Предисловие к русскому изданию

Разных геометрий много. В этой книге приводятся, как мне кажется, самые интересные и красивые.

Слово «геометрия» я понимаю не как название учебной или научной дисциплины (такой, как «дифференциальное исчисление»), а как математический *объект* (такой, как «дифференциал»). Объединяет различные геометрии то, что каждая из них, как указал Феликс Клейн в своей знаменитой *Эрлангенской программе* (1872), представляет собой *множество, на котором действует группа*.

У геометрии, как и у других важных объектов в математике, кроме индивидуальной жизни есть и жизнь общественная: они входят в некоторый социум — *категорию геометрий*, — в котором они взаимодействуют посредством *морфизмов* (так называемых *эквивариантных отображений*).

Слова *группы, морфизмы, категории* не должны ввести читателя в заблуждение: это не формально-алгебраическое или (Боже упаси) аналитическое (координатное) рассмотрение геометрических тем; достаточно взглянуть на многочисленные чертежи в нашей книге, чтобы понять, что мы постоянно придерживаемся зрительного, *наглядного подхода*.

Теория категорий не применяется в этой книге, но мы используем ее *язык*, — как читатель увидит, это очень естественно в геометрическом контексте. Так, известной фразе Кэли «Проективная геометрия — это вся геометрия» можно придать точный математический смысл с помощью термина *подгеометрия* (означающего «образ геометрии при инъективном эквивариантном отображении»). В контексте нашей книги можно перефразировать эти слова так: «геометрии, изучаемые в этой книге (включая три классические — гиперболическую, эллиптическую и евклидову), являются подгеометриями проективной геометрии».

В основном тексте книги очень мало сказано об аксиоматическом подходе к геометрии. Это одно из предубеждений автора: я считаю, что классические системы аксиом, например для евклидовой или гиперболической геометрии, безнадежно устарели и больше не принадлежат современной математике. Их место — в *истории математики* и в философии науки. Поэтому здесь они появляются лишь в одной главе, которая посвящена захватывающей истории создания неевклидовой геометрии, а подробный разбор аксиоматики Евклида и Гильберта перенесен в дополнения А и Б.

Множественное число в заглавии книги («Геометрии») означает, что, на мой взгляд, нет такого *учебного предмета*, как «геометрия», но, как уже было сказано, существуют конкретные математические объекты, которые называются геометриями. В единственном числе слово «геометрия» нужно понимать как *способ математического мышления*, в действительности изначальный: в Древней Греции слово «геометрия» служило синонимом слова «математика». Можно и нужно мыслить геометрически, работая не только с окружностями и треугольниками, но и с коммутативными диаграммами, морфизмами и группами. Знаменитая фраза над входом в платоновскую Академию:

Не знающий геометрии да не войдет в Академию

должна быть помещена и на воротах, ведущих в мир математики.

* * *

В предисловии я не буду систематически излагать содержание курса, а отошлю читателя к оглавлению. У хорошо подготовленного читателя оно может вызвать такой вопрос: почему его любимые геометрии не всегда представлены в книге среди «интересных и красивых» геометрий, обещанных выше? Позвольте высказаться по поводу некоторых тем и объяснить, почему они здесь не рассматриваются.

Прежде всего, мы не рассматриваем ни аффинную, ни евклидову геометрию, ни геометрию векторного пространства, считая, что они известны читателю. Однако книга начинается с главы под номером нуль, в которой приводятся основные сведения из евклидовой планиметрии и кое-что из стереометрии. Это связано с тем, что приведенное в книге описание других геометрий предполагает знание элементарной евклидовой геометрии, а американские студенты (для которых предназначен английский вариант этой книги), как правило, плохо с ней знакомы. Я понимаю, что русскоязычный читатель в этом отношении гораздо лучше подготовлен, но все же решил оставить на месте эту главу. В любом случае предполагается, что читатель начнет книгу с главы 1, а к главе 0 будет обращаться как к справочнику в случае необходимости.

В этой книге отсутствует *алгебраическая геометрия*, поскольку автор считает, что эта прекрасная область математики принадлежит алгебре, а не геометрии. В самом деле, математики, занимающиеся алгебраической геометрией, — типичные алгебраисты, и это верно в отношении не только великой французской школы (вслед за Гротендиком использующей его схемы), но и более классической российской школы.

Нет здесь и *дифференциальной геометрии*: классический случай малых размерностей обычно излагается в книгах по дифференциальному и интегральному исчислению (куда он на самом деле и относится), а современные исследования в более высоких размерностях являются частью анализа (под названием «анализ на многообразиях») и топологии (под названием «дифференциальная топология»).

Другие отсутствующие темы включают *выпуклую геометрию* (это часть анализа, а конкретнее — теории оптимизации, где она называется «выпуклый анализ»); *симплектическую геометрию* (это часть классической механики и теории динамических систем); *контактную геометрию* (это часть теории дифференциальных уравнений) и т. д.

Разумеется, контактная геометрия (например) формально является геометрией в смысле Клейна. И в действительности идеология групп преобразований исходит от Софуса Ли в не меньшей (если не большей) степени, чем от Феликса Клейна. Но контекст прекрасной контактной геометрии Ли — это, несомненно, дифференциальные уравнения.

* * *

Эта книга основана на лекциях, прочитанных на русском языке в рамках семестровых курсов первого года в Независимом московском университете в 2003 и 2006 годах. Я подготовил их записи на «простом английском» и разместил на сайте НМУ. Эти записи опубликованы в виде 100-страничной брошюры в Московском центре непрерывного математического образования в 2006 г. и использовались при изучении геометрии в НМУ по программе «Math in Moscow».

Краткость семестрового курса (13 лекций) заставила меня при рассмотрении классических геометрий — таких, как гиперболическая и проективная, — ограничиться двумерным случаем, с сожалением исключив трехмерный. Однако в курсе остается много возможностей для развития пространственного воображения; в общем случае все равно удобнее использовать линейно-алгебраический (координатный) подход, а не наглядно-синтетический, характерный для нашего курса. Читателю, желающему продвинуться дальше, весьма рекомендую книгу Марселя Берже [2]. Должен добавить, что при всем отличии моего подхода я по существу обязан этой замечательной книге изложением некоторых разделов курса. Для тех, кто хочет больше узнать об аксиоматическом подходе к классическим геометриям, по моему мнению, нет книги лучше, чем «Высшая геометрия» Н. В. Ефимова [6].

Важной, если не самой важной, составляющей этого курса являются задачи, которые появляются в конце каждой главы. Именно решение этих задач научит читателя — гораздо больше, чем изучение теории, — мыслить и работать как геометр. Источники задач разнообразны. Многие были «украдены» из книг, написанных моим другом и любимым соавтором Виктором Прасоловым. Во многих случаях я просто не знаю первоначального происхождения этих задач. Для использования на семинарских занятиях они были собраны вместе Ириной Парамоновой, которая добавила несколько задач, как и другие руководители семинарских занятий (Владимир Иванов и Олег Карпенков). Я благодарен всем людям, перечисленным выше, а также Михаилу Панову, Антону Понкрашову и Виктору Шувалову, создавшим компьютерные версии большинства иллюстраций; Марии Быковой, исправившей много ошибок в первоначальных записях; Виктору Прасолову, который нашел еще целый ряд ошибок в первом черновике книги; анонимным рецензентам, чья конструктивная критика оказала большую помощь. Наконец, я признателен Сергею Гельфанду, без чьей поддержки английский вариант этой книги никогда не был бы написан, Юрию Торхову, без которого не было бы русского издания, и Борису Френкину за аккуратный перевод с английского.