Введение

1. В этой книге речь идёт о принципах теории, так же относящейся к общим системам (нелинейных) уравнений с частными производными, как алгебраическая геометрия — к общим системам алгебраических уравнений. В алгебраической геометрии изучают многообразия, состоящие из всех решений данной системы алгебраических уравнений. История предмета, идущая от Декарта до схем Гротендика, показывает, что понять, что́ именно следует называть «многообразием всех решений», — не слишком простая задача. Эта задача становится ещё более сложной, если мы хотим должным образом формализовать понятие «многообразие всех решений данной системы уравнений с частными производными». Специфическая трудность этой задачи — как корректно сопоставлять друг с другом решения, имеющие разные области определения? Этот вопрос критически важен для физики, где необходимо иметь возможность локализовать теорию. Ясно, что этим требованиям нельзя удовлетворить с помощью стандартных средств функционального анализа, топологии и т. д. Одна из целей этой книги — ввести понятие *диффеотопа*, нового математического объекта, играющего в теории (нелинейных) уравнений с частными производными ту же роль, которую понятие *аффинного алгебраического многообразия* играет в теории алгебраических уравнений. Довольно длительная подготовка необходима, чтобы должным образом организовать материал из различных областей, но после того, как она проведена, понятие диффеотопа возникает с неизбежностью.

Диффеотопы — это (бесконечномерные, вообще говоря) многообразия с дополнительной структурой (её можно назвать *контактной структурой бесконечного порядка*), локально эквивалентные бесконечным продолжениям дифференциальных уравнений. Благодаря этой структуре на диффеотопе можно развить весьма своеобразную версию дифференциального исчисления, называемую *вторичным исчислением*. Различные естественные свойства диффеотопа (и тем самым соответствующей системы дифференциальных уравнений) выражаются в терминах вторичного исчисления, и наоборот. Для вторичного исчисления характерно то, что оно носит полностью когомологический характер. Иными словами, объекты, с которыми оно оперирует, суть когомологические классы в некоторых дифференциальных комплексах и связывающие их операторы. С категорной точки зрения объекты вторичного исчисления суть гомотопические типы специальных дифференциальных комплексов над диффеотопами, а морфизмы — некоторые гомотопические классы дифференциальных коцепных отображений. С технической точки зрения вторичное исчисление представляет собой довольно специфическую смесь коммутативной и гомологической алгебры с дифференциальной геометрией. На первый взгляд может показаться странным, что естественный язык для работы с нелинейными уравнениями с частными производными именно таков. Однако сегодня можно твёрдо сказать, что вторичное исчисление является естественным математическим основанием для квантовой механики и в особенности квантовой теории поля и её обобщений.

Мы используем прилагательное «вторичный», чтобы подчеркнуть, что вторичное исчисление — естественный язык, основанный на классическом (первичном) анализе. Имея в виду его связи с квантовой механикой, можно было бы также назвать его «квантованным» или «квантовым» анализом, но этими прилагательными в последнее время слишком злоупотребляли, что не позволяет использовать их ещё раз в совершенно новом контексте. Мы тем не менее упомянули их сейчас, чтобы подчеркнуть, что цель этой книги — построить временный мостик между классической и квантовой математикой. Автор сознаёт все недостатки предлагаемой конструкции, но надеется, что у неё есть хотя бы одно достоинство: она поможет достаточно смелым путешественникам перебраться через пропасть.

2. Основная часть написана в стандартном математическом стиле, не оставляющем места мотивировкам и неформальным рассуждениям. Отсутствие этих мотивировок, в нашей ситуации необходимых, компенсирует вводная гл. 0.

Есть два важных аспекта вторичного исчисления, которых мы в этой книге не касаемся. Один из них относится к *нелокальным объектам*, т. е. объектам, зависящим не только от исходных неизвестных функций и их производных какого бы то ни было порядка, но и от того, что получается в результате обращения дифференциальных операций (скажем, интегрирования). Введение в эти вопросы можно найти в обзорной статье И. С. Красильщика и автора «Nonlocal trends in the geometry of differential equations» ([74], см. также [19]).

Центральное понятие нелокальной теории — *накрытие* в теории дифференциальных уравнений. Это понятие было введено автором в работе [122]; вкратце оно обсуждается в гл. 5 книги. Другой аспект — градуированная («супер») версия вторичного исчисления. Первые результаты в этом направлении были получены И. С. Красильщиком; они изложены в его совместной монографии с П. Керстеном [70].

