Глава 6

Сферическая геометрия

До сих пор мы изучали геометрии, в которых группа преобразований конечна или дискретна. В этой главе мы приступим к изучению бесконечных непрерывных геометрий, начав со сферической геометрии $(\mathbb{S}^2 : \mathrm{O}(3))$. Ей соответствует группа изометрий двумерной сферы, т. е. подгруппа всех изометрий пространства $\mathbb{R}^3$, оставляющих на месте начало координат; в курсах линейной алгебры $\mathrm{O}(3)$ называется *ортогональной группой*.

Вначале, однако, мы перечислим классические непрерывные геометрии, которые изучаются в нашем курсе. Некоторые из них, возможно, известны читателю, другие для него новы.

§ 6.1. Перечень классических непрерывных геометрий

Ниже перечислены, для дальнейших ссылок, несколько самых известных классических геометрий, в которых группы преобразований «непрерывны», а не конечны или дискретны. Мы не будем уточнять интуитивно ясное понятие непрерывной группы преобразований (для этого потребовалось бы дать определение так называемых топологических групп или даже групп Ли), поскольку мы не будем использовать это понятие в общем виде: это не требуется в нашем вводном курсе. В оставшейся части главы материал этого параграфа не потребуется, так что читатель, желающий без промедления ознакомиться со сферической геометрией, может непосредственно перейти к § 6.3.

6.1.1. *Конечномерные векторные пространства* над полем вещественных чисел являются геометриями в смысле Клейна (общее определение этих геометрий см. в гл. 1). В этом качестве их можно обозначить через

$$(\mathbb{V}^n : \mathrm{GL}(n)),$$

где $\mathbb{V}^n$ обозначает n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\mathrm{GL}(n)$ — *полную линейную группу*, т. е. группу всех невырожденных линейных отображений этого пространства в себя.

Подгеометрия такой геометрии, полученная заменой группы $\mathrm{GL}(n)$ на ее подгруппу $\mathrm{O}(n)$ (состоящую из ортогональных преобразований), называется *n-мерным ортонормированным векторным пространством* и обозначается

$$(\mathbb{V}^n : \mathrm{O}(n)).$$

Эта «геометрия» в большой степени относится к алгебре и обычно изучается в курсе линейной алгебры. Мы предполагаем, что читатель знаком с линейной алгеброй и помнит простейшие основные определения и факты из нее.

6.1.2. *Аффинные пространства* — это, неформально говоря, конечномерные пространства векторов «без фиксированного начала». Это означает, что их группы преобразований $\mathrm{Aff}(n)$ содержат, кроме $\mathrm{GL}(n)$, все параллельные переносы (т. е. преобразования пространства, состоящие в прибавлении фиксированного вектора ко всем его элементам). Обозначим соответствующую геометрию через

$$(\mathbb{V}^n : \mathrm{Aff}(n)) \quad \text{или} \quad (\mathbb{R}^n : \mathrm{Aff}(n));$$

последнее обозначение показывает, что элементами пространства теперь считаются *точки*, т. е. концы векторов (исходящих из начала координат), а не сами векторы. Это более геометричное понятие, чем понятие векторного пространства, но оно обычно также изучается в курсах линейной алгебры.

6.1.3. *Евклидовы пространства* — это геометрии, которые мы обозначим через

$$(\mathbb{R}^n : \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n));$$

здесь $\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ — группа изометрий евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. группа его преобразований, сохраняющих расстояния. В качестве подгруппы в ней содержится *ортогональная группа* $\mathrm{O}(n)$, которая состоит из всех изометрий, оставляющих начало координат на месте (группа $\mathrm{O}(n)$ должна быть знакома читателю из курса линейной алгебры); кроме того, $\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ включает подгруппу параллельных переносов.

Мы предполагаем, что читатель знает из школы евклидову геометрию для $n=2, 3$ (разумеется, там она вводится иначе, обычно с помощью некоторой модификации аксиом Евклида) и, кроме того, знаком со структурой групп изометрий евклидова пространства при $n=2, 3$.

