А. Б. Скопенков

Объемлемая однородность

МЦНМО

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2009

А. Б. Скопенков

Объемлемая однородность

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 515.1
ББК 22.152
С44

Скопенков А. Б.
Объемлемая однородность
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
27 с.
ISBN 978-5-4439-2039-9

Брошюра написана по материалам миникурса в летней школе «Современная математика» в Дубне в 2009 г. и доклада на семинаре по геометрии им. И. Ф. Шарыгина в 2010 г.

Понятие объемлемой однородности возникает из простых «физических» вопросов. Введение доступно школьнику (кроме его последнего пункта, где требуется понятие непрерывного отображения между подмножествами плоскости). Далее практически «школьными» методами мы получим характеризацию объемлемо однородных подмножеств плоскости. В этой части уже необходимо знакомство с открытыми и замкнутыми множествами на прямой и плоскости. Затем выясняется, что понятие объемлемой однородности связано со многими важными теориями и результатами — теорией динамических систем, многообразий и групп Ли, пятой проблемой Гильберта и проблемой Гильберта–Смита. Приложение доступно студенту, знакомому с этими понятиями.

Брошюра адресована широкому кругу людей, интересующихся математикой. Она может быть интересным «легким чтением» для профессиональных математиков.

Подготовлено на основе книги: *А. Б. Скопенков*. Объемлемая однородность. — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2039-9

Посвящается памяти В. И. Арнольда

Советы читателю

Начать читать брошюру разумно с введения. Его три пункта практически независимы друг от друга, и их можно читать в произвольном порядке. Впрочем, они расположены в порядке возрастания сложности. В дальнейшем из введения используется только пункт 1.2.

Оставшиеся параграфы практически независимы друг от друга, и их можно читать в произвольном порядке. Впрочем, они расположены в порядке возрастания сложности.

Основное содержание брошюры — утверждение 2 из пункта 1.2, его доказательство в § 3 и его обобщения в параграфах 4 и 5.

В брошюре много задач, обозначаемых жирными цифрами. Большинство задач несложны. При этом, если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать. Формулировки задач нужно прочитать — это поможет вам понять текст, даже если вы не сможете решить задачи. Если некоторые встречающиеся, но не определенные понятия вам незнакомы, то можно или игнорировать соответствующую задачу, или узнать определение (у преподавателя, в wikipedia, в книгах...). Двумя звездочками отмечены задачи, решение которых мне неизвестно.

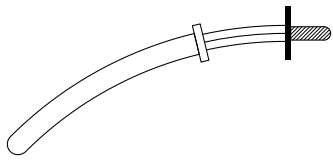
Обновляемая версия поддерживается на http://arxiv.org/abs/1003.5278.

Благодарности

Автор благодарен В. Клепцыну, Г. Мерзону и А. Сосинскому за полезные замечания и обсуждения. Автор был поддержан грантом фонда Саймонса.

§ 1. Введение

1.1. Изометрическая объемлемая однородность



Какой формы могут быть ножны, чтобы из них можно было вытащить саблю? Переформулируя этот вопрос на математическом языке, мы приходим к следующему определению.

Определение. Подмножество N пространства $\mathbb{R}^m$ (в частности, плоскости $\mathbb{R}^2$ или трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$) называется *изометрически объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует движение (т. е. изометрия) пространства, переводящее x в y, а N в себя.

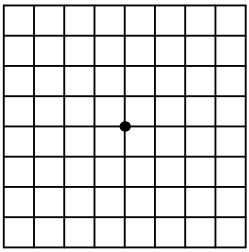


Рис. 1. Решетка

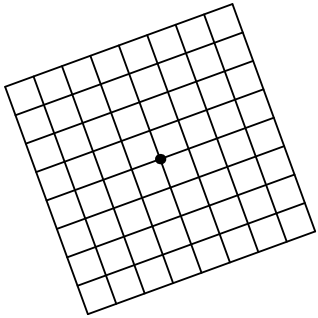


Рис. 2. Образ решетки при движении

Напомним, что движением (т. е. изометрией) называется преобразование, сохраняющее расстояния, см. рис. 1 и 2.

Отметим, что в этом определении не требуется непрерывной зависимости движения от x и y. Хотя её и было бы естественно потребовать, исходя из исходной «физической» задачи.

1. Следующие подмножества изометрически объемлемо однородны:

(a) пара точек на плоскости;

(b) вершины правильного многоугольника на плоскости;

(c) целочисленная решетка (т. е. множество точек, все координаты которых целые) на плоскости;

(d) окружность $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ на плоскости;

(e) сфера $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ в трехмерном пространстве (рис. 3);

(f) винтовая линия в трехмерном пространстве (рис. 4), т. е. линия, заданная параметрическим уравнением $r(t) = (t, \cos t, \sin t)$;[1]

(g) объединение двух окружностей в трехмерном пространстве, ограничивающих основания прямого кругового цилиндра (т. е. двух окружностей, одна из которых получена из другой параллельным переносом на вектор, перпендикулярный их плоскостям), см. рис. 6;

(h) тор в $\mathbb{R}^4$ (рис. 5), являющийся произведением двух окружностей (или, что то же самое, заданный параметрическим уравнением $r(s, t) = (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$).

Все эти примеры могут быть тривиально обобщены на высшие размерности. Действительно, легко сообразить, что если плоское изометриче-

[1] По такой кривой движется электрон в постоянном магнитном поле, если напряженность H является постоянным вектором и начальная скорость электрона не параллельна и не перпендикулярна напряженности. Это можно доказать, используя закон Био—Савара—Лапласа движения электрона, утверждающий, что $\ddot{\gamma} = \dot{\gamma} \times H$.

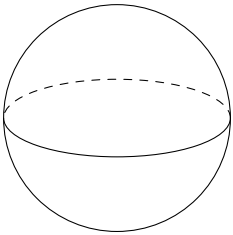


Рис. 3. Сфера

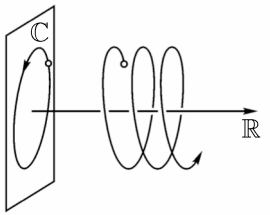


Рис. 4. Винтовая линия

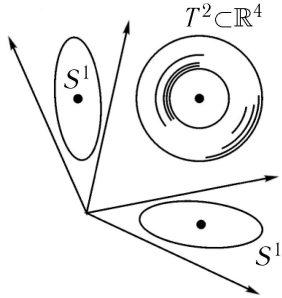


Рис. 5. Тор в $\mathbb{R}^4$

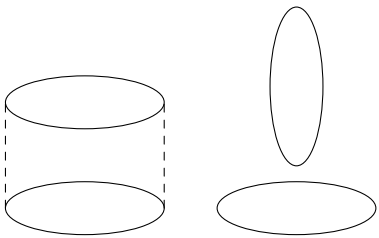


Рис. 6. Две пары окружностей: изометрически объемлемо однородная и нет

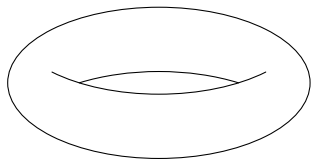


Рис. 7. Тор вращения в $\mathbb{R}^3$

ски объемлемо однородное подмножество рассмотреть как подмножество трехмерного пространства, то оно также будет изометрически объемлемо однородным.

