§ 2. История и постановка задачи

Начнем с формулировки задачи, которая возникла у Ньютона в связи со вторым законом Кеплера. Пусть на вещественной плоскости нарисован *овал* (т. е. выпуклая гладкая замкнутая кривая), и мы, проводя прямую, отсекаем от ограниченной этим овалом фигуры сегмент (см. рис. 1). Сколь хорошей может быть функция на множестве всех прямых, сопоставляющая каждой прямой площадь отсекаемого ею сегмента? Например, может ли эта площадь быть многочленом от коэффициентов уравнения прямой?

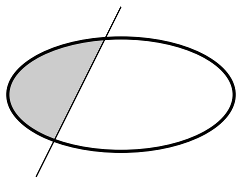

Рис. 1. Овал и отсекаемая прямой часть

Несложно увидеть, что многочленом эта функция быть не может. Действительно, попробуем немного пошевелить прямую и посмотреть, что при этом будет происходить. Ясно (хотя, конечно, формально это и нужно обосновывать), что если функция-многочлен задает площадь сегмента, лежащего слева от проводимого в данном направлении разреза, то при непрерывном движении разрезающей прямой мы всегда будем получать площадь сегмента, лежащего слева относительно выбранной ориентации нашей прямой.

Зафиксируем теперь какую-нибудь точку внутри области и будем вращать прямую, проходящую через эту точку. К моменту, когда мы развернем прямую на 180° от ее исходного положения (проводя разрез в противоположном направлении), остающейся слева от разреза окажется другая из двух частей, на которые разрезан наш овал (см. рис. 2). Получается, что наша функция-многочлен для одной и той же прямой должна принимать как значение, равное площади части, остающейся слева, так и значение, равное площади части, остающейся справа.

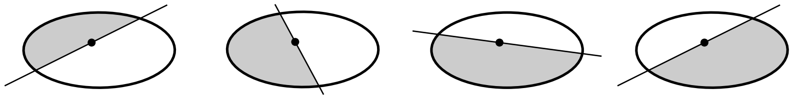

Рис. 2. Вращение прямой

Значит, такая отсекаемая площадь должна быть не совсем функцией, а чем-то, что может принимать в одной точке хотя бы два значения. Мы знаем такие «не то чтобы функции»: например, такова функция $\sqrt{x}$ от одной переменной. Конечно, можно рассматривать *арифметический* квадратный корень: положительный корень уравнения $y^2 = x$. Но применение положительности неестественно с алгебраической точки зрения (в частности, оно не обобщается на комплексные числа). Гораздо естественнее считать, что есть *два* равноправных решения уравнения $y^2 = x$ при данном x, и разрешить функции $\sqrt{x}$ принимать любое из этих значений. Как это сделать и почему это нам поможет — мы увидим чуть позднее.

Есть еще одна причина, по которой наша исходная функция, задающая площадь отрезаемого сегмента, не может быть многочленом. Рассмотрим прямые, которые вообще не проходят через нашу область. Для такой прямой значение нашей функции равно нулю или всей площади области S, в зависимости от выбора стороны.

Начнем теперь двигать прямую в сторону овала (см. рис. 3). До момента столкновения значение функции будет оставаться тождественно нулевым или тождественно равным S, а потом вдруг перестает быть таковым. Конечно, многочлены себя так не ведут — как и вообще никакие приличные функции.

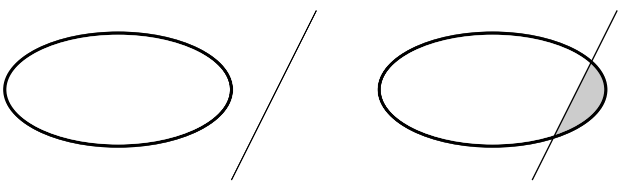

Рис. 3. Движение прямой и появление пересечения

Поэтому у нас возникает желание, чтобы каждой прямой соответствовало по крайней мере четыре значения: площадь слева и площадь справа, если прямая проходит через область, и ноль и вся ограниченная овалом площадь, на случай, если прямая область не пересекает. А как это пожелание формализовать?

К счастью, в науке есть такой класс «как бы функций», которые могут иметь несколько значений: в случае функций от одной переменной он включает уже упомянутую выше функцию $\sqrt{x}$ и вообще корень любой степени из любого многочлена от x. Это — *алгебраические функции*.

Мы знаем, что обычная функция $f(x)$ — это все равно что ее график, т. е. множество пар (x, z), связанных условием $z = f(x)$. В частности, график многочлена $f(x)$ задается уравнением $F(x, z) = 0$, где $F(x, z)$ — многочлен $z - f(x)$. Но пока функция была обычной, каждой точке x соответствовало одно значение z. А теперь, расширяя класс многочленов, мы откажемся от этого требования, попросив только, чтобы «график» новой функции задавался полиномиальным уравнением — уже от двух переменных x, z:

Определение 1. *Алгебраической функцией* от одной переменной x называется (отличный от тождественного нуля) многочлен $F(x, z)$ от двух переменных. Мы будем говорить, что z — *одно из значений* алгебраической функции в точке x, если $F(x, z) = 0$; см. рис. 4. Всё множество точек (x, z), где выполнено это уравнение, называется графиком этой функции.

