§ 1. Введение

Из одной теоремы Архимеда следует, что объем, отсекаемый плоскостью от шара или эллипсоида, алгебраически зависит от коэффициентов уравнения плоскости. Напротив, в двумерном случае Ньютон доказал, что такой зависимости не может быть ни для эллипса, ни для любой другой гладкой выпуклой фигуры.

В 1987 году, перечитывая главную книгу Ньютона [22], В. И. Арнольд предположил (см. [2] и [4]), что его теорема верна и для старших размерностей и любых областей: ни для какой области с гладкой границей в четномерном пространстве соответствующая функция объема не является алгебраической. Другая гипотеза Арнольда говорит, что в нечетномерных пространствах эта функция алгебраична только у эллипсоидов. Первая из этих гипотез — о четномерном случае — была окончательно доказана в 2013 году, вскоре после лекций на эту тему на ЛШСМ-2013; нечетномерная же задача еще ждет своего полного решения.

Эта книга посвящена рассказу про эти сюжеты и про набор соображений, позволяющих доказывать утверждения такого типа, — *теорию монодромии*. Эта теория описывает сложность продолжения функций объема (и многочисленных других функций математической физики, например поверхностных потенциалов и решений волновых уравнений) в комплексную область. Современный топологический аппарат этой науки называется *теорией Пикара—Лефшеца*, см. [18], [11]. Еще один увлекательный сюжет, возникающий в этих вычислениях и играющий ключевую роль в решении четномерной задачи, — теория групп преобразований, порожденных отражениями, о которой я тоже немного расскажу.

Благодарности. Я очень благодарен А. С. Роговой, расшифровавшей запись моих лекций на Летней школе «Современная математика» в 2013 и 2014 годах, а также В. А. Клепцыну за самоотверженный и щедрый труд по доводке и редактированию текста.

Моя работа над книгой была поддержана грантом Российского Научного Фонда № 16-11-10316.