2. Следующие подмножества не являются изометрически объемлемо однородными:

(a) множество вершин неравностороннего треугольника на плоскости;

(b) отрезок в $\mathbb{R}^1$ (указание: рассмотрите его крайнюю точку);

(c) объединение пересекающихся прямых (указание: рассмотрите точку их пересечения);

(d) парабола $y = x^2$ на плоскости;

(e) объединение двух окружностей в трехмерном пространстве, отличное от приведенного в предыдущей задаче (рис. 6);

(f) тор вращения в $\mathbb{R}^3$ (рис. 7; указание: у школьников может не получиться доказать это).

Сформулируем естественную гипотезу о характеризации изометрически объемлемо однородных подмножеств. Для этого нам понадобятся еще два определения.

Подмножество плоскости (или трехмерного пространства) называется *замкнутым*, если для любой точки его дополнения имеется круг (шар) положительного радиуса с центром в этой точке, пересечение которого с нашим подмножеством пусто.

Подмножество плоскости (или трехмерного пространства) называется *связным*, если на плоскости не существует двух непересекающихся замкнутых множеств, пересечение каждого из которых с нашим подмножеством непусто.

Гипотеза 1. (a) *Изометрически объемлемо однородное связное замкнутое подмножество плоскости является точкой, прямой, окружностью или всей плоскостью.*

(b) *Изометрически объемлемо однородное связное замкнутое подмножество трехмерного пространства является точкой, прямой, окружностью, винтовой линией, сферой, цилиндром или всем пространством.*

У этой гипотезы есть аналог и для $\mathbb{R}^m$.

Эту гипотезу можно легко доказать для подмножеств, являющихся дважды дифференцируемыми кривыми (их определение аналогично приведенному ниже перед теоремой 3) с использованием понятия *кривизны*. Общий случай можно попытаться доказать с использованием классификации движений (эту идею сообщил мне А. Ошемков). Идея неэлементарного доказательства приведена в § 5.

3. Подмножество N плоскости называется *переносно объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует параллельный перенос, переводящий x в y, а N в себя.

(a) Переносно объемлемо однородное замкнутое связное подмножество плоскости является точкой, прямой или всей плоскостью. (Эта задача является шагом к доказательству вышеприведенной гипотезы, поэтому интересно прямое доказательство, а не вывод из приведенной гипотезы.)

(b)** Верно ли, что переносно объемлемо однородное связное подмножество плоскости является точкой, прямой или всей плоскостью? (Например, может ли какая-нибудь «дикая» подгруппа плоскости по сложению, которая строится с помощью аксиомы выбора, быть связной?)

4. Определите *подобистическую объемлемую однородность* подмножеств плоскости.

(a) Приведите пример подобистически объемлемо однородного подмножества плоскости, не являющегося изометрически объемлемо однородным.

(b)** Попробуйте охарактеризовать связные замкнутые подобистически объемлемо однородные подмножества плоскости.

1.2. Аффинная объемлемая однородность

Какой формы может быть металлический кабель, чтобы из него можно было вытащить его «мягкую» сердцевину? Кабель деформировать нельзя (он жесткий), а провод можно деформировать плавно, но нельзя ломать. Математическая формулировка этого вопроса приводит к понятию *дифференцируемой* объемлемой однородности из § 4 «Обобщение на диффеоморфизмы». Мы сначала рассмотрим более простое понятие *аффинной* объемлемой однородности. Оно хуже отражает ситуацию, зато доступно школьнику и интересно с точки зрения математики. А самое главное, на примере его изучения в этой брошюре показана идея доказательства характеризации *дифференцируемо* объемлемо однородных подмножеств.

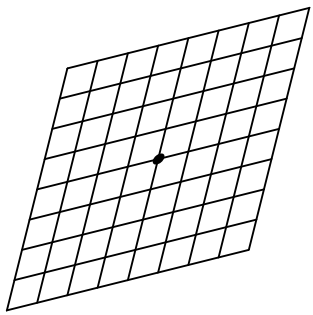


Рис. 8. Образ решетки при аффинном преобразовании

Определение. Подмножество N пространства $\mathbb{R}^m$ (в частности, плоскости $\mathbb{R}^2$ или трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$) называется *аффинно объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует аффинное преобразование $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, переводящее x в y, а N в себя.

Напомним, что *аффинным преобразованием* плоскости называется композиция движения, гомотетии и растяжения относительно прямой, см. рис. 1, 8 и 9. Здесь растяжение относительно прямой можно заменить на параллельную проекцию из одной копии нашей плоскости, находящейся в трехмерном пространстве, на другую. Подробнее см. [Pr].

Аффинное преобразование трехмерного пространства определяется более сложно; мы приведём здесь это определение, хотя до § 4 оно нам не понадобится. Пусть заданы точки O и O', а также две некомпланарные тройки векторов a, b, c и a', b', c'. Тогда *аффинным преобразова-*

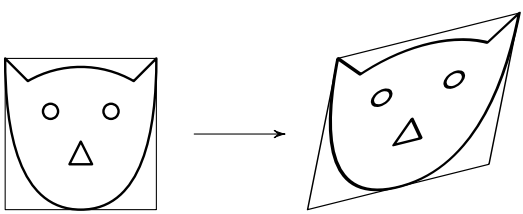


Рис. 9. Кошка и ее образ при аффинном преобразовании

нием трехмерного пространства, отвечающим O, a, b, c и O', a', b', c', называется преобразование, переводящее точку $O + xa + yb + zc$ в точку $O' + xa' + yb' + zc'$. Аналогично определяется аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^m$; такое определение для $m = 2$ равносильно вышеприведенному.

5. Следующие подмножества плоскости аффинно объемлемо однородны:

(a) любое изометрически объемлемо однородное подмножество;

(b) эллипс, заданный уравнением $x^2 + 2y^2 = 1$;

(c) парабола $y = x^2$;

(d) гипербола $y = 1/x$.

Подсказка: см. рис. 10.

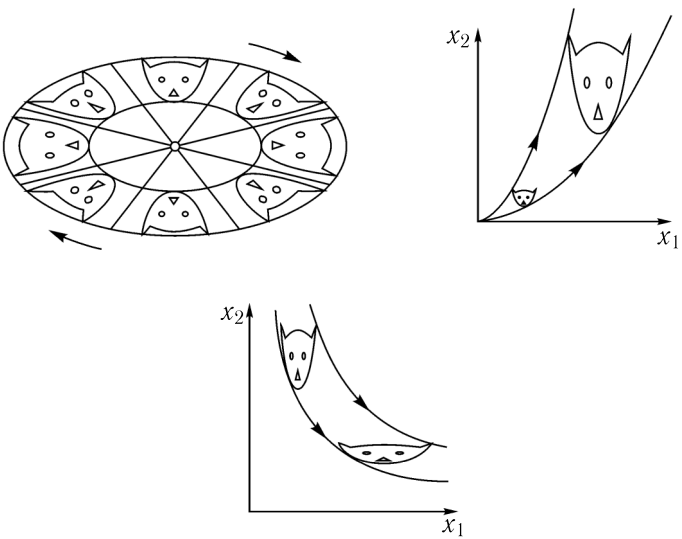


Рис. 10. Кошка и ее образы при эллиптическом, параболическом и гиперболическом поворотах

Какие еще бывают аффинно однородные подмножества плоскости?