Теория, изложенная в книге, имеет многочисленные приложения. Простейшие из них относятся к нахождению и последующему использованию высших симметрий и законов сохранения для данной системы уравнений с частными производными. Относительно краткое введение в этот предмет можно найти в статье [127]; сборник [139] демонстрирует соответствующую вычислительную технику в действии. Книгу [19], содержащую систематическое изложение этого материала, можно рассматривать как набор примеров, иллюстрирующих общую теорию, изложенную в настоящей книге. Мы настоятельно рекомендуем эту книгу читателям, интересующимся практическими приложениями данной теории.

Следует сразу же подчеркнуть, что дифференциальные операторы и связывающие их естественные конструкции рассматриваются в основном тексте книги алгебраически и бескоординатно. Это существенно упрощает вычисления и позволяет выделить основополагающие структуры теории, малозаметные при стандартном подходе. Усилия, которые, возможно, потребуются от читателя для привыкания к такому подходу, в конечном счёте будут вознаграждены.

Наше изложение самодостаточно в том смысле, что мы проговариваем все те факты и конструкции, на которые опираемся. Дальнейшие детали, относящиеся к подготовительному материалу, можно найти в книге [71]; книгу [19], как мы отмечали выше, можно использовать как источник примеров, иллюстрирующих общую теорию. Элементарное введение в дифференциальное исчисление над коммутативными алгебрами можно найти в книге [95].

3. Структура книги такова.

Глава 0 представляет собой неформальное введение в основные понятия современной теории уравнений с частными производными. Наша основная цель в этой главе — продемонстрировать неизбежность прихода к этим основаниям и с математической, и с физической точки зрения.

В первой главе развиваются основания дифференциального исчисления над коммутативными алгебрами. На введённом в ней языке, совершенно необходимом для выявления основных структур теории, основывается дальнейшее изложение. Именно в этой точке наше изложение начинает быстро расходиться с принятым в литературе по математической физике.

Пользуясь этим языком, мы развиваем основы линейного лагранжева формализма. Это позволяет обнаружить естественную когомологическую структуру и в самом формализме, и в некоторых связанных с ним конструкциях. Из этих последних в первую очередь следует назвать законы сохранения. Связанные с ними когомологии возникают из некоторых мультианалогов Diff-комплексов Спенсера. Одна из версий такого рода когомологий будет играть важную роль в гл. 4 и 5 в связи со вторичным исчислением.

Естественность чисто алгебраического подхода к лагранжеву формализму, развиваемого в этой главе, находит своё веское подтверждение в том обстоятельстве, что этот подход непосредственно обобщается на любую разумную некоммутативную ситуацию (см. [116]).

Вторая глава, напротив, имеет чисто геометрический характер. Речь в ней идёт о пространствах джетов конечного порядка и общих системах (нелинейных) уравнений с частными производными, интерпретируемых как подмногообразия в этих пространствах. Изложение концентрируется вокруг различного рода автоморфизмов контактных структур высшего порядка, интерпретируемых как симметрии уравнений с частными производными. Показано, что с ростом порядка джетов (т. е. порядка производных, участвующих в уравнении) группа симметрий не растёт. Это означает, что классическая теория симметрий, разработку которой начал С. Ли, а продолжили Беклунд и другие, никак не может вместить в себя новые «экспериментальные данные», возникшие в теории интегрируемых систем. Это же обстоятельство вынуждает в поисках подходящего обобщения понятия симметрий нелинейных уравнений с частными производными перейти к бесконечным джетам.

Этот переход происходит в гл. 3, где в числе прочего развивается теория *высших симметрий* для общих систем уравнений с частными производными. Для этого изучается геометрия пространств джетов бесконечного порядка и бесконечно продолженных дифференциальных уравнений. Это простейшие примеры диффеотопов. Оказывается, инфинитезимальные контактные преобразования бесконечного порядка образуют гораздо более обширную алгебру Ли, чем классические. Группа контактных преобразований также увеличивается, но в гораздо меньшей степени, чем соответствующая алгебра Ли.

Более того, в некоторых ситуациях она и вовсе не увеличивается. Это расхождение, на первый взгляд разочаровывающее и бывшее долгое время загадкой, имеет естественное объяснение: инфинитезимальные контактные преобразования бесконечного порядка являются по сути своей классами когомологий векторных полей. Эти классы когомологий суть в точности *вторичные векторные поля*, как это объясняется в гл. 5. Однако у вторичных векторных полей (как и у квантовых частиц!) нет траекторий. Таков главный философский урок гл. 3.