Читатель, испытывающий затруднения в элементарной евклидовой планиметрии и стереометрии, может обратиться к гл. 0. Строгий аксиоматический подход к евклидовой геометрии в размерностях $d = 2, 3$ (основанный на аксиомах Гильберта) можно найти в дополнении Б.

Отметим, что группы преобразований этих трех геометрий (векторные, аффинные и евклидовы пространства) действуют на одном и том же пространстве ($\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{V}^n$ естественным образом отождествляются), но они задают разные геометрии, поскольку группы $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{Aff}(n)$, $\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^3)$ различны. Соответствующие геометрии в этом курсе не изучаются: по традиции это делается в курсах линейной алгебры, и мы их упомянули лишь для полноты картины.

Наш список продолжают еще три классические геометрии, которые мы будем изучать, по крайней мере в малых размерностях (в основном в размерности 2).

6.1.4. *Гиперболические пространства* $\mathbb{L}^n$ (или *пространства Лобачевского*) — это «пространства постоянной отрицательной кривизны» (что это значит, можно узнать из курса дифференциальной геометрии). Соответствующая группа преобразований — это группа изометрий гиперболического пространства (т. е. группа преобразований, сохраняющих «гиперболическое расстояние»). Мы будем изучать лишь гиперболическое пространство размерности $n = 2$, т. е. гиперболическую плоскость. Мы рассмотрим три модели гиперболической плоскости, в частности *модель Пуанкаре на круге*,

$$(\mathbb{L}^2 : \mathscr{M});$$

здесь $\mathbb{L}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$ — открытый единичный круг, а $\mathscr{M}$ — группа преобразований Мёбиуса (определение появится в гл. 7, см. с. 122), отображающих круг в себя.

Мы также рассмотрим две другие модели гиперболической плоскости (*модель на полуплоскости*, также принадлежащую Пуанкаре, и *модель Кэли—Клейна*). В главе 11 мы опишем, как попытки доказать пятый постулат Евклида привели к возникновению гиперболической геометрии, и изложим драматическую историю ее создания Гауссом, Лобачевским и Бойяи.

6.1.5. *Эллиптические пространства* $\mathbb{E}\mathrm{ll}^n$ — это «пространства постоянной положительной кривизны» (что это значит, объясняется в курсах дифференциальной геометрии). В этой главе мы рассмотрим лишь двумерный случай, т. е. эллиптическую плоскость. Перед этим мы изучим *сферическую геометрию*, которая является главной темой этой главы, но может рассматриваться и как основной строительный блок двумерной эллиптической геометрии.

6.1.6. *Проективные пространства* $\mathbb{R}P^n$ получаются из аффинных пространств, если определенным образом добавить к ним «бесконечно удаленные точки», а в качестве группы преобразований взять группу линейных преобразований так называемых «однородных координат» точек $(x_1 : \ldots : x_n : x_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$. Можно обозначить эту геометрию через

$$(\mathbb{R}P^n : \mathrm{Proj}(n)).$$

Проективная геометрия для произвольного n обычно изучается в курсах линейной алгебры. В нашем курсе мы рассмотрим *проективную плоскость* $\mathbb{R}P^2$ и лишь бегло взглянем на проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ (см. главу 12).

§ 6.2. Некоторые основные факты из евклидовой планиметрии

Ниже перечислены некоторые важнейшие факты из евклидовой планиметрии (включая современную формулировку некоторых постулатов Евклида), чтобы сравнить и противопоставить их соответствующим фактам из сферической, эллиптической и гиперболической геометрии.

I. *Существует единственная прямая, проходящая через две данные различные точки.*

II. *Существует единственный перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку.* (*Перпендикуляр* к данной прямой — это прямая, образующая четыре равных угла — *прямые углы* — с этой прямой.)