6. (a) Не любое конечное множество на плоскости является аффинно объемлемо однородным.

(b)* Опишите конечные аффинно объемлемо однородные подмножества плоскости. (Ответ — аффинно правильные многоугольники. Полезно использовать, что аффинное преобразование сохраняет центр масс и «эллипс инерции».)

7. (a) График функции $y = |x|$ не является аффинно объемлемо однородным подмножеством плоскости.

(b) Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема хотя бы в одной точке и график f аффинно объемлемо однороден, то f дифференцируема в любой точке. (Если производная в точке равна плюс бесконечности или равна минус бесконечности, то мы считаем функцию дифференцируемой в этой точке.)

Но ведь есть и непрерывные функции, не дифференцируемые ни в одной точке. Например, *пила Вейерштрасса* $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(13^n \pi x)$, см. рис. 11. Такие примеры встречаются и в физике при изучении *броуновского движения*. Что тогда? Может ли непрерывная функция быть «одинаково не дифференцируемой» во всех точках, т. е. может ли её график быть аффинно объемлемо однороден? Оказывается, что нет.

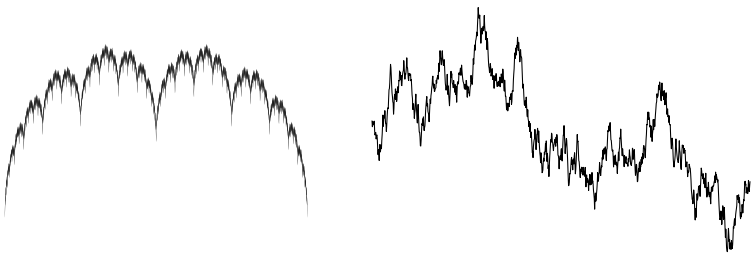


Рис. 11. Пила Вейерштрасса и броуновское движение

Утверждение 2. *Если график непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ аффинно объемлемо однороден, то эта функция дифференцируема в любой точке. Более того, ее производная непрерывна.*[1]

Читатель, которому остаток этого пункта и следующий покажутся слишком трудными, может сразу перейти к одному из двух следующих параграфов.

Утверждение 2 является частным случаем более общего факта, который мы сейчас сформулируем. Для этого нам понадобятся определение замкнутости (см. выше перед гипотезой 1) и следующее определение. *Непрерывно дифференцируемой кривой* на плоскости называется образ непрерывно дифференцируемого отображения $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, для которого скорость $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ при любом t.

[1] Если производная в точке равна плюс бесконечности или равна минус бесконечности, то мы считаем функцию дифференцируемой в этой точке. Непрерывность производной в такой точке означает, что производная бесконечно большая при стремлении аргумента к этой точке.

Теорема 3 ([RSS93]). *Аффинно объемлемо однородное замкнутое подмножество плоскости является либо*

- *набором изолированных точек, либо*
- *объединением изолированных (т. е. имеющих непересекающиеся окрестности) непрерывно дифференцируемых кривых, либо*
- *всей плоскостью.*

Замечание 4. Подмножество плоскости называется *локально замкнутым*, если любая его точка имеет такую замкнутую окрестность U в плоскости, что пересечение U с нашим подмножеством замкнуто. Условие замкнутости в теореме 3 можно ослабить до локальной замкнутости (ибо в том месте доказательства, где используется замкнутость, достаточно локальной замкнутости). Теорема 3 неверна без предположения замкнутости (или локальной замкнутости); контрпримером является $\mathbb{Q} \subset \subset \mathbb{R}$.

Гипотеза 5. *Любое связное замкнутое аффинно объемлемо однородное подмножество плоскости является либо точкой, либо прямой, либо эллипсом, либо ветвью гиперболы, либо параболой, либо всей плоскостью.* (*Определение связности приведено выше перед гипотезой* 1.)

Как мы уже отметили, утверждение 2 вытекает из теоремы 3. При этом теорема 3 является существенно более сильным результатом, чем утверждение 2. Поясним это примерами.

Когда теорема 3 еще не была доказана, подмножествами плоскости, подозрительными на аффинную объемлемую однородность, были некоторые «фракталы». Это подозрение основывалось на том, что в другом, более слабом, смысле, они все-таки однородны (см. следующий пункт). Определим эти «фракталы» — стандартное канторово множество и обобщенное канторово множество.

Стандартное канторово множество определяется так:

$$C := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \in [0,1] \colon a_k \in \{0,2\} \right\}$$

(рис. 12). Иными словами, стандартное канторово множество получается как предел следующей процедуры: из отрезка $[0,1]$ удаляется средняя треть, затем удаляется средняя треть из каждого из двух полученных отрезков, затем средняя треть из каждого из полученных четырёх отрезков, и так далее.

Это определение можно обобщить двумя эквивалентными способами (выберите из них наиболе понятный для вас). Можно определить *обобщенное канторово множество* на плоскости как образ стандартного

Рис. 12. Стандартное канторово множество

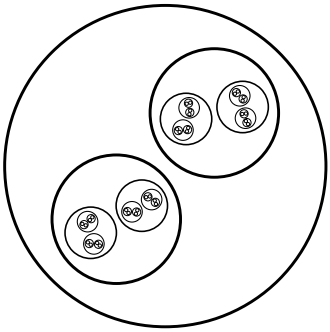


Рис. 13. Обобщенное канторово множество

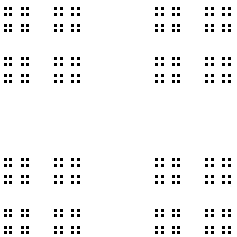


Рис. 14. Канторова пыль

канторова множества при непрерывном инъективном отображении. А можно — построив «иерархическую структуру» следующим образом.

Обобщенным канторовым множеством на плоскости называется пересечение объединений

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{Z}_2^n} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n},$$

где $\{C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{Z}_2^n$, — набор замкнутых непустых подмножеств плоскости, для которых

- $C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \supset C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 0} \cup C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 1}$ при любых n, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$,
- для любого n множества $C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ попарно не пересекаются и
- $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \operatorname{diam} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = 0$, где diam обозначает диаметр множества

(рис. 13).

Примером обобщенного канторова множества на плоскости является *канторова пыль* (рис. 14).