В этой главе разрабатываются также основы дифференциального исчисления, согласующегося с контактными структурами бесконечного порядка (например, вводятся $\mathscr{C}$-дифференциальные операторы). Преимущества алгебраического подхода к дифференциальному исчислению, развитого в гл. 1, при переходе к пространствам бесконечных джетов становятся очевидными. Этот подход позволяет избежать и трудностей, типичных для бесконечномерных ситуаций, и лишних соблазнов.

Основания теории высших симметрий, изложенные в гл. 3, были развиты автором в 1976–77 годах (см. [121, 124, 137, 142]) и в координатном виде появлялись в дальнейшем во многих публикациях (см., например, [54, 96, 146]). Вычислительные аспекты теории были в первый раз подвергнуты широкой проверке в сборнике [139]. В книге [19] содержится современное и подробное изложение основ теории с недавними на тот момент добавлениями и приложениями. Замечательно, что первая попытка рассмотреть контактные преобразования бесконечного порядка в качестве естественного обобщения теории Ли была предпринята Беклундом [11] ещё в XIX веке.

Основная когомологическая конструкция теории уравнений с частными производными — *$\mathscr{C}$-спектральная последовательность* — вводится в гл. 4. Первый член этой последовательности особенно важен, поскольку в нём содержатся лагранжианы (действия), законы сохранения, симплектические структуры в теории поля и т. п. С помощью этой спектральной последовательности можно выяснить, каков полный список законов сохранения, допускаемых данной системой уравнений с частными производными, может ли эта система быть получена из вариационных принципов и т. п. Когда количество независимых переменных равно нулю, $\mathscr{C}$-спектральная последовательность сводится к комплексу де Рама. Это одна из причин того, что далее, в гл. 5, мы будем называть её элементы *вторичными дифференциальными формами*.

Второй член $\mathscr{C}$-спектральной последовательности описать на привычном языке труднее. Его элементы можно, скажем, назвать характеристическими классами кобордизмов, построенных из решений рассматриваемого уравнения. В частности, таким способом можно получить различные виды хорошо известных характеристических классов — как элементы второго члена $\mathscr{C}$-спектральной последовательности, ассоциированной с некоторыми *универсальными* уравнениями. Иначе можно их назвать *вторичными классами когомологий де Рама*, поскольку именно стандартные когомологии де Рама возникают при нулевом количестве независимых переменных. В классической («первичной») математике никаких указаний на то, как назвать высшие члены $\mathscr{C}$-спектральной последовательности, не имеется.

Основная техническая проблема, обсуждаемая в гл. 4, состоит в том, как вычислить первый член $\mathscr{C}$-спектральной последовательности. В этой главе развивается общий метод, основанный на когомологиях спенсеровского типа. Он даёт исчерпывающий ответ для пространств джетов бесконечного порядка, и на его основе строится довольно эффективный вычислительный алгоритм для бесконечно продолженных уравнений. Он, в частности, позволяет описать область на стандартной (p, q)-диаграмме, в которой сосредоточены все нетривиальные члены (теоремы о двух и о p строчках). Формально эквивалентный, но гораздо более удобный метод обсуждается в гл. 5.

Что касается второго члена $\mathscr{C}$-спектральной последовательности, то аналогия с обычными векторными полями и дифференциальными формами позволяет предложить некоторую простую гомотопическую технику, применимую к широкому классу уравнений. Эта, как объясняется в гл. 5, аналогия является одной из основных идей вторичного исчисления.

В конце главы 4 обсуждаются некоторые приложения к теории законов сохранения, лагранжеву формализму со связями и другим вопросам. Даже в стандартных ситуациях полученные там результаты обнаруживают новые важные аспекты. Например, метод «производящих функций», развитый для вычислительных целей, показывает, что высшие симметрии и законы сохранения для (нелинейной) системы уравнений с частными производными являются решениями двух взаимно сопряжённых $\mathscr{C}$-дифференциальных уравнений. Эти уравнения совпадают с уравнениями Эйлера — Лагранжа, что проясняет природу теоремы Нётер и позволяет обобщить её на гораздо более широкий класс уравнений. Вычислительную технику нахождения для законов сохранения конкретных уравнений можно найти в статье [127]. Мы ещё раз настоятельно рекомендуем книгу [19] читателям, интересующимся этими вопросами.