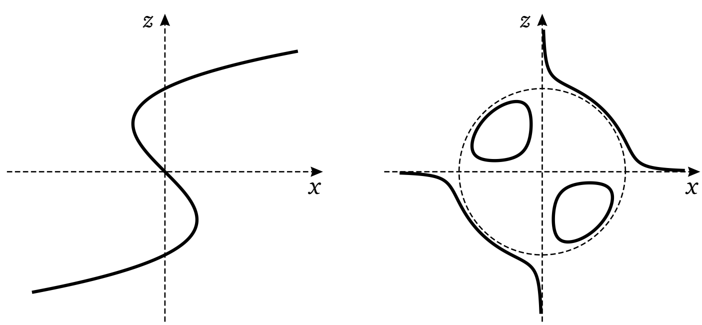

Рис. 4. Примеры алгебраических (многозначных) функций: $z^3 - z - x = 0$ слева и $(x^2 + z^2 - 1) \cdot xz - \varepsilon = 0$ справа

Так, мы сразу видим, что $\sqrt{x}$ — это алгебраическая функция: она задается многочленом $z^2 - x$. Понятно, что так же можно задать кубический корень $\sqrt[3]{x}$, корень любой степени $\sqrt[k]{P(x)}$ из любого многочлена $P(x)$ и даже из *рациональной функции* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Многомерный аналог этого понятия таков:

Определение 2. Алгебраической функцией от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется полином от $n+1$ переменной $F(x_1, \ldots, x_n, z)$, не равный тождественно нулю. Значениями этой «функции» в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ считаются все такие значения z, что $F(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$.

Используя вольность речи, часто в таком случае записывают эту функцию просто как $z(x_1, \ldots, x_n)$, имея в виду, что она может принимать не одно значение. Выбор одного из этих значений называется выбором *ветви* алгебраической функции.

Во избежание недоразумений, заметим, что тот же термин «алгебраический» используется и в другой ситуации:

Определение 3. Подмножество в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$ называется *алгебраическим*, если оно состоит из всех точек, удовлетворяющих какой-нибудь системе уравнений $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где все $f_1, \ldots, f_k$ — многочлены.

Подмножество в $\mathbb{R}^n$ называется *полуалгебраическим*, если оно состоит из всех точек, удовлетворяющих системе полиномиальных равенств и строгих полиномиальных неравенств, или является конечным объединением множеств, каждое из которых задано такой системой.

Теперь мы можем сформулировать вопрос, возникший у Ньютона:

Вопрос. *Существует ли на плоскости такая выпуклая гладкая замкнутая кривая, что функция, сопоставляющая прямой площадь сегмента, отсекаемого этой прямой от области, ограниченной этой кривой, алгебраична как функция от коэффициентов уравнения прямой?*

В соответствии с предыдущими определениями, такая алгебраичность означает, что существует ненулевая функция $F(a, b, c, V)$, которая обращается в 0 во всех таких точках (a, b, c, V), что V — площадь сегмента, отсекаемого прямой, заданной уравнением $ax + by = c$.

Откуда у Ньютона взялась такая задача? Второй закон Кеплера говорит, что планета, движущаяся по эллиптической орбите под действием силы тяготения, за равное время заметает равные секториальные площади, если смотреть из центра притяжения. То есть зависимость между временем и площадью сектора очень простая — линейная. А не получится ли так, что зависимость координаты планеты от времени будет алгебраической?

Это эквивалентно алгебраической зависимости между тангенсом угла наклона прямой, соединяющей центр притяжения и планету, и площадью сектора эллипса, ограниченного этой прямой и фиксированным лучом, выходящим из центра притяжения.

В случае эллипса сразу стало ясно (это следовало из явных формул), что такого быть не может. И Ньютон задумался, существует ли хоть одна кривая, для которой такая зависимость все-таки будет алгебраической. Правда, при приходящей из небесной механики постановке вопроса возникает площадь сектора вместо площади сегмента. Но, как мы увидим в § 3, эта замена не очень существенна.

Такой же вопрос, конечно, можно рассматривать и в любой другой размерности. Назовем телом ограниченную область в $\mathbb{R}^n$, а гиперплоскостью — плоскость размерности $n-1$.

Определение 4. Тело в $\mathbb{R}^n$ называется *алгебраически интегрируемым*, если функция, сопоставляющая любой гиперплоскости объем сегмента, отсекаемого этой гиперплоскостью от данного тела, оказывается алгебраической функцией от коэффициентов уравнения плоскости.