Из теоремы 3 немедленно вытекает

Следствие 6. *Никакое обобщенное канторово множество на плоскости не является аффинно объемлемо однородным.*

В следующем пункте объясняется, почему это следствие выглядит просто чудом (см. задачи 10(c, d)).

1.3. Другие виды однородности

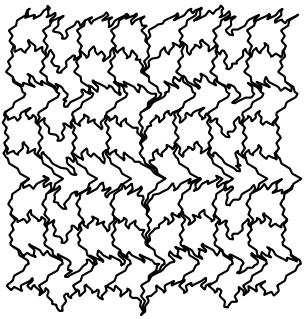


Рис. 15. Образ решетки при гомеоморфизме

Определение. Подмножество N пространства $\mathbb{R}^m$ (в частности, прямой $\mathbb{R}$ или плоскости $\mathbb{R}^2$) называется *однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует непрерывная биекция (т. е. взаимно однозначное отображение на) $h\colon N \to N$, переводящая x в y, см. рис. 15.

Это определение имеет два существенных отличия от предыдущих. Во-первых, отображение h задано только на N, а не на объемлющем пространстве $\mathbb{R}^m$ (в отличие от определений *объемлемой* однородности). Во-вторых, отображение h предполагается всего лишь непрерывным (а не изометрией, не аффинным и т. д.). Поэтому ясно, что любое изометрически или аффинно объемлемо однородное подмножество является однородным.

8. Следующие множества однородны:

(a) конечное множество точек;

(b) тор вращения в $\mathbb{R}^3$;

(c) множество рациональных точек на отрезке $(0, 1)$;

(d) стандартное канторово множество[1];

(e) обобщенное канторово множество;

(f) *ковер Серпинского* (он строится аналогично канторову множеству, только вместо вырезания средней трети из отрезков происходит вырезание «сердцевины» из квадратов, см. рис. 16);

(g) орбита непрерывного действия[2] топологической группы на $\mathbb{R}^m$.

9. Следующие множества не однородны:

(a) отрезок (указание: рассмотрите его крайнюю точку);

(b) объединение пересекающихся прямых (указание: рассмотрите точку их пересечения);

[1] Некоторые множества из этой задачи определены в предыдущем пункте.

[2] А некоторые нет... Напомним, что утверждения, содержащие незнакомые вам термины, можно игнорировать.

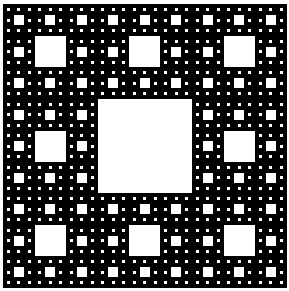


Рис. 16. Ковер Серпинского

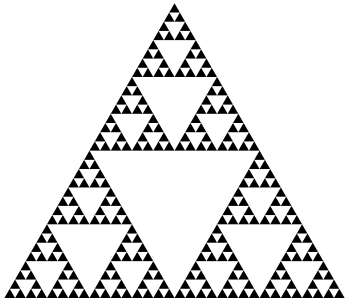


Рис. 17. Треугольник Серпинского

(c) *треугольник Серпинского* (рис. 17; указание: рассмотрите вершины и середины сторон большого треугольника).

Следующее понятие формализует свойство жесткого кабеля, необходимое для того, чтобы из него можно было вытащить его мягкую сердцевину, которую можно изгибать и ломать, но нельзя разрывать.

Определение. Подмножество N пространства $\mathbb{R}^m$ (в частности, прямой $\mathbb{R}$ или плоскости $\mathbb{R}^2$) называется *непрерывно объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует непрерывная биекция $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, переводящая x в y, а N в себя.

10. (a) Замкнутое ограниченное непрерывно объемлемо однородное подмножество прямой состоит из одной или двух точек.

(b) Канторово множество на прямой, а также ковер Серпинского на плоскости не являются непрерывно объемлемо однородными.

(c) Однородные множества из задач 8(b, c, e, g) непрерывно объемлемо однородны (в соответствующих евклидовых пространствах).

(d) Определите *липшицеву объемлемую однородность* (потребовав от h липшицевости). Докажите, что обобщенное канторово множество на плоскости является липшицево объемлемо однородным.

§ 2. Принцип вложенных отрезков, или примени теорему Бэра о категории

Этот цикл задач посвящен теореме Бэра о категории — мощному средству доказательства теорем существования (подробнее см. [KF, Ox71]). В анализе с помощью нее доказывается, например, теорема Банаха об обратном операторе, которая применяется для доказательства существования решений нелинейных уравнений. В топологии теорема Бэра применяется, например, к вложениям компактов и к аппроксимации отображений

гомеоморфизмами. В этой брошюре мы применим теорему Бэра к доказательству утверждения 2 из пункта 1.2 и его обобщений.

К задачам приводятся указания в конце этого пункта. Попытайтесь сначала решить задачи, не читая указаний!

11. (a) Пусть объединение открытых интервалов $U \subset \mathbb{R}$ неограничено. Докажите, что существует такое x, что $nx \in U$ для бесконечно большого количества целых n.

(b) Дана бесконечно дифференцируемая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем для любого x существует такое целое N_x, что $f^{(n)}(x) = 0$ для любого $n > N_x$. Докажите, что f — многочлен.

Напомним, что подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется

• *открытым*, если для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$;

• *всюду плотным*, если для любых $a, b \in \mathbb{R}$ пересечение $(a, b) \cap U$ непусто.

12. *Теорема Бэра о категории.* Докажите, что пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств прямой является всюду плотным (и, в частности, непустым).

13. Докажите, что если функция двух переменных непрерывна по каждой переменной, то она имеет точку непрерывности.

14. Докажите следующее для функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Поточечный предел последовательности f_n непрерывных функций (т. е. функция $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$) обязательно имеет точку непрерывности.

(b) Производная любой дифференцируемой функции имеет точку непрерывности.

15. Для бесконечно дифференцируемой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, любого x и (a) бесконечной последовательности чисел n (зависящей от x); (b) некоторого $n = n_x$ выполнено $f^{(n)}(x) = 0$. Докажите, что f — многочлен.

16. (a) Докажите, что прямая не представима в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых отрезков, каждый из которых отличен от точки.

(b) Докажите, что плоскость не представима в виде объединения замкнутых кругов с попарно непересекающимися непустыми внутренностями.

17. (a) Дано замкнутое ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{R}^2$. Известно, что для любых двух точек $x, y \in A$ существует разбиение $A = X \sqcup Y$ на замкнутые множества, для которого $x \in X$ и $y \in Y$ (такие множества называются *нульмерными*). Докажите, что существует непрерывное инъективное отображение (т. е. *вложение* или реализация) $a\colon A \to \mathbb{R}$.

(b)* Дано замкнутое ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{R}^{100}$. Известно, что для любых двух точек $x, y \in A$ существует разложение $A = X \cup Y$ в объединение замкнутых множеств, пересечение которых нульмерно, причем $x \in X$ и $y \in Y$ (такие множества называются *одномерными*). Докажите, что существует непрерывное инъективное отображение $a\colon A \to \mathbb{R}^3$.