Результаты гл. 4 были получены автором в основном в 1976–77 годах и анонсированы в заметках [129] и [121], но подробное изложение опубликовать в тот момент оказалось невозможно: опубликовано оно было почти шестью годами позже в США (см. [134]). В это время Т. Цудзишита [112] опубликовал подробное описание упрощённой версии $\mathscr{C}$-спектральной последовательности, названное *вариационным бикомплексом*. Подход Цудзишиты предполагает, что уравнение обладает структурой расслоения; в силу этого второй дифференциал оказывается таким же, как в спектральной последовательности Лере — Серра. Поэтому такие задачи, как, например, проблема минимальных поверхностей, не укладываются в рамки этого подхода. Более того, этот подход предполагает скорее координатное описание в противоположность концептуальному алгебраическому языку и тем самым не даёт возможности выявить основные структуры этой теории, в частности, в свете вторичного исчисления. Благодаря координатному языку подход Цудзишиты стал более популярным среди специалистов по математической физике. С другой стороны, в той же статье Т. Цудзишита открыл важные связи с теорией характеристических классов. Возможно, именно из-за трудностей, связанных с систематическим использованием естественного алгебраического языка дифференциального исчисления, появилось некоторое количество работ на координатном языке (см., например, [3] и [146]). Раздел математики, сформировавшийся вокруг понятия вариационного бикомплекса, был назван Цудзишитой «формальной геометрией дифференциальных уравнений» (см. [110]). С тех пор этот формальный дух поддерживался в работах ряда авторов. До известной степени эта точка зрения оправдана, но для вторичного исчисления в целом (см. гл. 5) она уже не подходит, а в стратегической перспективе и контрпродуктивна.

В заключительной главе 5 происходит синтез: мы демонстрируем, как результаты предыдущих глав естественным образом самоорганизуются в новое исчисление, называемое вторичным, и указываем некоторые направления дальнейшего развития. В этой главе доказательства, как правило, опускаются.

В пятой главе систематически используется понятие диффеотопа, введённое в гл. 3. Простейшие примеры диффеотопов — бесконечно продолженные уравнения. Диффеотопы можно рассматривать как «вторичные многообразия», и они являются той сценой, на которой разыгрывается пьеса вторичного исчисления. Затем мы переходим к вторичным векторным расслоениям и вторичным модулям над алгебрами вторичных гладких функций, на которых действуют вторичные дифференциальные операторы. Все эти объекты суть гомотопические типы специальных дифференциальных комплексов над данным диффеотопом $\mathscr{O}$. Например, алгебра вторичных гладких функций на $\mathscr{O}$ — это гомотопический тип алгебры градуированных дифференциальных операторов, действующих на горизонтальном комплексе де Рама над $\mathscr{O}$. Гомотопические классы столбцов нулевого члена соответствующей $\mathscr{C}$-спектральной последовательности — это вторичные дифференциальные формы. Вторичные дифференциальные операторы определяются как некоторые гомотопические классы дифференциальных коцепных отображений комплексов, представляющих вторичные модули, и т. д.

Если в качестве базового диффеотопа взять все накрытия над бесконечно продолженным уравнением, то когомологии соответствующих комплексов будут содержать исчерпывающую информацию об исходном уравнении, и это свидетельствует о том, что вторичное исчисление — нечто много большее, чем просто формальная теория (см. выше). Поэтому центральная задача вторичного исчисления — эффективное вычисление этих когомологий. Замечательно, что метод $\mathscr{C}$-спектральной последовательности совершенно естественно обобщается на общие вторичные модули. Это обобщение описывается вместе с весьма важным усовершенствованием нашего метода из гл. 4, принадлежащим М. Марвану, Т. Цудзишите, Д. Гесслеру и А. Вербовецкому, — использованием *комплекса совместности* вместо когомологий типа Спенсера.

Другая тема, которой уделено значительное внимание в гл. 5, — проблема секондаризации, т. е. нахождения вторичных аналогов для всех ингредиентов стандартного (первичного) анализа. Из предшествующего обсуждения видно, что задача эта довольно тонкая и весьма важная. Хотя сейчас для секондаризации можно предложить почти что алгоритмическую процедуру, всё равно требуется подробная проработка нестандартной когомологической техники, а зачастую и переделка хорошо известных фрагментов обычного анализа, чтобы привести их к «секондаризуемому» виду. Столь масштабное предприятие далеко выходит за рамки этой книги, так что мы ограничиваемся описанием вторичных дифференциальных операторов, некоторых фрагментов вторичного гамильтонова формализма и (более подробно) вторичных мультивекторнозначных форм, включая формализм вторичных скобок Схоутена — Нийенхейса и Фрёлихера — Нийенхейса. Эти конструкции достаточно поучительны и имеют многочисленные интересные приложения. Упомянем здесь, что, скажем, оператор Эйлера, сопоставляющий лагранжиану соответствующие уравнения Эйлера — Лагранжа, оказывается вторичным дифференциальным оператором первого порядка — в то время как при формальном представлении в координатах его порядок бесконечен.

