i - 1) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 - n.$$

При тропическом вырождении род нодальных кривых семейства восстанавливается по их тропическому пределу. Пусть Γ — неприводимая нодальная тропическая кривая. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ граф, получающийся «разведением» прямолинейных ветвей тропической кривой Γ в четырёхвалентных вершинах. Мы рассматриваем $\tilde{\Gamma}$ как абстрактный граф, у которого имеются лишь трёхвалентные вершины (соответствующие трёхвалентным вершинам кривой Γ) и одновалентные (соответствующие бесконечным рёбрам кривой Γ). Назовём родом тропической кривой Γ «первое число Бетти», или «количество независимых циклов» графа $\tilde{\Gamma}$, вычисляемое как

$$g(\Gamma) = 1 - \chi(\tilde{\Gamma}) = P(\tilde{\Gamma}) - B(\tilde{\Gamma}) + 1,$$

где $P(\tilde{\Gamma})$ и $B(\tilde{\Gamma})$ — числа его рёбер и вершин соответственно и $\chi(\tilde{\Gamma}) = B(\tilde{\Gamma}) - P(\tilde{\Gamma})$ — его эйлерова характеристика. В частности, род дерева равен нулю, род графа с одним циклом равен одному, и т. д.

Предложение. При тропическом вырождении семейства неприводимых нодальных кривых из теоремы соответствия Михалкина род вырождаемых комплексных кривых равен роду предельной тропической кривой.

Доказательство вытекает из сравнения эйлеровых характеристик: обозначим через n_+ и n_0 количество четырёхвалентных вершин нодальной тропической кривой Γ и число «отсутствующих областей», участвующих в определении числа её виртуальных двойных точек $n = n_+ + n_0$. Обозначим также через $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \infty$ замыкание графа Γ на сфере $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{\Gamma}) &= \chi(\Gamma) + n_+ = \chi(\bar{\Gamma}) + 3d - 1 + n_+ = \\ &= 2 - \chi(S^2 \setminus \bar{\Gamma}) + 3d - 1 + n_+ = \\ &= 2 - \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - n_0 \right) + 3d - 1 + n_+ = \\ &= 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n_+ + n_0 = 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = 1 - g, \end{aligned}$$

что и доказывает предложение.

Если при тропическом вырождении комплексные кривые семейства приводимы, то и предельная тропическая кривая Γ приводима, причём род каждой компоненты комплексной кривой семейства равен роду соответствующей компоненты предельной тропической кривой.

§ 8. Перечисление тропических кривых

Теорема Михалкина сводит задачу вычисления чисел N_d^n к перечислению нодальных тропических кривых, проходящих через заданные точки тропической плоскости. Последняя задача, хотя и является комбинаторной и элементарной, всё же требует решения. Ряд приёмов, сформулированных в этом параграфе, позволяет полностью алгоритмизировать вычисление инвариантов N_d^n .

Поскольку число N_d^n не зависит от положения точек на тропической плоскости, мы можем упростить подсчёт числа тропических кривых путём выбора специального расположения точек. А именно, следуя идее Михалкина и Бругалле, предположим, что все $c(d, n)$ точек лежат на одной «почти вертикальной» прямой, имеющей большой положительный наклон. Кроме того, для простоты мы будем перечислять *неприводимые* тропические кривые, род g которых связан с числом n виртуальных двойных точек посредством обсуждавшейся выше формулы Римана—Гурвица $g + n = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Пусть Γ — одна из тропических кривых рода g , проходящих через указанный набор точек в количестве $c(d, n) = 3d + g - 1$. Как и в предыдущем пункте, обозначим через $\tilde{\Gamma}$ граф, получаемый из Γ разведением его ветвей в четырёхвалентных точках.

Определение. Назовём «лифтами» вертикальные рёбра графа $\tilde{\Gamma}$, а содержащиеся в нём компоненты дополнения к множеству лифтов — «этажами».

Продумывание деталей доказательства следующего утверждения мы оставляем читателю.

Лемма. При указанном положении $3d + g - 1$ точек на тропической плоскости конфигурация этажей и лифтов обладает следующими свойствами.

1. Имеется ровно d этажей. Каждый этаж — это бесконечная ломаная без вертикальных рёбер, начинающаяся с бесконечного ребра, идущего влево, и заканчивающаяся бесконечным ребром, идущим

вправо вверх под углом в 45° . Все рёбра тропической кривой Γ , входящие в этажи, однократны.

2. На каждом этаже и на каждом лифте имеется ровно по одной отмеченной точке. Таким образом, из $3d + g - 1$ отмеченных точек d точек лежат на этажах, d точек лежат на бесконечных лифтах, и оставшиеся лежат на лифтах конечной длины, количество которых равно $d + g - 1$.

3. На каждом этаже все лифты, соединяющие этот этаж с более низкими, расположены левее лифтов, соединяющих этот этаж с более высокими.

Условие того, что наклон прямой, на которой лежат точки, достаточно высокий, формально записывается в виде следующего неравенства на координаты (x_i, y_j) точек:

$$\min_{i \neq j} |y_i - y_j| > (d^3 + d) \max_{k, \ell} |x_k - x_\ell|.$$

В отличие от рёбер, входящих в этажи, лифты на тропической кривой могут иметь кратности. При движении вдоль этажа слева направо наклон его рёбер меняется в точках крепления лифтов. При этом из условия сбалансированности для тропических кривых вытекает, что в точке крепления лифта, идущего вниз, наклон ребра этажа увеличивается на величину, равную кратности лифта (под наклоном подразумевается тангенс угла наклона, то есть коэффициент k в уравнении $y = kx + b$ прямой, содержащей ребро). Аналогично при прохождении вдоль этажа точки крепления лифта, идущего вверх, наклон ребра этажа уменьшается на величину, равную кратности лифта. Таким образом, при прохождении каждого этажа слева направо наклон его рёбер вначале монотонно увеличивается (в местах крепления лифтов, идущих вниз), а затем монотонно убывает (в местах крепления лифтов, идущих вверх). Поскольку начальный наклон рёбер на всяком этаже равен нулю (у идущего влево бесконечного горизонтального ребра), а конечный равен одному (у бесконечного наклонного идущего вправо вверх ребра), то для каждого этажа выполняется следующее равенство:

сумма кратностей всех лифтов, выходящих вниз с каждого этажа, ровно на один больше суммы кратностей всех лифтов, выходящих вверх с того же этажа.