(c)* *Теорема Менгера—Небелинга—Понтрягина*. Дайте определение n-мерного (замкнутого ограниченного) множества в $\mathbb{R}^N$ и докажите, что любое n-мерное множество вложимо в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Указания

11 (a). Сначала докажите, что *существует такое* $x_1 \in (0, 1)$, *что* $n_1 x_1 \in U$ *для некоторого* $n_1 > 1$.

Тогда *существует такое* $\varepsilon_1 > 0$, *что* $n_1(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \subset U$.

Потом докажите, что *существует такое* $x_2 \in (x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1)$, *что* $n_2 x_2 \in U$ *для некоторого* $n_2 > 2$.

И т. д.

Такие решения, основанные на принципе вложенных отрезков, удобно придумывать и записывать на языке теоремы Бэра о категории. Вышеприведенное решение коротко записывается так: по теореме Бэра о категории $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} U \neq \varnothing$.

11 (b). Сначала докажите следующий факт. *Пусть* $U_n \subset \mathbb{R}$ — *непустые открытые множества*, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ *и* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_k = \varnothing$. *Тогда существуют такие* n *и интервал* $(a, b) \subset U_n$, *что*

- (a, b) *максимален, т. е.* U_n *не содержит никакого большего интервала* $(c, d) \supset (a, b)$, *и*
- *один из интервалов* $(a, a + \varepsilon)$ *и* $(b - \varepsilon, b)$ *не пересекает множество* U_{n+1} *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Указание к доказательству факта. Предположим противное. Тогда для любого n, любого максимального интервала $(a, b) \subset U_n$ и любого $\varepsilon > 0$ оба интервала $(a, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b)$ пересекаются с U_{n+1}. Теперь докажите, что для любого максимального интервала $(a, b) \subset U_n$ либо U_{n+1}, либо U_{n+2} содержит интервал, замыкание которого лежит в (a, b). Выведите отсюда, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_k \neq \varnothing$. Противоречие.

Окончание решения задачи 11(b). Пусть f не многочлен. Положим $U_n := \mathbb{R} - \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} (f^{(k)})^{-1}(0)$. Применим приведенный факт. Получим такие n и максимальный интервал $(a, b) \subset U_n$, что для некоторого $\varepsilon > 0$ (не уменьшая

общности) $(a, a+\varepsilon) \cap U_{n+1} = \varnothing$. Тогда $f^{(n)}(a) = 0$ и $f^{(n+1)}(a, a+\varepsilon) = 0$. Поэтому $f^{(n)}[a, a+\varepsilon) = 0$. Противоречие.

12. Это простое следствие принципа вложенных отрезков.

13. Множество точек непрерывности функции f — это

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{ x \colon |fy_1 - fy_2| < \frac{1}{n} \text{ при } x - \frac{1}{k} < y_1 < y_2 < x + \frac{1}{k} \Big\}.$$

14. (a) Фиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $U_n := \bigcup\limits_{i,j \geqslant n} \{x \colon |f_i x - f_j x| > \varepsilon\}$. Тогда U_n открыто, $U_n \supset U_{n+1}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \varnothing$. Значит, по теореме Бэра для любого отрезка $[a, b]$ существуют число n и интервал $(c, d) \subset [a, b]$, не пересекающийся с U_n. Значит, $|f_i x - f_j x| \leqslant \varepsilon$ для любых $x \in (c, d)$ и $i, j \geqslant n$. Поэтому $|fx - f_n x| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in (c, d)$.

(b) Используйте (a) и $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n\Big(f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - f(x)\Big)$.

§ 3. Доказательство теоремы 3 и утверждения 2

Здесь мы докажем утверждение 2. Доказательство теоремы 3 аналогично. При доказательстве можно вместо определения аффинного преобразования использовать только следующие его свойства.

Для любого аффинного преобразования $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ образ любого открытого треугольника с вершиной в любой точке x содержит некоторый открытый треугольник[1] *с вершиной в точке $h(x)$.*

Если пересечение аффинно объемлемо однородного подмножества плоскости с некоторым кругом является непрерывной кривой, имеющей точку дифференцируемости, то это подмножество является объединением изолированных дифференцируемых кривых.

Доказательство утверждения 2. Обозначим через N график данной функции f. Возьмем точку $a \in \mathbb{R}^2 - N$. Расстояние от a до N не равно нулю. Значит, существует точка $y \in N$, для которой $|a - y|$ равно этому расстоянию. Тогда открытый круг D с центром в y радиуса $|a - y|$ не пересекает N.

Обозначим через R^{φ} поворот плоскости на угол φ вокруг начала координат. Обозначим через B_l равнобедренный треугольник (двумерный открытый) с вершиной в начале координат, углом $2\pi/l$ при вершине и высотой длины $1/l$, параллельной оси Oy.

[1] Здесь «содержит некоторый открытый треугольник» можно было бы заменить на «является открытым треугольником». Однако для дальнейших обобщений нам удобно сформулировать это свойство именно в приведенном виде.

При любом $x \in N$ существует аффинное преобразование $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, переводящее y в x, а N в себя. Так как h аффинно, то $h(D) \supset x + R^{\varphi} B_l$ для некоторых l и φ. Поэтому

$(*)$ при любом $x \in N$ существуют такие l и φ, что $(x + R^{\varphi} B_l) \cap N = \varnothing$.

Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_l\}$, всюду плотную на $[0, 2\pi]$. Обозначим

$$N_l := \{x \in N\colon (x + R^{\varphi_l} B_l) \cap N = \varnothing\}.$$

Ввиду условия $(*)$ имеем $N = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} N_l$.

Напомним следующие определение и теорему. Подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется

• *открытым*, если для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$;

• *всюду плотным*, если для любых $a, b \in \mathbb{R}$ пересечение $(a, b) \cap U$ непусто.

Теорема Бэра о категории. *Пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств прямой является всюду плотным* (*и, в частности, непустым*).

Нетрудно проверить, что N_l *замкнуто в* N (докажите или найдите детали в [RSS96, лемма 3.1]). Значит, по теореме Бэра о категории некоторое N_l содержит непустое открытое в N множество.

Поэтому существуют точка $x \in N$ и замкнутый квадрат I^2 со стороной меньше $1/l$ с центром в x, для которых $N' := N \cap I^2 \subset N_l$ (см. рис. 18).

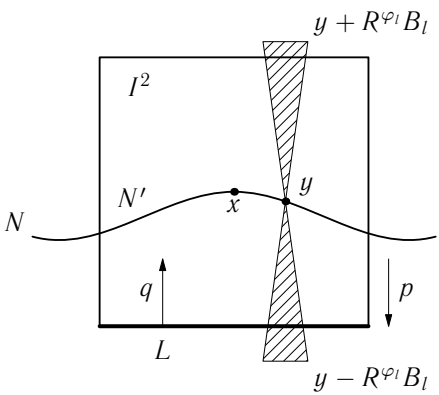


Рис. 18.