III. *Существует единственная окружность с данным центром и данным радиусом.*

IV. *Для любой точки на прямой и любого положительного числа существуют ровно две точки на этой прямой, расстояния от которых до данной точки равны данному числу.*

V. *Существует единственная прямая, параллельная данной прямой и проходящая через данную точку вне этой прямой.* (Прямая *параллельна* данной прямой, если она не имеет с ней общих точек.)

Это современная формулировка пятого постулата Евклида, который иногда называют самым важным и самым спорным научным утверждением всех времен.

VI. *Для параметров произвольного треугольника* ABC, *а именно углов* α, β, γ *при вершинах* A, B, C *и сторон* a, b, c, *противоположных этим вершинам, выполнены следующие формулы.*

(i) *Формула суммы углов*: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

(ii) *Теорема синусов*: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

(iii) *Теорема косинусов*: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

§ 6.3. Прямые, расстояния, углы, поляры и перпендикуляры на $\mathbb{S}^2$

Пусть $\mathbb{S}^2$ — единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\};$$

наша ближайшая цель — изучить геометрию $(\mathbb{S}^2 : \mathrm{O}(3))$, где $\mathrm{O}(3)$ — ортогональная группа (т. е. группа изометрий пространства $\mathbb{R}^3$, оставляющих начало координат на месте).

6.3.1. Основные определения. *Прямая* на сфере далее означает большую окружность, т. е. пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр. Например, экватор сферы, как и меридиан, — это прямая. *Угол* между двумя прямыми определяется как двугранный угол (измеренный в радианах) между двумя плоскостями, их содержащими. Например, угол между экватором и любым меридианом равен $\pi/2$. *Расстояние* между двумя точками A и B определяется как мера (в радианах) угла AOB. Таким образом, расстояние между северным и южным полюсами равно π, а расстояние между южным полюсом и любой точкой экватора равно $\pi/2$.

Очевидно, *группа преобразований* $\mathrm{O}(3)$ *сохраняет расстояния между точками.* Можно также показать (доказательство опускаем), что $\mathrm{O}(3)$ можно охарактеризовать как группу преобразований сферы, сохраняющих расстояния (понимаемые в сферическом смысле, т. е. как описано выше).

6.3.2. Полюсы, поляры, перпендикуляры, окружности. Посмотрим, что соответствует постулатам Евклида в сферической геометрии.

I$_S$. *Существует единственная прямая, проходящая через две данные различные точки, кроме случая, когда эти точки противоположны; тогда таких прямых бесконечно много.*

Примером этой особой ситуации служит совокупность меридианов, соединяющих два полюса.

II$_S$. *Существует единственный перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку, кроме случая, когда точка лежит на перпендикуляре, восставленном из центра сферы O к плоскости, содержащей эту прямую; тогда таких перпендикуляров бесконечно много.*

Примером этой особой ситуации служит экватор и, скажем, северный полюс: все меридианы проходят через полюс и перпендикулярны экватору (рис. 6.1 слева).

Более общим образом, *поляра* точки P — это (сферическая) прямая, полученная пересечением сферы плоскостью, проходящей через O и перпендикулярной к (евклидовой!) прямой PO. Обратно, если дана (сферическая) прямая l, то ее *полюсами* являются такие две противоположные точки P_l и P_l', что (евклидова) прямая P_lP_l' перпендикулярна плоскости, в которой лежит l (рис. 6.1 справа). Утверждению II$_S$ можно теперь придать следующий вид: *существует единственный перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку, кроме случая, когда точка является полюсом этой прямой; в этом случае все прямые, проходящие через полюс, перпендикулярны данной прямой.*

III$_S$. *Существует единственная окружность с данным центром C и данным радиусом ρ, если $0 < \rho < \pi$.*

Она определяется как множество всех точек, (сферическое) расстояние от которых до C равно ρ. Легко видеть, что любая (сферическая) окружность — на самом деле евклидова окружность на сфере, лежащая в плоскости, перпендикулярной к евклидовой прямой OC и проходящей через точку I этой прямой, для которой $OI = \cos\rho$. Отметим, что радиус евклидовой окружности будет меньше чем ρ.