Определение. Многоэтажной диаграммой рода g и степени d называется комбинаторный объект, представляющий из себя связ-

ный граф с $d + 1$ вершинами, $2d + g - 1$ рёбрами и дополнительной структурой, описанной ниже.

1. На множестве вершин задан линейный порядок. Минимальная относительно этого порядка вершина называется «бесконечной», а остальные d вершин — «конечными».

Введённый порядок на множестве вершин мы будем называть *высотой*: при графическом изображении многоэтажной диаграммы мы располагаем большую относительно введённого порядка вершину выше. При этом бесконечная вершина считается самой низкой и не изображается вовсе.

2. $d + g - 1$ рёбер соединяют пары различных конечных вершин (мы называем такие рёбра конечными), а оставшиеся d — одну из конечных вершин с бесконечной (мы называем такие рёбра бесконечными). Всякую пару вершин может соединять несколько рёбер, однако петли не допускаются.

3. Каждому ребру предписана его кратность (целое положительное число). Кратность бесконечных рёбер всегда равна одному.

4. Для каждой конечной вершины диаграммы должно выполняться следующее условие: суммарная кратность всех рёбер, соединяющих эту вершину с более низкими, *ровно на один больше* суммарной кратности всех рёбер, соединяющих эту вершину с более высокими.

Всякой тропической кривой из леммы на с. 22 сопоставляется её многоэтажная диаграмма: конечными вершинам этой диаграммы служат этажи, упорядоченные по высоте, а рёбра диаграммы — это лифты. Многоэтажная диаграмма определяет соответствующую ей тропическую кривую неоднозначно — нужно ещё указать относительную высоту отмеченных точек, через которые проходят этажи и лифты. Соответствующая комбинаторная информация содержится в дополнительном оснащении многоэтажной диаграммы, определяемом ниже, см. рис. 9.

Пусть задана многоэтажная диаграмма D . Расцепим каждое из её рёбер на два, добавив по одной новой вершине для каждого исходного ребра. Полученный набор вершин называется расширенным.

Определение. *Оснащением* называется такое продолжение полного порядка с исходного набора вершин многоэтажной диаграммы на расширенный, при котором всякая добавленная вершина распо-

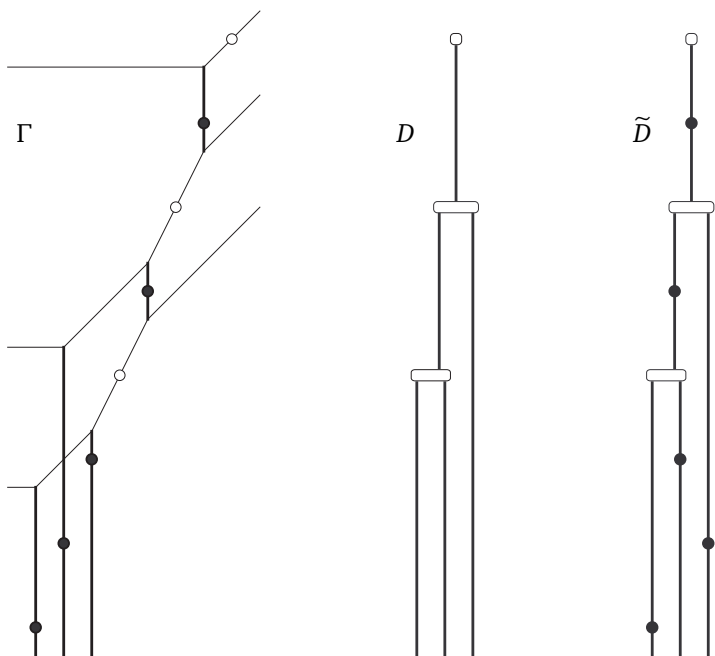


Рис. 9 Тропическая кривая Γ , отвечающая ей многоэтажная диаграмма D и её оснащение $\tilde{D}$

ложена по высоте между концами того ребра исходной диаграммы, которому принадлежит эта вершина.

Наконец, свяжем с каждой многоэтажной диаграммой D два числа:

- $\nu(D)$ — количество её возможных оснащений;
- $\mu(D) = \prod_e (w(e))^2$, произведение квадратов кратностей её рёбер.

Теорема. Предположим, что данные $3d - g + 1$ точек тропической плоскости лежат на одной прямой с большим наклоном. Тогда имеется взаимно однозначное соответствие между оснащёнными многоэтажными диаграммами и проходящими через эти точки тропическими кривыми рода g . При этом кратность тропической кривой равна кратности $\mu(D)$ соответствующей ей многоэтажной диаграммы и она не зависит от оснащения.

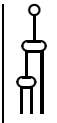
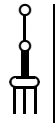
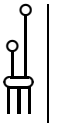
Следствие. Величина $\bar{N}_{g,d}$ может быть вычислена по формуле

$$\bar{N}_{g,d} = \sum_D v(D) \mu(D),$$

где суммирование проводится по всем различным многоэтажным диаграммам с d вершинами, имеющими род g .