Тогда

$$(**) \qquad [(y + R^{\varphi_l} B_l) \cup (y - R^{\varphi_l} B_l)] \cap N' = \varnothing \quad \text{при любом } y \in N'.$$

Действительно, если $z \in (y - R^{\varphi_l} B_l) \cap N'$, то $y \in (z + R^{\varphi_l} B_l) \cap N' \subset N_l$, что невозможно.

Можно считать, что угол между некоторой стороной L квадрата I^2 и осью Ox равен φ_l. Можно также считать, что N' связно и гомеоморфно отрезку (иначе можно заменить N' на малую окрестность точки $a \in N'$, которая гомеоморфна отрезку, поскольку N — график функции). Тогда ортогональная проекция множества N' на L содержит некоторый отрезок ненулевой длины. Можно считать, что этот отрезок совпадает с L (иначе уменьшим L).

Напомним, что отображение $q\colon L \to [0,1]$ называется *липшицевым*, если существует такое s, что $|q(x) - q(y)| < s|x - y|$ для любых двух различных точек $x, y \in L$. Из $(**)$ следует, что N' есть график некоторой липшицевой функции $q\colon L \to [0,1]$ (при естественном представлении $I^2 = L \times [0,1]$). Функция q имеет точку дифференцируемости[1]. Значит, и данная функция f имеет точку дифференцируемости. Тогда из аффинной объемлемой однородности вытекает, что f дифференцируема в любой точке.

Докажем теперь часть «более того» утверждения 2. Производная f' имеет точку непрерывности (см. предыдущий параграф). Тогда из аффинной объемлемой однородности вытекает, что f непрерывно дифференцируема. □

§ 4. Обобщение на диффеоморфизмы

Напомним, что в § 1 мы рассматривали жесткий кабель, из которого можно вытащить его мягкую сердцевину, которую можно изгибать, но нельзя ломать. Мы обещали ввести понятие, которое более адекватно формализует необходимое свойство такого кабеля.

Определение ([DRS89]). Подмножество N пространства $\mathbb{R}^m$ (в частности, плоскости $\mathbb{R}^2$ или трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$) называется *дифференцируемо объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^m$, переводящий x в y, а N в себя.

[1] Это следует из того, что любая липшицева функция раскладывается в разность монотонных и что любая монотонная функция имеет точку дифференцируемости. Первое несложно, а второе доказывается с использованием соображений меры. Детали нетривиальны и приведены, например, в [KF].

Диффеоморфизм — это локально-аффинное преобразование. Формально, взаимно однозначное соответствие $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ называется *диффеоморфизмом*, если для любой точки $z_0 \in \mathbb{R}^m$ существует такое аффинное преобразование $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, что $A(z_0) = F(z_0)$ и отображение $\alpha(z) := \dfrac{F(z) - A(z)}{|z - z_0|}$ бесконечно малое при $z \to z_0$, см. рис. 19.

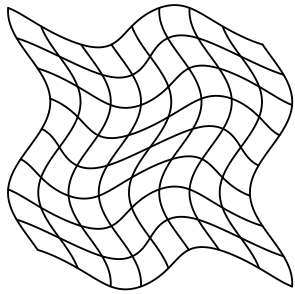


Рис. 19. Образ решетки при диффеоморфизме

Примерами диффеоморфизмов плоскости являются большинство геометрических преобразований: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, гомотетия, растяжение от прямой. (Инверсия и центральная проекция являются диффеоморфизмами плоскости без точки и плоскости без прямой, соответственно.) Поэтому аффинно объемлемо однородное подмножество является дифференцируемо объемлемо однородным.

Диффеоморфизмом плоскости *не является*, например, отображение, заданное формулой $(x, y) \mapsto (x^3, y)$. (В самом деле, «линейная часть» при $x = 0$ не является аффинным преобразованием, ибо не является обратимым отображением.)

18. Подмножества плоскости из теоремы 3 являются дифференцируемо объемлемо однородными.

Естественно возникает следующий вопрос: какие еще бывают дифференцируемо объемлемо однородные (допустим, замкнутые) подмножества плоскости?

Теорема 7 ([RSS96]). *Дифференцируемо объемлемо однородное замкнутое подмножество плоскости является либо*

- *набором изолированных точек, либо*
- *объединением изолированных непрерывно дифференцируемых кривых, либо*
- *всей плоскостью.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, поскольку свойства, сформулированные в начале § 3, справедливы для диффеоморфизмов.

По теореме 7 аналоги утверждения 2 и следствия 6 справедливы с заменой *аффинной* объемлемой однородности на *дифференцируемую*.

Следствие о диффеоморфизмах прямой

Взаимно однозначное соответствие $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *диффеоморфизмом*, если и оно, и его обратное имеют конечную ненулевую производную в каждой точке. Примерами диффеоморфизмов прямой являются ли-

нейные преобразования: параллельный перенос, растяжение. Диффеоморфизмом прямой *не является*, например, отображение, заданное формулой $x \mapsto x^3$.

Следствие 8. *Если имеется семейство диффеоморфизмов $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывно зависящих от параметра t, причем $h_s \circ h_t = h_{s+t}$ и $h_{-t} = (h_t)^{-1}$ при любых $s, t \in \mathbb{R}$, то h_t дифференцируемо зависит от параметра t, т. е. $h_t(x)$ дифференцируемо по t для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$.*

Обобщение и доказательство см. в следствии 12, приведенном в следующем пункте.

Закончим этот пункт научной переформулировкой и историей следствия 8, не обязательными для понимания дальнейшего.

Семейство диффеоморфизмов $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, для которых $h_s \circ h_t = h_{s+t}$ и $h_{-t} = (h_t)^{-1}$ при любых $s, t \in \mathbb{R}$, называется *действием* группы $\mathbb{R}$ на прямой (т. е. на себе) диффеоморфизмами. Такое действие является математическим эквивалентом физического понятия «двусторонне детерминированный процесс»; обсуждение этого можно найти в [Ar84, 4.2]. Научная формулировка следствия 8: непрерывное действие группы $\mathbb{R}$ на прямой диффеоморфизмами является гладким [Ar84, 4.3].

Около 1986 г. И. В. Ященко после лекции В. И. Арнольда спросил у лектора, как доказывать это утверждение. По словам Ященко, Арнольд не смог сходу придумать доказательство и объявил это утверждение открытой проблемой. В процессе обсуждения Арнольдом и Е. В. Щепиным было открыто (или переоткрыто) понятие дифференцируемой объемлемой однородности, что и привело к доказательству приводимых результатов.

Замечание о других видах однородности

Напомним, что отображение $q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ называется *липшицевым*, если существует такое s, что $|q(x) - q(y)| < s|x - y|$ для любых двух различных точек $x, y \in \mathbb{R}^k$. Канторово множество может быть *липшицево* объемлемо однородно вложено в плоскость (докажите или см. [MR99]). Значит, *неверен аналог теоремы 7 для липшицевой категории* (т. е. аналог, полученный заменой дифференцируемой объемлемой однородности на липшицеву и дифференцируемых кривых на липшицевы). Из этого же примера вытекает, что *неверен аналог теоремы 7 для непрерывной категории*.

