§ 8

ГЕОМЕТРИЯ ПОЛНА ПРИКЛЮЧЕНИЙ

Геометрия полна приключений, потому что за каждой задачей скрывается приключение мысли. Решить задачу — это значит пережить приключение. Конечно, если задача вам понравилась. Я приглашаю читателя принять участие в некоторых подобных «приключениях».

Задача 1. Ищите площадь

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны по 90°, каждая из сторон BC, CD и AE равна 1 и сумма сторон AB и DE равна 1 (рис. 82). Докажите, что площадь пятиугольника равна 1.

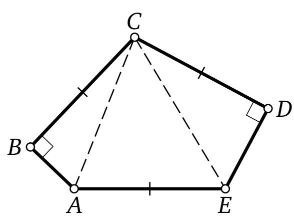

Рис. 82

Решение. Разрежем пятиугольник по диагоналям AC и CE. Получили три треугольника ACE, ABC и EDC. Из двух последних составим один треугольник, приложив их друг к другу равными сторонами. Площадь его равна $1/2$ (высота — 1, основание — 1), и он равен треугольнику ACE по трем сторонам. Значит, площадь пятиугольника равна 1, что и требовалось доказать.

Задача 2. Правильный треугольник

Точка, взятая внутри равностороннего треугольника, соединена со всеми вершинами. Кроме того, из нее опущены перпендикуляры на все стороны треугольника. Три из образовавшихся шести треугольников через один закрасим (рис. 83). Докажите, что сумма площадей закрашенных треугольников равна сумме площадей незакрашенных треугольников.

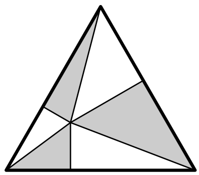

Рис. 83

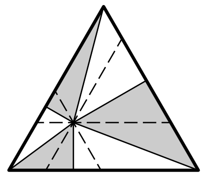

Рис. 84

Решение. Через общую вершину шести треугольников проведем прямые, параллельные всем сторонам равностороннего треугольника (рис. 84). В результате равносторонний треугольник распадется на шесть пар равных треугольников так, что в каждой паре один закрашен, а другой нет.

Задача 3. Граница розетки

Через фиксированную точку плоскости проходят несколько окружностей радиуса 1 так, что круги, ими ограниченные, в своем объединении образуют розетку, содержащую внутри себя эту фиксированную точку (рис. 85). Определите длину границы этой розетки.

Решение. Проведем окружность радиусом 2 с центром в фиксированной точке O, о которой говорится в условии; длина этой окружности, т. е. 4π, как раз и равна длине границы розетки. В самом деле, граница розетки распадается на дуги окружностей радиуса 1, а длина каждой такой дуги равна длине ее проекции из центра O на окружность радиуса 2 (рис. 86).

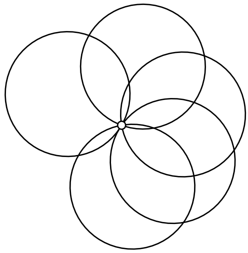

Рис. 85

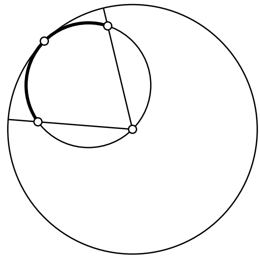

Рис. 86

Задача 4. Черно-белый квадрат

Через точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (рис. 87). Части, на которые квадрат оказался разрезанным, через одну закрашены. Докажите, что площадь закрашенных частей равна половине площади квадрата.

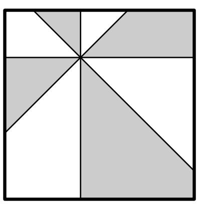

Рис. 87

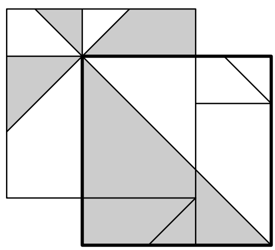

Рис. 88

Решение. На рис. 88 показано, что из кусков квадрата можно сложить квадрат так, что под диагональю будут находиться только закрашенные куски, а над диагональю — незакрашенные.

Задача 5. Неравенство в треугольнике

Внутри треугольника отмечена точка M. Пусть L — длина наибольшего из отрезков, соединяющих точку M с вершинами, а l — длина наименьшего из отрезков, соединяющих точку M с серединами сторон треугольника. Докажите, что $L \geqslant 2l$.