Для доказательства теоремы нужно предъявить способ восстановления тропической кривой по оснащённой диаграмме. Рассмотрим вершину оснащённой многоэтажной диаграммы, отвечающую некоторому этажу. Примыкающие к ней рёбра упорядочены по высоте смежных вершин. Следовательно, количество и кратности этих рёбер однозначно определяют величину наклонов всех рёбер, входящих в данный этаж. Чтобы восстановить этаж полностью, нужно знать ещё координаты точек изломов. Абсциссы точек изломов равны абсциссам тех выделенных точек, которые лежат на примыкающих к этому этажу лифтах. Эти данные определяют этаж однозначно с точностью до параллельного сдвига вдоль вертикали. Эта свобода фиксируется ординатой отмеченной точки, которая должна принадлежать данному этажу. Таким образом, оснащённая многоэтажная диаграмма и положение отмеченных точек однозначно определяют каждый этаж тропической кривой, а следовательно, и саму тропическую кривую.

Пример. Существует ровно три возможные многоэтажные диаграммы рода 0 и степени 3. Эти диаграммы вместе с количествами их оснащений и кратностями приведены в следующей таблице.

D			
$v(D)$	5	1	3
$\mu(D)$	1	4	1

Двойной линией обозначается ребро кратности 2. Имея в виду некоторую графическую ассоциацию, некоторые авторы наряду с термином «многоэтажные диаграммы» используют также термин «марсиане». Отвечающие различным оснащениям этих диаграмм тропические кривые, проходящие через 8 точек плоскости, изображены на рис. 10. Первые пять из них соответствуют пяти возможным оснащениям первой многоэтажной диаграммы таблицы, сле-

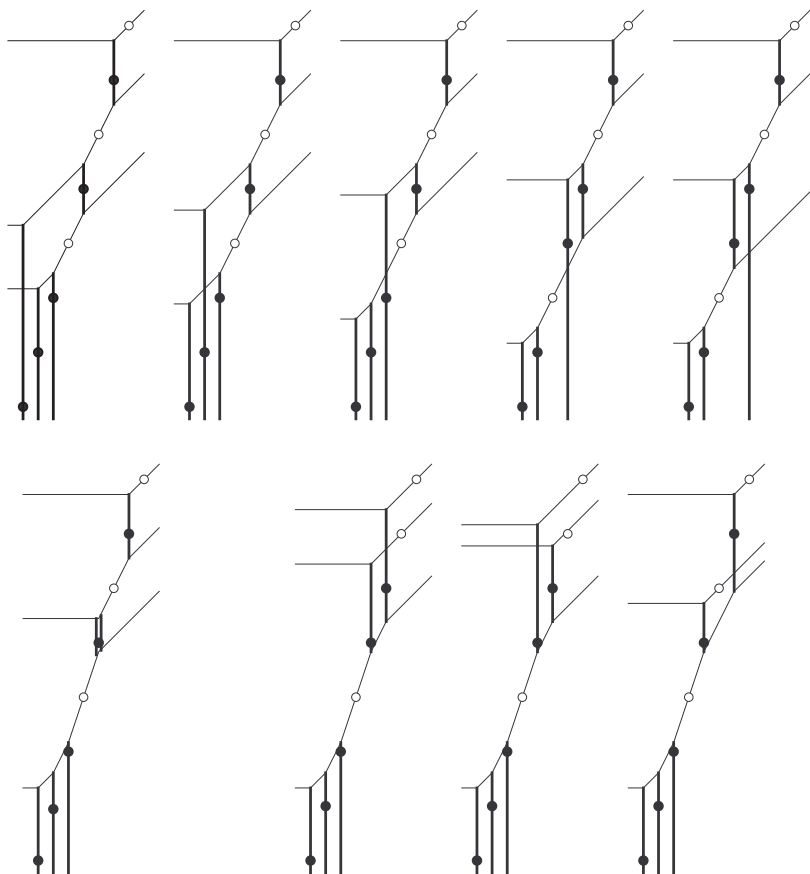


Рис. 10. Тропические кривые рода 0, проходящие через 8 точек

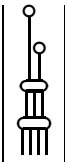
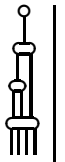
дующая тропическая кривая соответствует единственному возможному оснащению второй диаграммы таблицы, имеющей кратность $2^2 = 4$, и последние три кривые — оснащениям третьей диаграммы таблицы. Мы получаем, таким образом,

$$N_3^1 = \bar{N}_3^1 = \bar{N}_{0,3} = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 12.$$

Пример. В следующей таблице перечислены все возможные многоэтажные диаграммы (марсиане) степени 4 и рода 2, с указанием

их кратностей μ и количеств оснащений ν , что даёт подсчёт числа

$$N_4^1 = \bar{N}_4^1 = \bar{N}_{2,4} = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 27.$$

D					
$\nu(D)$	3	5	7	1	2
$\mu(D)$	1	1	1	4	4

§ 9. Вещественные алгебраические кривые и склейка Виро

Методы тропической геометрии позволяют исследовать также геометрию *вещественных* алгебраических кривых. Вещественная алгебраическая кривая степени d задаётся многочленом степени d от двух переменных с *вещественными* коэффициентами:

$$F(X, Y) = 0, \quad F(X, Y) = \sum_{i+j \leq d} A_{i,j} X^i Y^j.$$

Если коэффициенты общего положения, то получившаяся кривая является гладкой, то есть состоит из некоторого количества овалов, а также некоторого количества гладких ветвей, «уходящих на бесконечность». Ситуация несколько упростится, если рассмотреть замыкание нашей кривой на (вещественной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Тогда каждая из компонент замыкания является замкнутой (овалом). Например, гладкие кривые степени 2 — эллипсы, гиперболы и параболы — неразличимы на проективной плоскости и состоят из ровно одного овала. Возможные конфигурации овалов (их количество и взаимное расположение) является предметом изучения вещественной проективной алгебраической геометрии.