Напомним, что функция называется C^r-дифференцируемой, если ее r-я производная существует и непрерывна. Оказывается, аналог теоремы 7 для C^r-категории верен.

Теорема 9. *Аналог теоремы 7 верен для C^r-категории при $r \geqslant 1$.*

Для $r = 1$ редукция этого результата к теореме 7 аналогична окончанию доказательства утверждения 2. Для $r \geqslant 2$ доказательство более сложно [Wi08, theorem B].

Гипотеза 10. *Аналог теоремы 7 верен для аналитической категории.*

§ 5. Приложение: обобщение на многомерный случай и многообразия

Понятия и результаты, с которыми мы работали, допускают естественное обобщение на многомерный случай и на случай многообразий.

Определение. Подмножество N дифференцируемого многообразия M называется *дифференцируемо объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует диффеоморфизм многообразия M, переводящий x в y. (Не предполагается ни непрерывности производной диффеоморфизма h, ни непрерывной зависимости h от x, y.)

Напомним, что подмножество $N \subset M$ дифференцируемого многообразия M называется *дифференцируемым подмногообразием*, если для любой точки $x \in N$ найдутся ее окрестность U и диффеоморфизм $U \to \mathbb{R}^k \times \times \mathbb{R}^{m-k}$, под действием которого пересечение $U \cap N$ переходит в график некоторой дифференцируемой функции $q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-k}$. (Это определение, удобное для доказательства нижеследующей теоремы 11, равносильно стандартному [Pr04].)

Например, дифференцируемо объемлемо однородным является любое дифференцируемое подмногообразие дифференцируемого многообразия. Следующая теорема показывает, что верно и обратное.

Теорема 11 ([RSS96]). *Дифференцируемо объемлемо однородное замкнутое подмножество дифференцируемого многообразия является дифференцируемым подмногообразием.*

Известно, что многообразия однородны и что однородное пространство не обязано быть многообразием (пример: канторово множество). Теорема 11 показывает, что свойство быть *дифференцируемым* подмногообразием равносильно *дифференцируемой объемлемой* однородности. Ср. [Gl68].

Следствия о группах Ли

При помощи теоремы 11 удобно доказывать, что некоторые группы являются группами Ли. Например, из нее вытекает теорема Картана о том, что *любая замкнутая подгруппа группы Ли является подгруппой Ли.*

Идея доказательства гипотез 1 *и* 5. (Эта идея сообщена С. В. Ивановым.) Группа самосовмещений нашего множества является замкнутой

подгруппой группы движений (или аффинных преобразований), а значит, подгруппой Ли. Так как множество связно, то ее компонента единицы тоже действует на множестве транзитивно. Связные подгруппы Ли соответствуют подалгебрам Ли. Для данных конкретных случаев подалгебры можно перечислить. Орбиты действий соответствующих подгрупп и будут всеми однородными множествами. Они автоматически будут гладкими подмногообразиями, поэтому их можно перечислять и с помощью дифференциальной геометрии. □

Следствие 12. *Непрерывное действие группы Ли диффеоморфизмами на дифференцируемом многообразии является дифференцируемым*, *ср.* [MZ55, Theorem 3, p. 208—209].

Доказательство. Обозначим действие через $h^t : M \to M$, $t \in G$. Определим отображение $\gamma\colon G \to G \times M$ формулой $\gamma(t) = (t, h^t(*))$, где $* \in M$ — произвольная точка. Для любого $a \in G$ отображение $(x, y) \mapsto (xa, h^a(y))$ определяет диффеоморфизм многообразия $G \times M$. Он переводит $\gamma(G)$ в себя. Значит, по теореме 11 $\gamma(G)$ — дифференцируемое подмногообразие. Поэтому $h^t(*)$ дифференцируемо по t. □

Следствие 13. *Если локально компактная топологическая группа эффективно действует на гладком многообразии диффеоморфизмами*, *то это группа Ли*.

Доказательство. Ясно, что любая орбита некоторого непрерывного действия топологической группы на гладком многообразии диффеоморфизмами является гладко объемлемо однородной. Топологическая группа A_p p-адических чисел гомеоморфна канторову множеству. Поэтому из теоремы 11 вытекает, что

A_p не может свободно (*и даже эффективно*) *непрерывно действовать на гладком многообразии диффеоморфизмами*.

Известно [MZ55], что последнее утверждение влечет доказываемое следствие.[1] □

Следствие 13 доказано в 1946 г. Бохнером и Монтгомери [MZ55, Theorem 2, p. 208] более сложным образом. Оно является *гладкой* версией недоказанной гипотезы Гильберта—Смита (формулировка которой получается из формулировки следствия заменой слов «гладком» и «диффеоморфизмами» на «топологическом» и «гомеоморфизмами»). Доказательство *липшицевой* версии см. в [RS97].

Гипотеза Гильберта—Смита появилась при решении пятой проблемы Гильберта: *любая ли локально евклидова топологическая группа является группой Ли*? Сама пятая проблема Гильберта была положительно

[1] Вместо выделенного утверждения о группе A_p можно использовать положительное решение пятой проблемы Гильберта, см. ниже.

решена в 1952 г. [MZ55] (независимо Глизоном, а также Монтгомери и Циппиным).

См. также [AO07, HR08, OY03].

Доказательство[1] теоремы 11

То, что N является дифференцируемым подмногообразием в M — локальное условие. Поэтому можно считать, что $M = \mathbb{R}^m$.

Обозначим $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$ и

$$B_l^{m,k} := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \colon -l^2 x_k < |x| < 1/l \text{ и } l^2|x_i| < |x| \text{ для } k < i \leqslant m\}.$$

Тогда

- $B_l^{m,m+1}$ есть проколотая внутренность m-мерного шара радиуса $1/l$,
- $B_l^{m,k}$ есть открытый конус над $(1/l^2)$-окрестностью k-мерного полушария в $(m-1)$-мерной сфере радиуса $1/l$ для $1 \leqslant k \leqslant m$, и
- $B_l^{m,0} = \varnothing$ для $l > m$.

Обозначим через O_m группу ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^m$.

Возьмем наибольшее $k \geqslant 0$, для которого

$(*)$ при любом $x \in N$ существуют такие $l > m$ и $A \in \mathrm{O}_m$, что
$$(x + AB_l^{m,k}) \cap N = \varnothing.$$

(Неформально это значит, что N является «$(m-k)$-мерно липшицевым».) Такое k существует, поскольку $(*)$ справедливо при $k = 0$. См. рис. 18, где $m = 2$ и $k = 1$.