Решение. Соединим точку M со всеми вершинами и серединами сторон треугольника ABC (рис. 89). Если хотя бы один из отрезков AM, BM, CM будет не менее чем вдвое больше хотя бы одного из отрезков MP, MR, MQ, то и максимальный из отрезков, соединяющих точку M с вершинами, будет не менее чем вдвое больше минимального отрезка, соединяющего эту точку с серединами сторон. Выберем из углов AMB, BMC, CMA тот, который не меньше 120°. Пусть это будет угол AMC, тогда сумма углов MAP и MPC не больше 60°. Приставим теперь треугольник MCP к треугольнику AMP так, чтобы сторона PC совпала со стороной PA (рис. 90). Вершина M попадет в точку M_1. Получится треугольник M_1AM. При этом угол M_1AM не больше 60°. Следовательно, один из углов AM_1M и AMM_1 не меньше 60°. Пусть это угол AM_1M. Как известно, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, поэтому $AM \geqslant MM_1 = 2MP$. Значит, $L \geqslant 2l$.

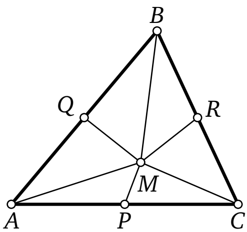

Рис. 89

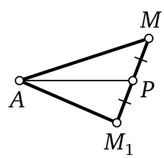

Рис. 90

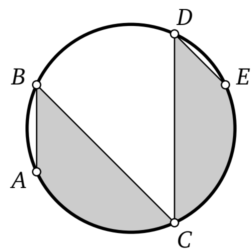

Рис. 91

Задача 6. Зигзаг в круге

У ломаной $ABCDE$ все вершины лежат на окружности (рис. 91). Углы в вершинах B, C и D равны по 45°. Докажите, что площадь закрашенной части круга равна половине его площади.

Решение. Проведем в круге еще четыре отрезка: AD, EF — равный и параллельный AB, FC — равный DE и

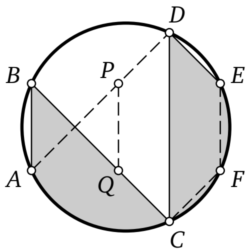

Рис. 92

PQ — равный и параллельный EF (рис. 92). Круг разбился на пять пар равных частей, причем в каждой паре одна часть закрашена, а другая нет.

Задача 7. Отношение площадей

Вокруг прямоугольника описан четырехугольник так, что две противоположные вершины прямоугольника являются серединами двух противоположных сторон четырехугольника (рис. 93). Докажите, что площадь прямоугольника равна половине площади четырехугольника.

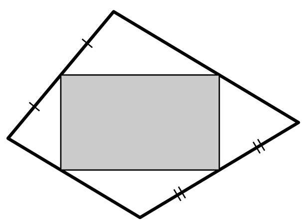

Рис. 93

Решение. Перегнем наш четырехугольник по сторонам прямоугольника так, чтобы «выступающие» уголки четырехугольника оказались внутри прямоугольника (рис. 94). Из равенства $AX = BX$ следует, что точки A и B переходят в одну и ту же точку E, а из равенства $DQ = CQ$ — что точки C и D переходят в некоторую точку F. Из равенства углов EPQ и DPQ следует, что точка F

лежит на прямой PE, а из равенства углов BYX и XYE — что точка F лежит на прямой YE. Если прямые PE и YE не совпадают, то точка F совпадает с точкой E пересечения этих прямых (рис. 95, *а*). Если же прямые PE и YE совпадают, то получаем расположение, показанное на рис. 95, *б*. В обоих случаях уголки без перекрытий накрывают весь прямоугольник, а отсюда следует утверждение задачи.

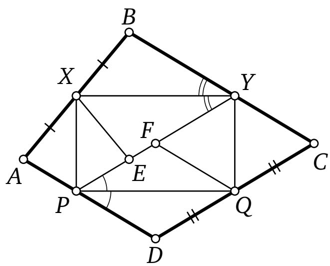

Рис. 94

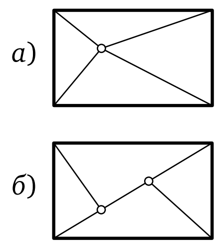

Рис. 95

Задача 8. Два квадрата

Два квадрата расположены так, что две соседние вершины первого квадрата находятся на соседних сторонах второго, а одна из вершин второго квадрата лежит на стороне первого (рис. 96). Докажите, что отрезок, соединяющий две общие точки границ квадратов, проходит через центр первого квадрата.