Согласно классической теореме Харнака, количество овалов вещественной алгебраической кривой степени d не превышает числа

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1.$$

Кривые с максимально возможным количеством овалов называются М-кривыми. При $d = 2, 3, 4, 5$ и 6 количество овалов на М-кривой равно, соответственно $1, 2, 4, 7$ и 11 .

Для кривой, заданной уравнением с некоторыми конкретными коэффициентами, определить расположение овалов не так-то просто (даже вооружившись современным компьютером). Задача сильно упрощается, если рассмотреть предельную кривую при тропическом вырождении. А именно, рассмотрим семейство кривых $C(t)$ зависящих от вещественного параметра $t > 0$ и предположим, что коэффициенты уравнения кривой $C(t)$ имеют асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ вида

$$A_{i,j}(t) \sim a_{i,j} t^{\alpha_{i,j}}$$

(например, мы можем просто положить $A_{i,j}(t) = a_{i,j} t^{\alpha_{i,j}}$, $a_{i,j} \neq 0$). Тогда имеет место следующее несложное наблюдение.

Предложение. *Количество овалов кривой $C(t)$ и их взаимное расположение при $t \gg 0$ однозначно определяется формой предельной тропической кривой (задаваемой показателями $\alpha_{i,j}$) и знаками коэффициентов $a_{i,j}$.*

Действительно, рассмотрим отдельно поведение кривой в каждом из четырёх квадрантов $X \geq 0, Y \geq 0$. Отображение $\text{Log}_t : (\mathbb{R}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(X, Y) \mapsto (\log_t |X|, \log_t |Y|)$ переводит каждый из квадрантов на тропическую плоскость взаимно однозначно. Выберем один из квадрантов и отождествим его с тропической плоскостью указанным отображением. Тропическая кривая, задаваемая тропическим многочленом

$$\ll \sum_{i+j \leq d} \alpha_{i,j} x^i y^j \gg = \max_{i+j \leq d} (i x + j y + \alpha_{i,j}),$$

разбивает тропическую плоскость на области. Внутри каждой области поведение многочлена $F(X, Y)$ определяется поведением одного из мономов $A_{i,j}(t) X^i Y^j$, и в зависимости от знака коэффициента $A_{i,j}$ (а также выбранного квадранта) многочлен F в данной области либо положителен, либо отрицателен. Закрасим каждую из областей дополнения к тропической кривой в один из двух цветов, в соответствии со знаком соответствующего этой области монома. Если две соседние области, граничащие вдоль некоторого ребра, окрашены в разные цвета, то по тереме о промежуточном значении вдоль этого ребра проходит ветвь нашей алгебраической кривой, на которой многочлен обращается в нуль. Если же обе соседние области окрашены в одинаковые цвета, то вблизи этого ребра нет вещественных точек кривой. Таким образом, для больших значений

параметра t кривая $C(t)$ (в выбранном квадранте) приближённо изображается набором некоторого количества явно перечисляемых рёбер тропической кривой.

Указанную процедуру построения кривой $C(t)$ удобно переформулировать на двойственном языке диаграмм Ньютона. Эта процедура, носящая название «patchworking» (склейка Виро), состоит в последовательном выполнении следующих шагов.

1) Выбираем произвольную триангуляцию диаграммы Ньютона Δ с вершинами в целых точках;

2) Расставляем в вершинах триангуляции знаки, $+$ или $-$, произвольным образом.

3) Отразив диаграмму Ньютона вместе с её триангуляцией последовательно относительно координатных осей, получаем триангуляцию квадрата $|i| + |j| \leq d$, называемого *расширенной диаграммой Ньютона*.

4) Продолжим расстановку знаков на вершины расширенной диаграммы Ньютона, используя следующее правило: знак вершины $(\varepsilon_1 i, \varepsilon_2 j)$ отличается от знака вершины (i, j) множителем $\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j$, где $\varepsilon_i = \pm 1$.

5) В каждом из треугольников построенной триангуляции расширенной диаграммы Ньютона соединим отрезком середины тех сторон, концы которых окрашены в разные цвета (если таковые имеются). Объединение всех построенных отрезков задаёт ломаную линию на расширенной диаграмме Ньютона. Эта линия и является комбинаторной моделью строящейся алгебраической кривой на *аффинной* плоскости $\mathbb{R}^2$.

6) отождествим между собой противоположные точки границы расширенной диаграммы Ньютона. Поверхность, полученная в результате такого отождествления, гомеоморфна проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, а образ построенной ломаной является комбинаторной моделью строящейся проективной кривой.

Пример. Возможные расположения овалов М-кривых при $d \leq 5$ были известны ещё в IX веке. При $d = 6$ для 11 овалов М-кривой возможны только лишь три конфигурации. А именно, имеется один овал, внутри которого расположены 1, 5, или 9 других овалов, а остальные 9, 5, или 1 овал соответственно расположены снаружи, причём области, ограниченные овалами, находящимися внутри или снаружи выделенного соответственно, не пересекаются, см. рис. 11.