Если $k = m + 1$, то N состоит из изолированных точек и теорема доказана. Поэтому будем считать, что $k \leqslant m$. Далее фиксируем m и k и опускаем их из обозначений конуса $B_l^{m,k}$. Возьмем произвольную последовательность $\{A_l\}$, всюду плотную в O_m. Обозначим

$$N_l := \{x \in N \colon (x + A_l B_l) \cap N = \varnothing\}.$$

Ввиду условия $(*)$ имеем $N = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} N_l$. Нетрудно проверить, что N_l *замкнуто в* N (докажите или см. детали в [RSS96, лемма 3.1]). Значит, по теореме Бэра о категории некоторое N_l содержит непустое открытое в N множество [RSS96, лемма 3.2].

---

[1] Это доказательство (оно появилось в [Sk07]) проще оригинального [RSS96, RS00] (хотя использует те же идеи). Оно обобщает уже разобранное доказательство простейшего случая — утверждения 2.

Поэтому существуют точка $x \in N$ и замкнутый m-мерный куб I^m диаметра меньше $1/l$ с центром в x, для которых $N' := N \cap I^m \subset N_l$. Тогда

$$(**) \qquad [(y + A_l B_l) \cup (y - A_l B_l)] \cap N' = \varnothing \quad \text{при любом } y \in N'.$$

Действительно, если $z \in (y - A_l B_l) \cap N'$, то $y \in (z + A_l B_l) \cap N' \subset N_l$, что невозможно.

Так как N замкнуто, то можно считать, что N' компактно. Можно также считать, что некоторая $(m-k)$-мерная грань L куба I^m перпендикулярна k-мерной плоскости $A_l(\mathbb{R}^k \times \vec{0})$ ($L = I^m$ при $k = 0$). Обозначим через $p\colon I^m \to L$ ортогональную проекцию.

Первый случай: *$p(N')$ содержит открытое в L множество U*. (Это заведомо так для $k = m$, когда все уже очевидно, и это заведомо не так для $k = 0$.) Из $(**)$ следует, что p является взаимно однозначным на N', и что обратное отображение $q\colon U \to N'$ липшицево. Поэтому q имеет точку дифференцируемости [Fe69, теорема 3.1.6]. Тогда из дифференцируемой объемлемой однородности вытекает, что q дифференцируемо в любой точке. Поэтому условие из определения дифференцируемого подмногообразия выполнено в одной точке множества N. Тогда из дифференцируемой объемлемой однородности вытекает, что N является дифференцируемым подмногообразием.

Второй случай: *$p(N')$ не содержит никакого открытого в L множества*. (Значит, $k < m$.) Так как $p(N')$ не содержит открытого в L множества, то существует точка $a \in L - p(N')$, достаточно близкая к центру грани L (точнее, расстояние от которой до центра грани L меньше четверти диаметра этой грани). Так как $p(N')$ компактно, то расстояние от a до $p(N')$ не равно нулю и существует точка $z \in N'$, для которой $|a - p(z)|$ равно этому расстоянию. Поскольку a достаточно близко к центру грани L, то $p(z)$ лежит *внутри* грани L. Тогда открытый $(m-k)$-мерный шар $D \subset L$ с центром в a и радиусом $|a - p(z)|$ не пересекает $p(N')$. Поэтому $p^{-1}(D) \cap N' = \varnothing$. Ясно, что

$$(z + A_l B_l) \cup (z - A_l B_l) \cup p^{-1}(D) \supset z + A_l B_s^{m,k+1} \quad \text{для некоторого } s.$$

Отсюда и из $(**)$ следует, что $(z + A_s B_s^{m,k+1}) \cap N = \varnothing$. Так как N дифференцируемо объемлемо однородно, то при любом $x \in N$ существуют окрестности Uz и Ux точек z и x в $\mathbb{R}^m$ и диффеоморфизм $h\colon Uz \to Ux$, переводящий z в x и $Uz \cap N$ в $Ux \cap N$. Тогда по определению диффеоморфизма

$$h(Uz \cap (z + A_s B_s^{m,k+1})) \supset x + A B_u^{m,k+1} \quad \text{для некоторых } A \in \mathrm{O}_m \text{ и } u > m.$$

Значит, $(*)$ выполнено с заменой k на $k+1$. Это противоречит максимальности числа k. $\square$

Литература

Книги

[Ar84] *В. И. Арнольд*. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

[Fe69] *Г. Федерер*. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.

[KF] *А. Н. Колмогоров*, *С. В. Фомин*. Функциональный анализ. М.: Наука, 1989.

[MZ55] *D. Montgomery*, *L. Zippin*. Topological Transformation Groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.

[Ox71] *Дж. Окстоби*. Мера и категория. М.: Мир, 1974.

[Pr] *В. В. Прасолов*. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.

[Pr04] *В. В. Прасолов*. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004.

Статьи

[AO07] *E. Akin*, *W. Ott*. On a theorem of Shchepin and Repovš concerning the smoothness of compacta // Topology Appl. 2007. V. 154, № 13. P. 2496—2500.

[DRS89] *D. Dimovski*, *D. Repovš*, *E. V. Ščepin*. C^∞-homogeneous closed curves on orientable closed surfaces // Geometry and topology (ed. G. M. Rassles and G. M. Stratopoulos). Singapore: World Scientific Publ. Co., 1989. P. 100—104.

[Gl68] *H. Gluck*. Geometric characterisation of differentiable manifolds in Euclidean space. II // Michigan Math. J. 1968. V. 15. P. 33—50.

[HR08] *D. M. Halverson*, *D. Repovš*. The Bing—Borsuk and the Busemann conjectures // Math. Comm. 2008. V. 13, № 2. P. 163—184.

[MR99] *J. Malešič*, *D. Repovš*. On characterization of Lipschitz manifolds // New developments in differential geometry (ed. J. Szenthe). Dordrecht: Kluwer, 1999. P. 265—277.

[OY03] *W. Ott*, *J. A. Yorke*. Learning about reality from observation // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2003. V. 2, № 3. P. 297—322.

[RS97] *D. Repovš*, *E. V. Shchepin*. A proof of the Hilbert—Smith conjecture for actions by Lipschitz maps // Math. Ann. 1997. V. 308, № 2. P. 361—364.

[RS00] *E. V. Shchepin*, *D. Repovš*. On smoothness of compacta // J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 100, № 6. P. 2716—2726.

[RSS93] *D. Repovš*, *A. B. Skopenkov*, *E. V. Ščepin*. A characterization of C^1-homogeneous subsets of the plane // Boll. Unione Mat. Ital. A. 1993. V. 7, № 3. P. 437—444.

[RSS96] *D. Repovš*, *A. B. Skopenkov*, *E. V. Ščepin*. C^1-homogeneous compacta in $\mathbb{R}^n$ are C^1-submanifolds of $\mathbb{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124, № 4. P. 1219—1226.

[Sk07] *A. Skopenkov*. A characterization of submanifolds by a homogeneity condition // Topol. Appl. 2007. V. 154, № 9. 1894—1897. [Препринт: http://arxiv.org/abs/math.GT/0606470.]

[Wi08] *A. Wilkinson*. The cohomological equation for partially hyperbolic diffeomorphisms. Препринт, http://arxiv.org/abs/0809.4862.

Оглавление