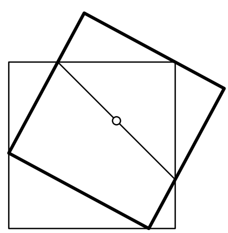

Рис. 96

Решение. Нетрудно заметить, что пунктирный прямоугольник, описанный около первого квадрата, сам является квадратом (рис. 97). Поэтому высоты подобных прямоугольных треугольников MB_1C и CC_1N, опущенные на их гипотенузы, равны. Но тогда и сами эти треугольники равны, а значит, равны и их катеты: $MB_1 = CC_1$, $B_1C = C_1N$. Но тогда $ND_1 = MB_1$, откуда следует, что отрезок MN проходит через центр первого квадрата.

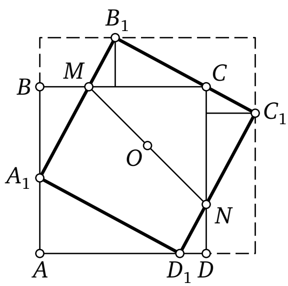

Рис. 97

Задача 9. Два угольника

Два равнобедренных угольника приложены друг к другу так, как показано на рис. 98, *а*. Контур, который они при этом образовали, представляет собой невыпуклый четырехугольник. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами квадрата.

Решение. Прямоугольные треугольники ACM и BMD (см. рис. 98, *б*) равны по двум катетам, следовательно, $AC = BD$. Отрезок BM — высота треугольника ABD и, так

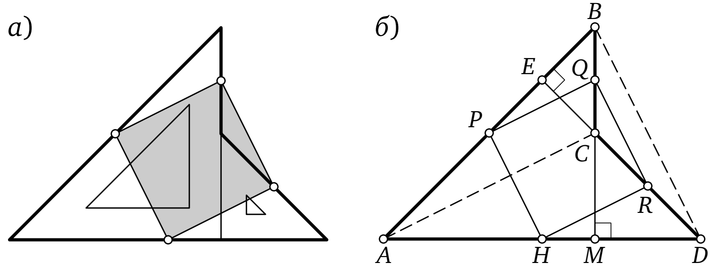

Рис. 98

как углы BAM и DCM равны по 45°, то DE — также высота этого треугольника. Следовательно, C — точка пересечения высот, поэтому прямые AC и BD перпендикулярны. Так как PQ и QR — средние линии в треугольниках ABC и BCD, то эти отрезки равны и перпендикулярны[1]. Значит, в параллелограмме $PQRH$ смежные стороны PQ и QR равны и перпендикулярны, т. е. $PQRH$ — квадрат.

Задача 10. Квадрат внутри квадрата

Внутри квадрата расположен меньший квадрат. Вершины квадратов соединили так, как показано на рис. 99; при этом образовались четыре четырехугольника. Докажите, что суммы площадей противоположных четырехугольников равны.

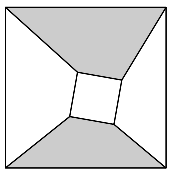

Рис. 99

Решение. Задача допускает различные решения. Одно из них основано на том, что при параллельном переносе внутреннего квадрата в вертикальном или горизонтальном направлении сумма площадей противоположных четырехугольников остается неизменной.

Задача 11. Сечение тетраэдра

Сечение правильного тетраэдра — четырехугольник. Докажите, что его периметр не меньше удвоенного ребра тетраэдра.

[1]Равенство и перпендикулярность отрезков AC и BD можно доказать иначе. При повороте с центром M на 90°, например, по часовой стрелке образами точек A и C являются точки B и D соответственно, поэтому образом отрезка AC является отрезок BD.

Решение. Развертка правильного тетраэдра изображена на рис. 100. При развертке контур четырехугольного сечения превратился в ломаную линию MN. Так как длина ломаной, соединяющей концы отрезка, не меньше длины отрезка, то длина ломаной MN не меньше удвоенного ребра. Равенство достигается лишь в случае, когда сечение параллельно двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.

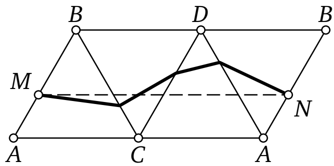

Рис. 100

Задача 12. Черно-белый треугольник

Через точку O внутри равностороннего треугольника проведены прямые, проходящие через его вершины. В результате получились 6 треугольников, три из которых через один закрасили. Докажите, что если сумма площадей закрашенных треугольников равна половине площади равностороннего треугольника, то точка O лежит на одной из медиан этого треугольника.

Решение. Примем сторону равностороннего треугольника равной 2 и обозначим длины отрезков AC_1, BA_1 и CB_1 через $1+a$, $1+b$ и $1+c$ соответственно. Тогда длины отрезков C_1B, A_1C и B_1A равны $1-a$, $1-b$, $1-c$ соответственно (рис. 101). Заметим, что сумма площадей треугольников ABB_1, BCC_1 и CAA_1 равна полутора площадям треугольника ABC. Если обозначить высоту треугольника ABC через h, то это равенство можно записать следующим образом: $0{,}5h(1-a)+0{,}5h(1-b)hm+0{,}5h(1-c)=$ $=1{,}5h$, или $a+b+c=0$.

