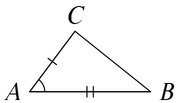
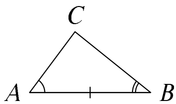
5. Признаки равенства треугольников

В равных треугольниках равны (соответственные) стороны и углы.

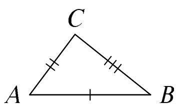
Чтобы убедиться в равенстве двух треугольников, не надо сверять *все* стороны и углы — можно воспользоваться одним из *признаков равенства треугольников.*



Первый признак: по двум сторонам и углу между ними. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.



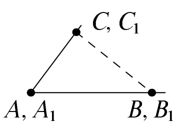
Второй признак: по стороне и примыкающим к ней двум углам. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.



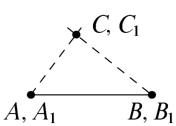
Третий признак: по трём сторонам. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

На рисунках показаны те элементы треугольника (стороны и углы), которые нужно сверять, чтобы воспользоваться этими признаками равенства треугольников.

Наглядное объяснение, почему эти признаки верны, совсем просто для первого и второго признаков и немного сложнее для третьего.

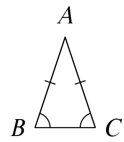


Первый признак. По предположению углы A и A_1 равны. Совместим их друг с другом так, чтобы отрезок AB пошёл вдоль A_1B_1, а AC — вдоль A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, то точки B и B_1 при таком наложении совпадут. Аналогично точки C и C_1 тоже совпадут. Значит, все три вершины треугольников совместятся.

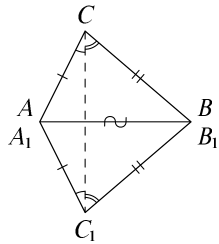


Второй признак. Наложим сторону AB на равную ей сторону A_1B_1, причём так, чтобы точка A наложилась на A_1, точка B наложилась на B_1, а точки C и C_1 оказались по одну сторону от AB. Тогда в силу равенства углов A и A_1 прямая AC наложится на A_1C_1 (хотя мы пока не знаем, совместятся ли точки C и C_1). По аналогичным причинам прямая BC наложится на B_1C_1. Значит, точка C, в которой пересекаются прямые AC и BC, наложится на точку C_1, и треугольники совместятся.

Для *третьего признака* нам понадобится вспомогательное замечание: если в треугольнике две стороны равны, то и противолежащие им углы равны. (Такой треугольник называют *равнобедренным.*) В самом деле, пусть в треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Перевернём его так, чтобы точка A наложилась на себя, но сторона AB пошла по AC и наоборот. Поскольку $AB = AC$, то точка B наложится на точку C и наоборот. Значит, угол B совместится с углом C, то есть они равны.

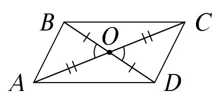


Теперь уже можно перейти к третьему признаку равенства треугольников. Приложим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ друг к другу сторонами AB и A_1B_1 так, чтобы C и C_1 оказались по разные стороны. Треугольники ACC_1 и BCC_1 равнобедренные, поэтому одинаково обозначенные на рисунке углы равны. Сложив их, получим, что углы C и C_1 равны, остаётся воспользоваться первым признаком.



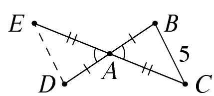
Эти объяснения не являются «строгим доказательством», как говорят математики, но тем не менее довольно убедительны.

76. В четырёхугольнике точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам. Докажите, что противоположные стороны этого четырехугольника равны.

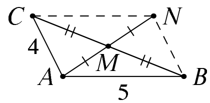


▷ Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, а O — точка пересечения его диагоналей. Отметим на рисунке пары равных по условию отрезков — одну пару одинарной чёрточкой, другую — двойной. Кроме того, отметим вертикальные (и, следовательно, равные) углы AOB и COD. Теперь есть все условия для применения первого признака равенства к треугольникам AOB и COD (две стороны и угол между ними). Из равенства этих треугольников заключаем, что $AB = CD$. Рассмотрев два других треугольника (каких?), аналогичным образом убеждаемся, что $BC = AD$. ◁

77. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A взята точка D, причём $AD = AB$. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A взята точка E, причём $AE = AC$. Найдите расстояние между точками D и E, если $BC = 5$.



▷ Эта задача решается почти так же, как предыдущая. По условию в треугольниках ABC и ADE (в котором надо провести ещё сторону ED) равны по две стороны: $AB = AD$, $AC = AE$. Углы BAC и DAE являются вертикальными, и потому тоже равны. По первому признаку равны и треугольники, так что $ED = BC = 5$. ◁

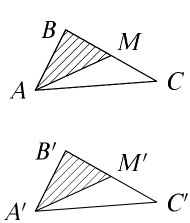


78. В треугольнике ABC медиана AM (отрезок, соединяющий вершину A с серединой M стороны BC), продолжена за точку M на расстояние, равное AM. Найдите расстояние от полученной точки до точек B и C, если стороны AB и AC равны соответственно 5 и 4.

▷ Пусть N — конец продолженной медианы, так что N лежит на продолжении AM за точку M и $AM = MN$. Тогда в четырёхугольнике $ABNC$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, так что можно сослаться на уже решённую задачу и увидеть, что противоположные стороны четырёхугольника равны, то есть $NB = AC = 4$, $NC = AB = 5$. ◁

79. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC медиана AM не превосходит полусуммы сторон AB и AC.