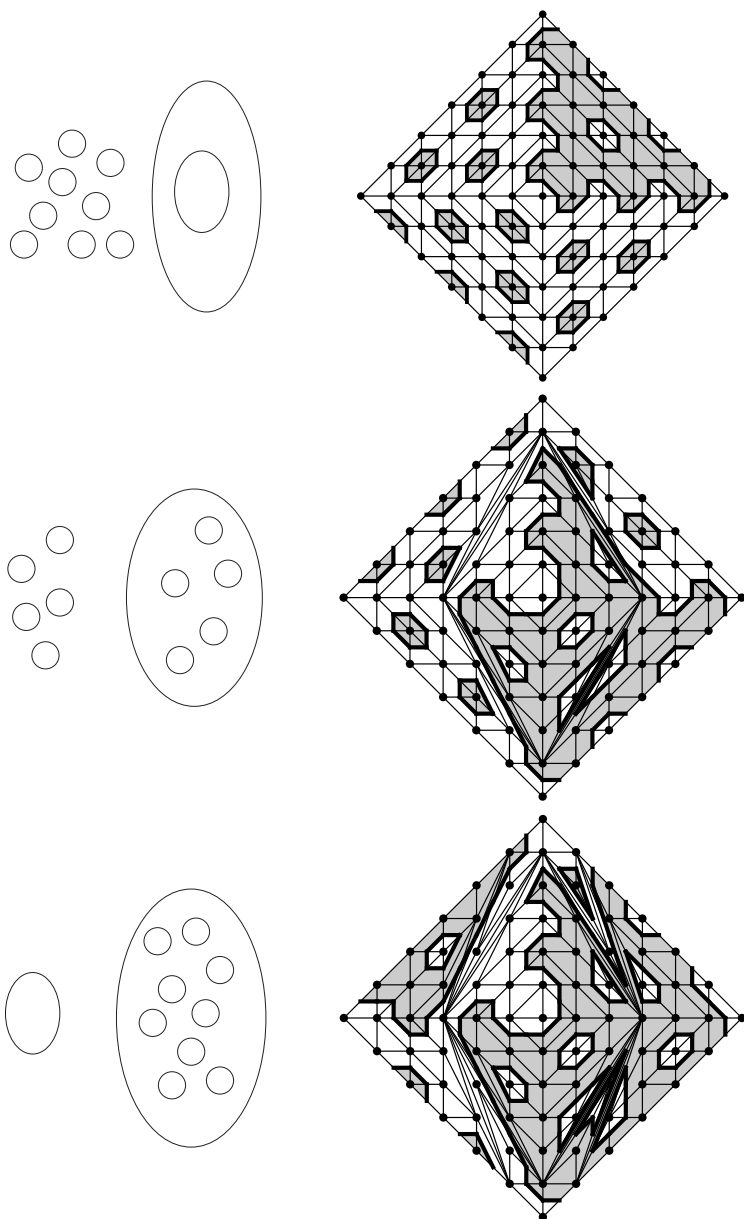


Рис. 11. Вещественные М-кривые степени 6

(Из двух областей, ограниченных выделенным овалом, одна гомеоморфна диску, а другая — ленте Мёбиуса. Мы считаем внутренней ту область, которая гомеоморфна диску.) Первую и последнюю конфигурации обнаружил ещё Гильберт. Он ошибочно полагал, что этим список возможных конфигураций исчерпывается. Ошибку Гильберта исправил Гудков в 1969 году, построив пример недостающей конфигурации и доказав несуществование других.

На рисунке 11 приведены примеры всех возможных кривых степени 6, построенных при помощи склейки Виро. Серым (соответственно белым) цветом выделены области дополнения кривой, содержащие положительные (соответственно отрицательные) вершины расширенной диаграммы Ньютона.

Большинство примеров реализуемых конфигураций кривых высоких степеней, известных к настоящему времени, построены методом Виро и его вариациями. В частности, Виро принадлежит полная классификация М-кривых степени 7. Относительно М-кривых степени 8 известно, что число возможных конфигураций не превышает 89. При этом из возможных случаев, не противоречащих ни одному из известных запретов, к настоящему времени построены примеры для 82 конфигураций овалов, а для оставшихся 7 конфигураций пока неизвестно, реализуемы они или нет.

§ 10. Перечисление вещественных нодальных кривых и инвариант Вельшенже

Задача перечисления нодальных кривых, рассмотренная в параграфе 5, имеет вещественный аналог. Пусть задан набор из

$$c(d, n) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n - 1$$

точек общего положения на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$. Требуется определить количество вещественных нодальных кривых степени d с n двойными точками, проходящих через заданные точки плоскости.

У постановки этой задачи имеются некоторые тонкости. В частности, само определение нодальности требует уточнения. Дело в том, что даже если сама кривая вещественна (задаётся уравнением с вещественными коэффициентами), то вовсе не обязательно, что все

её двойные точки вещественны. А именно, на вещественной нодальной кривой имеются двойные точки трёх типов:

- гиперболические: вещественные самопересечения, которые задаются в подходящих локальных координатах уравнением $xu = 0$ (такие точки мы как раз и видим на вещественной картинке);
- пары мнимых комплексно сопряжённых двойных точек (о наличии которых глядя на вещественную картинку мы можем только догадываться);
- эллиптические: двойные точки, которые сами вещественны, но обе проходящие через них ветви кривой не имеют вещественных точек. Точки этого типа задаются в подходящих локальных координатах уравнением $x^2 + y^2 = 0$. На вещественной картинке точки этого типа изолированы.

В непрерывном семействе вещественных нодальных кривых тип двойных точек может меняться.

Пример. Рассмотрим перестройку кривой в момент касания двух её ветвей (рис. 12). До момента перестройки на кривой имеется пара вещественных двойных точек. После перестройки также имеется пара двойных точек, но они комплексно сопряжены и на вещественной плоскости не видны.