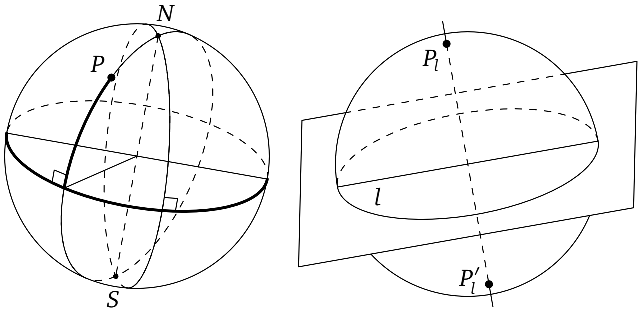

Рис. 6.1. Перпендикуляры, полюсы и поляры

Пусть дана сферическая окружность с центром C и радиусом ρ. Заметим, что ее можно рассматривать как окружность радиуса $\pi-\rho$ с центром C', где C' — антипод точки C. Заметим далее, что самая длинная окружность с центром C — поляра точки C; ее радиус равен $\pi/2$.

IV$_S$. *Для каждой точки на прямой и каждого положительного числа существуют ровно две точки на этой прямой, расстояния от которых до данной точки равны данному числу, если только это число меньше* π.

V$_S$. *Любые две прямые пересекаются в двух противоположных (антиподальных, диаметрально противоположных) точках, т. е. в двух точках, симметричных относительно центра сферы* $\mathbb{S}^2$.

Следовательно, *в сферической геометрии не существует параллельных прямых*. Если две точки A, B не противоположны, то существует лишь одна прямая, соединяющая их, а на этой прямой — единственный кратчайший отрезок с концами в A и B. Противоположные точки соединены бесконечным множеством прямых (в случае северного и южного полюсов это меридианы).

6.3.3. Прямые как кратчайшие пути. В курсах дифференциальной геометрии доказывается, что *сферические прямые являются геодезическими*, т. е. кратчайшими путями между двумя точками. При этом длина кривой определяется как криволинейный интеграл, а затем с помощью вариационного исчисления доказывается, что кривая минимальной длины (на сфере), соединяющая две точки, в действительности является дугой большой окружности, проходящей через них.

§ 6.4. Двуугольники и треугольники на сфере

6.4.1. Двуугольники. Две сферические прямые l и m пересекаются в двух (противоположных) точках P и P' и делят сферу на четыре области, которые называются *двуугольниками*. Каждый из них ограничен двумя «половинками» прямых l и m, которые называются его *сторонами*, и имеет две *вершины* (точки P и P'). Четыре области составляют две пары конгруэнтных; два конгруэнтных двуугольника из одной пары касаются друг друга в общих вершинах P и P', и их углы при этих вершинах равны. Главным параметром двуугольника является мера α угла между определяющими его прямыми; если $\alpha \neq \pi/2$, то два двуугольника, не конгруэнтные данному, называются *дополнительными к нему*, их угол равен $\pi - \alpha$. Отметим, что угловая мера α задает соответствующий двуугольник с точностью до изометрии сферы.

6.4.2. Площади фигур на сфере. Чтобы корректно описать измерение площадей фигур на плоскости, сфере и других поверхностях, нужно определить, что такое площадь и какие фигуры измеримы (т. е. имеют площадь). Для развития теории необходимо разработать методы для вычисления площади. В случае евклидовой плоскости есть несколько подходов к понятию плоскости: многие читатели, вероятно, слышали о мере Жордана; более продвинутые, возможно, изучали меру Лебега; те, кто прослушал курс анализа функций многих переменных, знают, что площади можно вычислять с помощью двойных интегралов.