▷ Нам надо доказать, что удвоенная медиана не превосходит суммы $AB + AC$. В предыдущей задаче как раз была построена удвоенная медиана AN, которая была стороной треугольника ABN, две другие стороны которого AB и $BN = AC$. Остаётся сослаться на неравенство треугольника. ◁



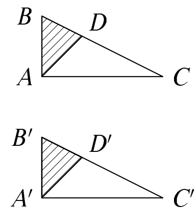
80. Пользуясь первым признаком равенства треугольников, докажите, что в двух равных треугольниках медианы, проведенные к соответственным сторонам, равны.

▷ Пусть ABC и $A'B'C'$ — эти треугольники (равные стороны и углы обозначены одинаковыми буквами), AM и $A'M'$ — проведённые в них медианы (так что M — середина BC, а M' — середина $B'C'$). Посмотрим на треугольники ABM и $A'B'M'$.

В них равны углы B и B', стороны AB и $A'B'$, а также стороны BM и $B'M'$ (как половины равных сторон BC и $B'C'$). Поэтому эти треугольники равны по первому признаку, и соответственные стороны (в том числе те, которые являются медианами) равны.

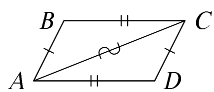
Заметим, что мы с тем же успехом могли бы использовать треугольники AMC и $A'M'C'$. ◁

81. Пользуясь вторым признаком равенства треугольников, докажите, что в двух равных треугольниках биссектрисы, делящие соответственные углы пополам, равны.



▷ (В задаче идёт речь, конечно, об отрезках биссектрис до противоположной стороны.) Пусть AD и $A'D'$ — такие отрезки. Следуя решению предыдущей задачи, рассмотрим треугольники ABD и $A'B'D'$ — в них равны стороны AB и $A'B'$, а также углы B и B'. Кроме того, угол DAB равен углу $D'A'B'$, так как они составляют половины равных углов CAB и $C'A'B'$. Остаётся воспользоваться вторым признаком равенства треугольников. ◁

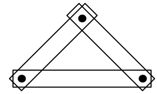
82. В четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны. Докажите, что противоположные углы в нём равны. (Такие четырёхугольники называются *параллелограммами* и мы к ним ещё вернёмся).



▷ Пусть $ABCD$ — такой четырёугольник. Проведём в нём диагональ, например, AC. Она разобьёт его на два треугольника ABC и ADC, к которым можно применить третий признак равенства треугольников — сторона AC у них общая, а две другие пары сторон равны по условию. Значит, равны и все углы, в частности, и углы B и D.

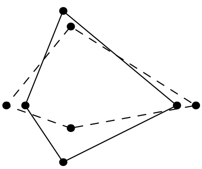
Аналогичное рассуждение (с какими треугольниками?) показывает, что углы A и C равны. ◁

83. Три балки соединены болтами по концам (см. рисунок). Полученная конструкция будет жёсткой, хотя вокруг болтов балки могут проворачиваться. Какой признак равенства треугольников является тому причиной?



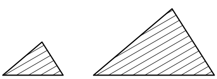
▷ Балки являются сторонами треугольника, а болты — его углами. Возможность вращения в точках крепления означает, что углы треугольника не фиксированы. Зато длины сторон — расстояния между отверстиями в балках — меняться не могут, и третий признак равенства треугольников гарантирует, что углы тоже меняться не могут. ◁

84. Верно ли такое утверждение: если в двух четырёхугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие стороны равны ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и т.д.), то четырёхугольники равны?



▷ Вспоминая предыдущую задачу, можно сформулировать вопрос так: будет ли жёстким шарнирный четырёхугольник? Сразу ясно, что нет — взявшись руками за противоположные вершины, можно сдвигать их и раздвигать. На рисунке показаны два положения шарниров — два различных четырёхугольника с соответственно равными сторонами. ◁

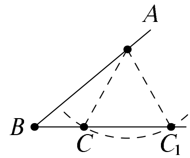
Все три признака равенства треугольников имеют один и тот же общий вид: треугольник определяется некоторыми тремя элементами однозначно. (В первом признаке это две стороны и угол между ними, во втором — сторона и два прилегающих угла, в третьем — три стороны.) Не следует думать, однако, что эти три элемента могут быть любыми. Например, мы увидим дальше, что три угла не определяют треугольник однозначно — бывают треугольники одинаковой формы, но разного размера (см. рисунок). Такие треугольники называют *подобными*, и мы к ним ещё вернёмся.



Более хитрый пример, когда треугольник не определяется тремя элементами, даёт следующая задача:

85. Приведите пример треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, но которые тем не менее не равны.

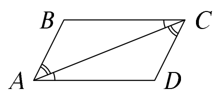
Эта задача показывает, что в признаке равенства треугольников «по двум сторонам и углу между ними» нельзя пропустить слова *между ними*: если равны углы, противолежащие двум равным сторонам, это не гарантирует равенства треугольников.



▷ Нарисуем острый угол с вершиной B. На одной стороне возьмём какую-нибудь точку A. На другой стороне с помощью циркуля найдём две точки C и C_1 на равном расстоянии от A. Тогда треугольники ABC и ABC_1 будут искомыми. ◁

Ещё несколько задач

86. Диагональ делит выпуклый четырёхугольник на два равных треугольника. Докажите, что другая диагональ делит четырёхугольник либо на два равных треугольника, либо на два равнобедренных треугольника.



87. В четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Оказалось, что «накрест лежащие» углы при этой диагонали равны: $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle ACB$. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника равны.