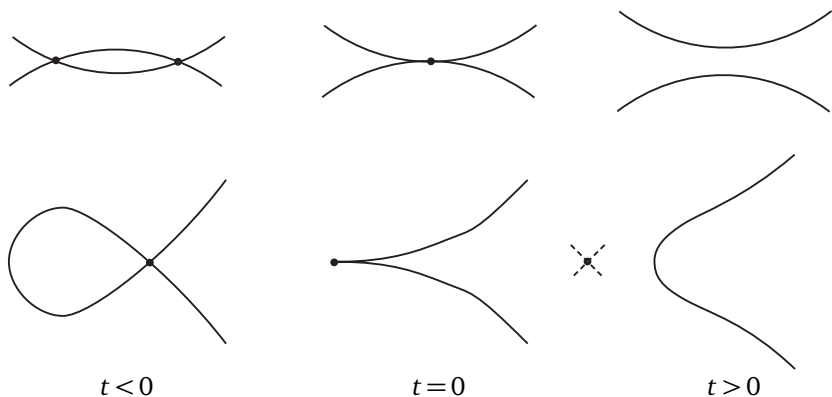


Рис. 12. Перестройки вещественной нодальной кривой

Пример. Рассмотрим семейство кривых $y^2 = f_t(x)$, где f_t — многочлен степени 3, имеющий простой корень в точке $x = -t$ и двукратный корень в начале координат: $f_t(x) = x^2(x + t)$. Каждая из

кривых этого семейства имеет точку самопересечения в начале координат, однако тип этой точки самопересечения меняется при изменении t : ветви кривой в особой точке вещественны при $t < 0$ и не имеют вещественных точек при $t > 0$, см. рис. 12.

Ещё одна сложность связана с тем, что количество вещественных нодальных кривых, проходящих через заданные точки плоскости, зависит от конфигурации этих точек: имеется всего $\bar{N}_d^n$ неприводимых комплексных кривых, из которых некоторые вещественны (могут быть заданы уравнением с вещественными коэффициентами), а остальные разбиваются на пары комплексно сопряжённых (уравнение одной кривой пары получается из уравнения другой комплексным сопряжением всех коэффициентов). Тем не менее, перечисление вещественных нодальных кривых даёт инвариант, если кривые учитывать с определённым весом, и если выполнено дополнительное ограничение.

Напомним (см. параграф 7), что род нодальной кривой равен $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n$. Кривые минимально возможного рода $g = 0$ называются *рациональными* (их можно задать параметрически рациональными функциями). У общих рациональных кривых степени d количество двойных точек равно $n = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ и размерность пространства их параметров равна

$$c\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2}\right) = 3d - 1.$$

Определение. *Весом вещественной рациональной кривой C называется число $(-1)^{e(C)}$, где $e(C)$ — количество двойных точек третьего (эллиптического) типа.*

Вельшенже принадлежит следующая теорема.

Теорема. *Сумма весов вещественных рациональных кривых степени d , проходящих через $3d - 1$ точек плоскости, не зависит от положения этих точек, при условии, что они общего положения.*

Число, участвующее в теореме, обозначается через W_d и называется *инвариантом Вельшенже*. Теорема доказывается перебором всех возможных перестроек, при которых количество вещественных рациональных кривых может меняться. При непрерывном изменении конфигурации точек плоскости вещественные рациональные кривые могут рождаться и умирать парами. При этом количества точек самопересечения эллиптического типа у кривых одной

пары имеют соседние значения, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Рассуждения, используемые в доказательстве теоремы, ничего не говорят о том, как этот инвариант вычислить. Даже тот факт, что он отличен от нуля, является вовсе не очевидным. Нетривиальность инварианта Вельшенже имеет важные следствия. Например, мы получаем автоматически, что вне зависимости от конфигурации точек на вещественной плоскости обязательно имеются проходящие через них рациональные кривые и их количество не меньше $|W_d|$.

Единственный, по-существу, имеющийся в настоящий момент способ, которым этот инвариант можно вычислить для конкретных значений d , состоит в применении тропической геометрии.

Выберем точки на вещественной плоскости в виде $P_i = (\pm t^{x_i}, \pm t^{y_i})$, так что при отображении Log_t они переходят в фиксированный набор точек $p_i = (x_i, y_i)$ тропической плоскости. Рассуждения параграфа 6 и 8 позволяют перечислить все тропические нодальные кривые, проходящие через точки p_i , а значит, и все комплексные рациональные кривые, проходящие через точки P_i для достаточно больших t . Далее, рассуждения параграфа 9 позволяют отобрать те из них, которые являются вещественными. Более того, для каждой такой кривой легко определить по конфигурации на расширенной диаграмме Ньютона, каковы типы всех её двойных точек, а значит, определить её вес и, тем самым, вычислить инвариант Вельшенже.

Собрав все рассуждения вместе, процедуру вычисления инварианта Вельшенже можно свести к следующему. Пусть имеется тропическая нодальная кривая Γ . Пусть её кратность (определённая в параграфе 6) равна $m(\Gamma)$.

Определение. Вещественной кратностью $m_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ тропической нодальной кривой Γ называется число

$$m_{\mathbb{R}}(\Gamma) = (-1)^{\frac{m(\Gamma)-1}{2}},$$

если $m(\Gamma)$ нечётно, и $m_{\mathbb{R}}(\Gamma) = 0$, если $m(\Gamma)$ чётно.

Теорема. Инвариант Вельшенже W_d равен количеству неприводимых нодальных тропических кривых степени d с числом

$$n = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

виртуальных двойных точек, проходящих через заданный набор из $s(d, n) = 3d - 1$ точек общего положения на тропической плоскости и посчитанных с учётом вещественных кратностей.

В терминах исчисления многоэтажных диаграмм параграфа 8 эта теорема приобретает следующую форму.

Следствие. *Инвариант Вельшанже вычисляется по формуле*

$$W_d = \sum_{\Gamma} v(G),$$

где суммирование производится по всем различным многоэтажным диаграммам рода 0 и степени d , не имеющих рёбер чётной кратности; $v(D)$ — количества оснащений таких диаграмм.