В этой книге мы не будем строить строгую теорию меры для изучаемых геометрий. В данном пункте мы лишь дадим набросок аксиоматического подхода к определению площадей сферических фигур; он аналогичен теории меры Лебега на евклидовой плоскости. Согласно такому подходу имеется семейство множеств на $\mathbb{S}^2$, называемых *измеримыми*, причем выполнены следующие аксиомы.

(i) *Инвариантность*: две конгруэнтные измеримые фигуры имеют равные площади.

(ii) *Нормировка*: вся сфера измерима и имеет площадь 4π.

(iii) *Счетная аддитивность*: если измеримая фигура F является объединением счетного семейства измеримых фигур $\{F_i\}$ без общих внутренних точек, ее площадь равна сумме площадей фигур F_i.

Из этих аксиом очевидно следует, что площадь северной полусферы равна 2π, а каждый из четырех равных треугольников, на которые можно ее разделить, имеет площадь $\pi/2$.

6.4.3. Площадь двуугольника. Из аксиом, сформулированных в предыдущем пункте, легко вывести, что площадь $S_{\pi/2}$ двуугольника с угловой мерой $\pi/2$ равна π. Действительно, сфера покрывается четырьмя такими неперекрывающимися двуугольниками, конгруэнтными друг другу; они имеют равную площадь согласно аксиоме (i), сумма их площадей есть площадь сферы согласно аксиоме (iii), а последняя равна 4π согласно аксиоме (ii), откуда следует, что

$$S_{\pi/2} = \frac{4\pi}{4} = \pi.$$

В случае, когда угловая мера α двуугольника равна числу π, умноженному на рациональное число, аналогично получаем

$$S_\alpha = 2\alpha. \tag{6.1}$$

В действительности эта формула верна для любого α, но если π/α иррационально, то ее доказательство требует перехода к пределу. Поэтому мы опустим доказательство, но в дальнейшем будем использовать вышеприведенную формулу при всех значениях α.

6.4.4. Площадь треугольника. Пусть A, B, C — три различные точки сферы $\mathbb{S}^2$, причем никакие две из них не противоположны. Объединение кратчайших прямолинейных отрезков, соединяющих точки A и B, B и C, C и A, называется *треугольником* ABC. В треугольнике ABC мы всегда обозначаем через α, β, γ меру углов при A, B, C соответственно, а через a, b, c — длины сторон, противолежащих вершинам A, B, C (напомним, что длина a стороны BC равна мере угла BOC в пространстве $\mathbb{R}^3$).

Теорема 6.4.5. *Площадь S_{ABC} сферического треугольника с углами α, β, γ равна*

$$S_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Доказательство. Имеется 12 сферических двуугольников, образованных парами прямых AB, BC, CA. Выберем из них шесть, а именно те, которые содержат либо треугольник ABC, либо противоположный ему треугольник $A'B'C'$, образованный тремя точками, противоположными точкам A, B, C (рис. 6.2). Обозначим площади выбранных двуугольников через S_{I}, S'_{I}, S_{II}, S'_{II}, S_{III}, S'_{III}. Каждая точка треугольников ABC и $A'B'C'$ покрыта в точности тремя из шести выбранных двуугольников, а каждая из остальных точек сферы покрыта ровно одним таким двуугольником (не считая точек на прямых). С учетом соотношения (6.1) можно записать

$$\begin{aligned}
4\pi &= S_{\mathrm{I}} + S'_I + S_{\mathrm{II}} + S'_{\mathrm{II}} + S_{\mathrm{III}} + S'_{\mathrm{III}} - 2S_{ABC} - 2S_{A'B'C'} = \\
&= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2S_{ABC} - 2S_{A'B'C'} = \\
&= 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4S_{ABC},
\end{aligned}$$

поскольку треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют равную площадь (как конгруэнтные). Из полученной формулы следует искомое равенство. □

Из этой теоремы вытекает важное следствие.