С другой стороны, отношение площадей треугольников AOC и BOC равно $(1+a):(1-a)$, так как у них общее основание OC, а высоты относятся как $(1+a):(1-a)$.

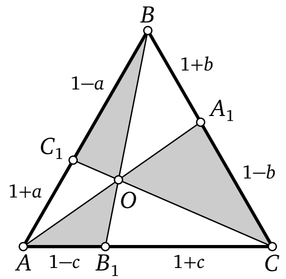

Рис. 101

Аналогично отношение площадей треугольников AOB и AOC равно $(1+b):(1-b)$, а отношение площадей треугольников BOC и AOB равно $(1+c):(1-c)$. Перемножим эти отношения и заметим, что площадь каждого из трех треугольников AOB, AOC и BOC по одному разу встречается в числителе и в знаменателе, т. е. это произведение равно 1. Отсюда следует[1], что

$$(1+a)(1+b)(1+c)=(1-a)(1-b)(1-c).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $(a+b+c)+abc=0$. Но $a+b+c=0$, следовательно, $abc=0$. Это означает, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно 0, т. е. точка O лежит на одной из медиан.

Задача 13. Выпуклый шестиугольник

Каждая из трех прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник, $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — середины его сторон (рис. 102). Отрезки M_1M_4 и M_2M_5 делят площадь шестиугольника пополам. Поэтому четырехугольники PM_1BM_2 и PM_4EM_5, где P — точка пересечения отрезков M_1M_4 и M_2M_5, равновелики.

[1]Это равенство также можно получить, используя теорему Чевы.

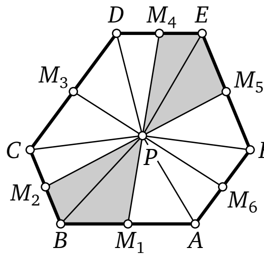

Рис. 102

Площади четырехугольников $PABC$ и $PDEF$ вдвое больше площадей четырехугольников PM_1BM_2 и PM_4EM_5 соответственно и поэтому они также равны между собой. Отсюда следует, что ломаная M_3PM_6 делит площадь шестиугольника пополам, как и отрезок M_3M_6. А это значит, что точка P лежит на отрезке M_3M_6, что и требовалось доказать.

Задача 14. Восьмиугольник на части

Правильный восьмиугольник разделен диагоналями на части, как показано на рис. 103. Докажите, что суммы площадей фигур с одним и тем же номером равны друг другу.

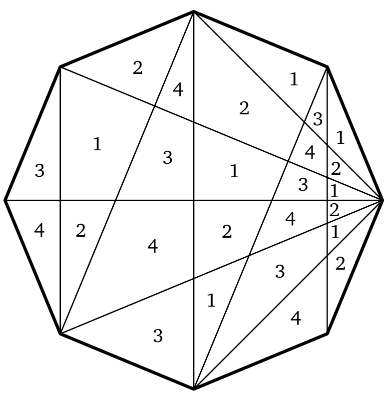

Рис. 103

Решение. Глядя на рис. 103, нетрудно заметить, что сумма площадей 3-кусков и 4-кусков равна половине площади восьмиугольника, точно так же общая площадь 4-кусков и 2-кусков равна половине всей площади и общая площадь 3-кусков и 1-кусков равна половине всей площади. Отсюда следует, что площадь 3-кусков равна площади 2-кусков, а площадь 1-кусков равна площади 4-кусков. С другой стороны, проведя дополнительные линии, как показано на рис. 104, мы разобьем 1-куски на девять многоугольников и 2-куски на девять точно таких же многоугольников. Значит, площадь 1-кусков равна площади 2-кусков. Поэтому площадь кусков каждого вида равна четверти площади восьмиугольника.

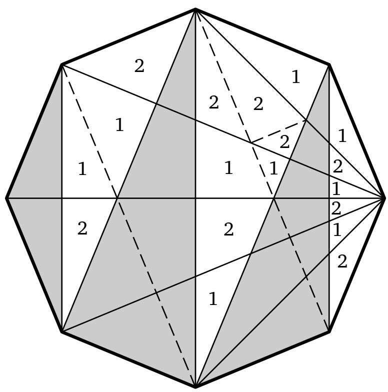

Рис. 104

Для демонстрации этой задачи можно заранее, используя фломастеры или цветные карандаши, изготовить плакат. Правильный восьмиугольник, раскрашенный в четыре цвета, выглядит весьма красиво!