Пример. В параграфе 8 мы вычислили количество рациональных кубических комплексных кривых, проходящих через 8 точек на плоскости. Это число равно $\bar{N}_3^1 = 12$. Из трёх многоэтажных диаграмм степени 3 и рода 0, перечисленных в примере на с. 26, вклад в инвариант Вельшанже дают только первая и третья. Отсюда мы заключаем, что $W_3 = 5 + 3 = 8$.

Вот несколько известных значений инварианта Вельшенже для небольших d :

d	1	2	3	4	5
W_d	1	1	8	240	18264

В определении тропической версии инварианта Вельшенже нигде не используется условие рациональности. Более того, *сумма вещественных кратностей тропических кривых с n виртуальными двойными точками, проходящих через заданный набор $s(d, n)$ точек тропической плоскости, не зависит от положения этих точек* (при условии, что они общего положения). Это позволяет определить тропический инвариант Вельшенже $W_{d,n}^{\text{trop}}$ для произвольных d и n . Тропический инвариант Вельшенже совпадает с обычным в рациональном случае, то есть при

$$n = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

В общем же случае в настоящее время неизвестно, как продолжить этот инвариант на алгебраический случай перечисления вещественных нодальных алгебраических кривых. Во всяком случае, имеются контрпримеры, показывающие, что при наивном определении с использованием чётности числа эллиптических двойных точек это число не является инвариантом.

§ 11. Заключительные замечания

Одно из возможных обобщений задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, состоит в том, чтобы заменить треугольную диаграмму Ньютона на произвольный выпуклый многоугольник Δ с целочисленными вершинами на плоскости. С каждым таким многоугольником связано семейство кривых, задаваемых уравнениями

$$\sum_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} A_{i,j} X^i Y^j = 0. \quad (2)$$

Функции, задающие кривые, являются, вообще говоря, многочленами Лорана, поскольку показатели i или j могут быть отрицательными, если многоугольник содержит точки с отрицательными координатами. Поэтому кривые рассматриваются обычно как подмножества в $(\mathbb{C}^*)^2$. Геометрия и топология кривых этого семейства определяется формой диаграммы Ньютона Δ . Диаграмма Ньютона является своего рода обобщением понятия степени. Заметим, что всякий автоморфизм целочисленной решётки плоскости (параллельный перенос или линейное преобразование из группы $SL(2, \mathbb{Z})$) сводится к мономиальной замене в пространстве многочленов Лорана. Поэтому рассматриваются такие характеристики многоугольника Δ , которые инвариантны относительно автоморфизмов решётки.

Переход от треугольника к произвольному многоугольнику является не бесполезным усложнением, а насущной необходимостью. С каждым многоугольником связана своя комплексная поверхность (так называемая *торическая*), на которой область $(\mathbb{C}^*)^2$ образует открытое всюду плотное подмножество и на которую естественно продолжаются кривые семейства. Таким образом, переход к произвольным многоугольникам позволяет описать семейства алгебраических кривых на произвольных (торических) поверхностях. Например, треугольнику $i \geq 0, j \geq 0, i + j \leq d$ соответствует проективная плоскость, а прямоугольнику $0 \leq i \leq d_1, 0 \leq j \leq d_2$ — поверхность $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, поскольку кривые на произведении $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ двойной степени (d_1, d_2) задаются в аффинных координатах многочленами, имеющими степень d_1 по переменной X и степень d_2 по переменной Y . Многообразия $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ являются простейшими примерами торических поверхностей.

Пространство параметров семейства кривых (2) имеет размерность $\#\Delta - 1$, где $\#\Delta$ — количество целых точек в Δ . Соответствен-

но, кривые с n двойными точками образуют подпространство размерности

$$c(\Delta, n) = \#\Delta - n - 1.$$

Можно вычислить, что кривые с n двойными точками этого семейства имеют род

$$g = \#\Delta^\circ - n,$$

где $\#\Delta^\circ$ — количество внутренних целых точек диаграммы Δ , то есть не лежащих на её границе. Как и для случая кривых на проективной плоскости, можно поставить задачу вычисления количества N_Δ^n кривых семейства (2), имеющих n двойных точек и проходящих через заданные $c(\Delta, n)$ точек общего положения на комплексной плоскости, а также задачу определения и вычисления инварианта Вельшенже. Тропическая геометрия даёт универсальный способ решения этих задач.

Предположим, что коэффициенты многочлена левой части равенства (2) зависят от вещественного параметра $t > 0$ и имеют при больших t асимптотическое поведение вида $A_{i,j} \sim \text{const} \cdot t^{\alpha_{i,j}}$. Тогда предел такого семейства описывается тропической кривой, связанной с тропическим многочленом

$$\max_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} (ix + jy + \alpha_{i,j}).$$

Для этой кривой выполняется условие рациональности наклона рёбер и условие сбалансированности в вершинах. Единственное отличие от случая, рассмотренного в предыдущих параграфах, состоит в направлении бесконечных рёбер. А именно, эти направления определяются направлением граничных отрезков диаграммы Ньютона.

Описанный выше способ решения задач перечисления нодальных кривых почти дословно переносится на случай кривых, связанных с произвольным многоугольником Δ . Определение количества виртуальных двойных точек, перечисление тропических кривых, проходящих через заданные точки тропической плоскости, определения вещественной и комплексной кратности — всё это без изменения переносится на случай произвольного выпуклого многоугольника Δ . С подходящими модификациями, исчисление многоэтажных диаграмм также переносится на случай произвольного многоугольника Ньютона.