Следствие 6.4.6. *Сумма углов любого сферического треугольника больше чем π.*

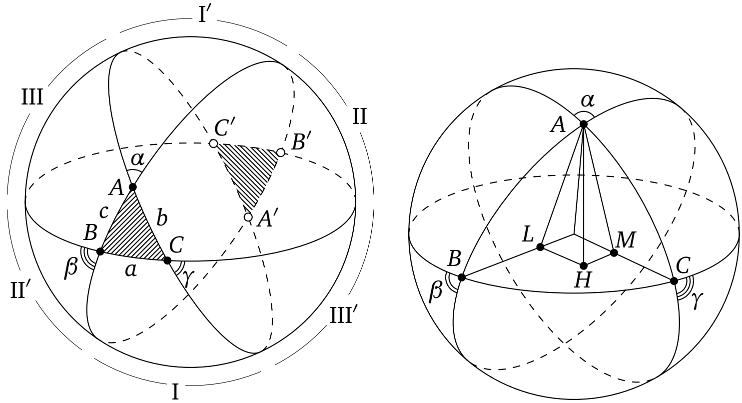

Рис. 6.2. Площадь треугольника и теорема синусов

Теорема синусов для евклидовых треугольников имеет следующий аналог в случае сферических треугольников.

Теорема 6.4.7 (сферическая теорема синусов).

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

Чтобы доказать эту формулу, потребуется следующее утверждение, которое иногда называют «теоремой о трех перпендикулярах».

Лемма 6.4.8. *Пусть $A \in \mathbb{R}^3$ — точка вне плоскости $\mathscr{P}$, точка K — ее ортогональная проекция на $\mathscr{P}$, а L — ее ортогональная проекция на прямую l, лежащую в плоскости $\mathscr{P}$. Тогда KL и l перпендикулярны.*

Доказательство. Прямая l перпендикулярна плоскости AKL, поскольку она перпендикулярна двум непараллельным прямым в этой плоскости, а именно AL и AK (последней прямой — поскольку прямая AK перпендикулярна любой прямой в плоскости $\mathscr{P}$). Следовательно, l перпендикулярна любой прямой в плоскости AKL, в частности прямой LK. □

Доказательство теоремы. Пусть H — проекция точки A на плоскость BOC, а L и M — ее проекции на прямые OB и OC (рис. 6.2). Тогда согласно лемме L и M совпадают с проекциями точки H на OB и OC. Поэтому

$$|AH| = |LA|\sin\beta = \sin c\sin\beta,$$
$$|AH| = |MA|\sin\gamma = \sin b\sin\gamma.$$

Значит,

$$\sin b : \sin\beta = \sin c : \sin\gamma.$$

Аналогично, проектируя C на плоскость AOB и рассуждая как выше, получаем $\sin b : \sin\beta = \sin a : \sin\alpha$. Отсюда непосредственно вытекает искомое равенство. □

§ 6.5. Другие теоремы о треугольниках

В этом параграфе мы сформулируем еще несколько теорем о сферических треугольниках. Их доказательства составляют предмет задач в конце главы.

Теорема 6.5.1 (первая теорема косинусов)**.**

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha.$$

Теорема 6.5.2 (вторая теорема косинусов)**.**

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

Следствие 6.5.3 (аналог теоремы Пифагора)**.** *Если в треугольнике ABC угол при вершине C прямой, то*

$$\cos c = \cos a\cos b.$$

Теорема 6.5.4. *Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.*

Теорема 6.5.5. *Высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.*

§ 6.6. Треугольники Кокстера на сфере $\mathbb{S}^2$

Мы не будем строить в полной общности теорию замощений сферы $\mathbb{S}^2$ и геометрию Кокстера на сфере, но лишь рассмотрим *треугольники Кокстера*, т. е. сферические треугольники, все углы которых имеют вид π/m, $m = 2, 3, \ldots$ Из теоремы 6.4.5 сразу вытекает, что если N экземпляров сферического треугольника Кокстера $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$ покрывают сферу, то число N удовлетворяет диофантову уравнению

$$\frac{N}{p} + \frac{N}{q} + \frac{N}{r} = N + 4.$$

Группа преобразований соответствующей геометрии Кокстера конечна, так что теорема 3.2.7 определяет возможный вид этой группы: это либо одна из групп диэдра, либо группа тетраэдра, куба или