Вопрос Ньютона в таких терминах переформулируется так: существует ли на плоскости замкнутая выпуклая гладкая кривая, ограничивающая алгебраически интегрируемое тело? К тому, чтобы такая кривая нашлась, были некоторые оптимистические предпосылки, которые мы увидим в двух следующих пунктах.

2.1. Одномерный случай

Временно оставим плоский случай и перейдем к совсем игрушечной задаче: что происходит в одномерном случае, на прямой? Рассмотрим вместо овала отрезок, например, от точки m до M (см. рис. 5).

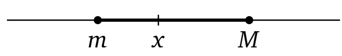

Рис. 5. Движение отрезающей точки x по отрезку $[m, M]$

Попробуем найти функцию, зависящую от x, которая удовлетворяет нашим условиям: она должна быть алгебраической и среди ее значений должны быть обе площади, отсекаемые этой точкой от всего отрезка. Это несложно сделать: рассмотрим многочлен

$$F(x, V) = V \cdot (V - V_0) \cdot (V - x + m) \cdot (V - M + x),$$

где $V_0 := M - m$ — полная длина исходного отрезка.

Заданная этим многочленом алгебраическая (четырехзначная!) функция действительно удовлетворяет нашим условиям. Если для любой точки x обозначить через V длину части отрезка $[m, M]$, лежащей с любой стороны от x, и подставить ее в нашу формулу вместе с x, то получается 0.

В случае одной переменной нетрудно было ожидать, что все получится хорошо. Замечательно, что все будет хорошо и в размерности три.

2.2. Трехмерный случай

Если в качестве «овального тела» мы рассмотрим шар в $\mathbb{R}^3$, то соответствующая функция тоже будет алгебраической. А именно, есть теорема Архимеда (иллюстрация к которой вынесена на обложку брошюры [25]):

Теорема (Архимед). *Пусть рядом поставлены шар и конус высоты, равной радиусу шара, опирающийся на окружность-основание, равное экваториальному плоскому сечению шара. Тогда для всех горизонтальных плоскостей, пересекающих конус, сумма площадей сечений конуса и шара будет одна и та же* (см. рис. 6). *В частности, эта сумма равна площади экваториального сечения.*

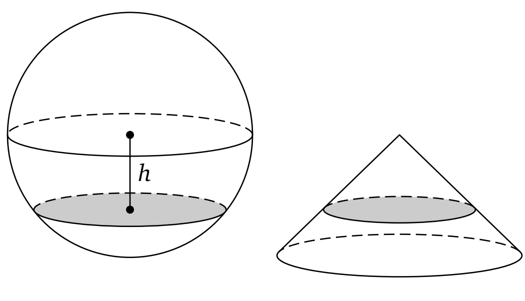

Рис. 6. Теорема Архимеда

Эта теорема легко позволяет найти объем сегмента, отсекаемого от шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии h от центра.

Задача 1. Найдите этот объем.

Указание. Из теоремы Архимеда следует, что объем такого сегмента равен разности объема цилиндра высоты $R-h$ и объема соответствующего усеченного конуса.

Ответ. $\pi R^2(R-h)-\frac{1}{3}\pi(R^3-h^3)$.

Итак, ответ в этой задаче — многочлен от числа h — расстояния от секущей плоскости до центра сферы. А как это расстояние выражается через коэффициенты секущей плоскости? Несложно увидеть, что для выражения h нам понадобится одно извлечение квадратного корня (впрочем, что менее неприятно, и деление тоже).

Задача 2. Найдите расстояние h от плоскости, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$, до точки (x_0, y_0, z_0).

Ответ. $h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

В частности, расстояние от этой плоскости до начала координат равно $\sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}$. Поэтому объем сегмента выражается через коэффициенты секущей плоскости уже не как многочлен, но все еще как алгебраическая функция. Полином $F(a,b,c,d,V)$, доказывающий это, полезно построить явно, но есть и такой общий факт: композиция алгебраических функций алгебраична. Например, подставляя алгебраическую функцию, выражающую h через коэффициенты плоскости, в многочлен, выражающий объем через h, мы получим алгебраическую функцию от этих коэффициентов. Читатель может попробовать доказать этот общий факт (это не очень сложно, но требует умения работать с симметрическими многочленами).

Функция объема сегмента будет алгебраической и если мы рассматриваем вместо шара произвольный эллипсоид. Действительно, задача об алгебраической интегрируемости *аффинно-инвариантна*. А именно, если мы сделаем какое-то линейное или аффинное преобразование нашего пространства, то плоскости перейдут в плоскости, все объемы умножатся на одну и ту же константу (определитель этого преобразования), и если наша функция была алгебраической, то она алгебраической и останется. А с другой стороны, любой эллипсоид можно аффинным преобразованием получить из шара.