Пример. Пусть Δ — прямоугольник со сторонами длин d_1 и d_2 . Тропические кривые, отвечающие «почти вертикальному» расположению точек на тропической плоскости, кодируются аналогично случаю проективной плоскости многоэтажными диаграммами с d_1 конечными вершинами, соответствующими d_1 этажам тропической кривой. Имеется, однако, два существенных отличия:

1) Суммарная кратность рёбер многоэтажной диаграммы, выходящих из конечной вершины и направленных вниз, *равна* суммарной кратности рёбер, выходящих из этой вершины и направленных вверх.

2) У многоэтажной диаграммы, помимо некоторого количества конечных рёбер, имеется d_2 бесконечных рёбер, направленных вниз, и ещё d_2 бесконечных рёбер, направленных вверх.

В следующих таблицах перечислены все марсиане (многоэтажные диаграммы) рода 1 и бистепеней (2, 3) и (3, 2) соответственно вместе с количествами их оснащений и кратностями.

$\Delta =$


D			
	$v(D)$	6	6
	$\mu(D)$	1	4

$\Delta =$


D					
	$v(D)$	4	4	1	1
	$\mu(D)$	1	1	4	4

$$\bar{N}_{\Delta,1} = \bar{N}_{\Delta}^1 = 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 20.$$

Оба вычисления дают один и тот же ответ 20 для числа комплексных неприводимых кривых рода 1 и бистепени (2, 3) на $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, проходящих через 10 заданных точек общего положения.

Задача. Изобразите на тропической плоскости тропические кривые, соответствующие различным оснащениям многоэтажных диаграмм из приведённых выше таблиц.

Рассмотренные нами конструкции тропической геометрии имеют многочисленные обобщения, активно развиваемые в настоящее

время. В частности, существует тропическая геометрия старших размерностей. При этом увеличиваться может как размерность объёмлющего пространства (кривые в многомерном пространстве), так и размерность самих тропических многообразий. Многие понятия классической алгебраической геометрии (такие, например, как теория пересечений, исследование пространств модулей) имеют свои тропические аналоги. Тропические версии всех этих понятий являются элементарными и несомненно более простыми, чем их комплексные оригиналы (если игнорировать появляющиеся комбинаторные сложности). Бытует даже мнение (которое я лично не разделяю), что с появлением методов тропической геометрии необходимость в большой части комплексной геометрии отпала и она должна быть просто выброшена на свалку истории. Как бы то ни было, появление тропической геометрии является одним из самых ярких открытий недавнего времени, и несомненно, оно существенно отразится на всём развитии математики в будущем.

В заключение приведём несколько ссылок для дальнейшего ознакомления. Тропическая геометрия — наука молодая; большинство её статей написано на английском языке и доступно только в виде препринтов. Общее представление о ней можно получить по обзору [1]. Тропический метод для подсчёта чисел нодальных кривых был разработан Г. Михалкиным. Наиболее полное изложение этого метода содержится в [2]. Статьи [3], [4] и [5] содержат дальнейшие усовершенствования метода. Представление о вещественной алгебраической геометрии и склейке Виро можно получить по популярным запискам лекций О. Я. Виро, размещённых на его странице Интернета, [6] и [7]. Инвариант Вельшенже был введён в [8]. Вычислению этого инварианта при помощи тропической геометрии посвящены статьи [9] и [10].

Литература

1. *Itenberg I., Mikhalkin G., Shustin E.* Tropical Algebraic Geometry. Preprint.
2. *Mikhalkin G.* Enumerative Tropical Algebraic Geometry in $\mathbb{R}^2$ // J. Amer. Math Soc. 2005. Vol. 18. P. 313—377. Preprint. arXiv:math.AG/0312530.
3. *Brugallé E., Mikhalkin G.* Floor decompositions of tropical curves: the planar case // Proceedings of the 15th Gökova geometry-topology conference 2008. Cambridge, MA: International Press, 2009. P. 64—90. Preprint. arXiv:0812.3354.

4. *Gahtmann A. Markwig H.* The numbers of tropical plane curves through points in general position // *J. reine angew. Math.* 2007. Vol. 602. P. 155—177. Preprint. [arXiv:math.AG/0504390](https://arxiv.org/abs/math/0504390).
5. *Gahtmann A. Markwig H.* The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov—Witten invariants // *Math. Ann.* 2007. Vol. 338, № 4. P. 845—868. Preprint. [arXiv:math.AG/0504392](https://arxiv.org/abs/math/0504392).
6. *Viro O. Ya.* Introduction into Topology of Real Algebraic Varieties.
<http://www.math.uu.se/~oleg/es/index.html>.
7. *Viro O. Ya.* Patchworking Real Algebraic varieties.
<http://www.math.uu.se/~oleg/pw.pdf>.
8. *Welschinger J.-Y.* Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry // *Invent. Math.* 2005. Vol. 162. P. 195—234. [arXiv:math.AG/0303145](https://arxiv.org/abs/math/0303145).
9. *Итенберг И. В., Харламов В. М., Шустин Е. И.* Логарифмическая эквивалентность инвариантов Вельшенже и Громова—Виттена // *УМН.* 2004. Т. 59, № 6. С. 85—110.
10. *Itenberg I., Kharlamov V., Shustin E.* A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces. Preprint. [arXiv:math.AG/0608549](https://arxiv.org/abs/math/0608549).

Оглавление

Введение	3
§ 1. Тропическая прямая	4
§ 2. Тропическое полуполе	7
§ 3. Тропические многочлены и тропические кривые	8
§ 4. Диаграмма Ньютона и её разбиение	12
§ 5. Задача перечисления плоских алгебраических кривых . . .	14
§ 6. Тропическое вырождение комплексных кривых	16
§ 7. Род нодальной кривой	20
§ 8. Перечисление тропических кривых	22
§ 9. Вещественные алгебраические кривые и склейка Виро . .	28
§ 10. Перечисление вещественных нодальных кривых и инвариант Вельшенже	32
§ 11. Заключительные замечания	37