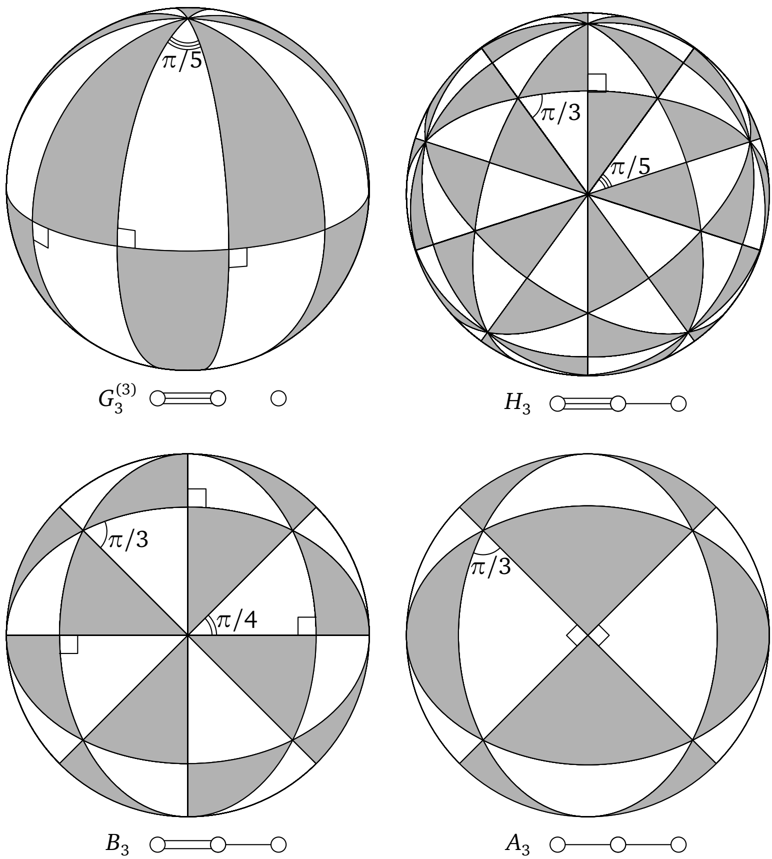

Рис. 6.3. Четыре замощения Кокстера на сфере

додекаэдра. Группы диэдра дают очевидную бесконечную серию замощений, одно из которых показано на рис. 6.3.

Три другие группы дают три возможных значения N:

$$N = 24, 48, 120,$$

и в каждом случае легко найти соответствующие значения (p, q, r). В итоге получаем все решения нашего диофантова уравнения:

$$(2, 3, 3),\ (2, 3, 4),\ (2, 3, 5),\ (2, 2, n) \quad \text{для} \ \ n = 2, 3, \ldots$$

Соответствующие замощения сферы (и их схемы Кокстера) показаны на рис. 6.3.

§ 6.7. Двумерная эллиптическая геометрия

6.7.1. Сферическая геометрия тесно связана с *эллиптической геометрией* (которую называют также геометрией Римана). Эллиптическая геометрия получается из сферической «отождествлением противоположных точек сферы $\mathbb{S}^2$». Точное определение можно сформулировать так. Рассмотрим множество $\mathbb{E}\mathrm{ll}^2$, состоящее из пар противоположных точек $(x, -x)$ на единичной сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Группа $\mathrm{O}(3)$ действует на этом множестве (поскольку изометрии сферы переводят пары противоположных точек в такие же пары) и тем самым определяет геометрию в смысле Клейна $(\mathbb{E}\mathrm{ll}^2 : \mathrm{O}(3))$, которую мы называем *двумерной эллиптической геометрией*.