Вторичное исчисление можно развивать на разных уровнях, соответствующих второму и последующим членам $\mathscr{C}$-спектральной последовательности. На этих вопросах мы здесь не останавливаемся.

4. Добавим некоторые замечания по поводу нынешнего статуса теории, изложенной в этой книге.

Алгебраическая геометрия, т. е. общая теория систем (нелинейных) алгебраических уравнений, является одним из самых уважаемых разделов математики. А вот аналогичная теория нелинейных дифференциальных уравнений, согласно рубрикатору 1991 года Американского математического общества, и вовсе не существовала. Более того, общее мнение состоит в том, что самостоятельная общая теория нелинейных уравнений с частными производными и существовать-то не может, так что исследование каждой конкретной системы дифференциальных уравнений, представляющей интерес для приложений, — дело специалистов в соответствующем разделе механики, математики или теоретической физики.

Мало кто сейчас помнит, что в конце XIX – начале XX века ситуация была совершенно иной. Великая симфония, созданная Софусом Ли, который заложил краеугольный камень общей теории нелинейных уравнений с частными производными, считалась почётным разделом чистой математики и привлекала внимание многих выдающихся математиков того времени. Но как это на первый взгляд ни удивительно, это славное время мгновенно закончилось после Первой мировой войны, словно эта война уничтожила великую нелинейную культуру старых мастеров. Из здания, созданного Ли, были извлечены лишь группы и алгебры его имени, теория которых была развита в тысячах работ. Ход и причины такого развития ещё предстоит проанализировать, но две из этих причин понятны. Во-первых, следует назвать очень сильное искушение линеаризовать всё на свете (функциональный анализ тому пример): эта тенденция стала всеобъемлющей в том, что касается уравнений с частными производными. Во-вторых, при исследовании таких уравнений (даже линейных) необходимо пользоваться многими и разными математическими структурами; часть этих структур, особенно относящихся к гомологической алгебре, в то время не была даже открыта. Всё это привело к недооценке и недостаточному развитию общей теории нелинейных уравнений с частными производными, что, в свою очередь, сделало развитие многих ключевых приложений математики трудным и мучительным.

Вторичное исчисление — естественное продолжение работ Софуса Ли и его последователей, обогащённое результатами формальной теории уравнений с частными производными. Стоит отметить, что впервые когомологические методы были применены в теории уравнений с частными производными именно в контексте формальной теории, в работах Спенсера и Гольдшмидта (см., например, [44, 45, 103]); речь идёт о резольвенте Спенсера, когомологиях Спенсера и пр. Эти авторы вскрыли глубокую когомологическую основу старой формальной теории, развитой Рикье, Жане и другими. Начиная с 70-х годов прошлого века московские математики, работающие в геометрии уравнений с частными производными, провели естественный синтез вышеупомянутых теорий, основанный на алгебраической «перестройке» анализа [133, 136], в результате чего в начале 80-х годов были выявлены первые структуры вторичного исчисления.

Сейчас уже ясно, что вторичное исчисление может служить солидным и естественным фундаментом теории нелинейных уравнений с частными производными. Более того, вторичное исчисление выступило в роли объединяющей теории, возможные приложения которой простираются от арифметической алгебраической геометрии до современных теорий элементарных частиц, — трудно было такого ожидать! Разумеется, чтобы реализовать намеченные тут программы, нужна серьёзная подготовительная работа. Автор будет очень рад, если эта книга пробудит интерес молодых математиков, а может быть, и физиков к этой новой нелинейной математике.

Начиная с работ Эли Картана, подытоженных в книге [29] (см. также современное изложение картановского подхода в статье [24]), существует традиция рассматривать уравнения с частными производными как внешние дифференциальные системы (см. [79, 99]). Такой подход полезен во многих задачах. Внешние дифференциальные системы как геометрические структуры очень близки к уравнениям с частными производными, так что многое из изложенного в книге можно перенести в этот контекст. Поучительный пример читатель найдёт в работах Брайанта и Гриффитса [25, 26], а также [27, 28].