Прямые в эллиптической геометрии определяются как большие окружности на сфере $\mathbb{S}^2$, углы и расстояния — как в сферической геометрии, тригонометрия также не отличается от случая сферической геометрии. Вообще можно сказать, что эллиптическая геометрия локально совпадает со сферической, но эти геометрии резко различаются глобально. В частности, в эллиптической геометрии:

• *через любые две различные точки проходит ровно одна прямая*;

• *для данной прямой и любой данной точки* (*кроме одной*, *которая называется* полюсом *этой прямой*) *существует единственный перпендикуляр к этой прямой*, *проходящий через данную точку*.

Соотношение между двумя геометриями лучше всего выражено следующим утверждением, из которого вытекают простые доказательства предыдущих фактов эллиптической геометрии.

Теорема 6.7.2. *Существует сюръективный морфизм*

$$D : (\mathbb{S}^2 : \mathrm{O}(3)) \to (\mathbb{E}\mathrm{ll}^2 : \mathrm{O}(3))$$

сферической геометрии на эллиптическую, который является локальным изоморфизмом (*в том смысле, что любая область, содержащаяся в какой-либо полусфере, отображается на свой образ биективно и изометрично*).

Доказательство. Отображение D очевидно: $D : x \mapsto (x, -x)$, а гомоморфизмом групп преобразований служит тождественное отображение. Отсюда немедленно следуют все утверждения теоремы. □

Как отмечено выше, глобально обе геометрии очень различны. Будучи метрическими пространствами, они являются топологическими пространствами (в метрической топологии), которые даже не гомеоморфны: одно из них — двусторонняя поверхность ($\mathbb{S}^2$), другое ($\mathbb{R}P^2$) — односторонняя (содержит ленту Мёбиуса).

Задачи

Во всех задачах этой главы a, b, c — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы сферического треугольника. Радиус сферы равен 1.

6.1. Докажите первую теорему косинусов для сферы $\mathbb{S}^2$: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.

6.2. Докажите вторую теорему косинусов для сферы $\mathbb{S}^2$: $\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \sin \beta \sin \gamma \cos a$.

6.3. Докажите, что $a + b + c < 2\pi$.

6.4. Верна ли в сферической геометрии теорема Пифагора? Докажите аналог этой теоремы, сформулированный в следствии 6.5.3.

6.5. Считая, что самолет летит по кратчайшему пути, выясните, проходит ли авиалиния Москва — Нью-Йорк над Испанией? А над Гренландией? Проверьте свой ответ, натянув на глобусе тонкую веревочку между Москвой и Нью-Йорком.

6.6. Найдите точную нижнюю и точную верхнюю грань суммы углов равностороннего треугольника на сфере.

6.7. Город A расположен на расстоянии 1000 км от городов B и C, траектории авиарейсов из A в B и из A в C взаимно перпендикулярны. Оцените расстояние между B и C. (Радиус Земли можно считать равным 6400 км.)

6.8*. Найдите площадь сферического диска радиуса r (т. е. области, которая ограничена сферической окружностью радиуса r).

6.9. Найдите фундаментальные области для действия групп изометрий тетраэдра, куба, додекаэдра и икосаэдра на двумерной сфере и определите количество образов фундаментальной области при соответствующем действии.

6.10. Докажите, что любой сферический треугольник имеет описанную и вписанную окружности.

6.11. Докажите, что медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

6.12. Докажите, что высоты сферического треугольника всегда пересекаются в одной точке.

6.13. Пусть медианы и высоты сферического треугольника пересекаются в точках M и H соответственно. Может ли оказаться, что $M = H$?