Предисловие

> — Пишете? — вяло спросил Ухудшанский.
> — Специально для вас, — ответил великий комбинатор.
>
> *И. Ильф, Е. Петров «Золотой телёнок»*

В последние годы всё больше школьников начинают интересоваться математикой довольно рано. Чем это хорошо и чем плохо, обсуждать здесь не будем. Признаем свершившийся (точнее, свершающийся на наших глазах) факт: пик обучения «олимпиадной» математике сдвигается с уроков в старших специализированных классах на разные формы работы, от кружков и летних школ до тех же спецклассов, но уже для пяти-, шести- и семиклассников. В том возрасте, в котором многие годы считалось достаточным заинтересовать учеников и подготовить их к будущему «настоящему обучению», теперь требуется учить по-настоящему.

Не все разделы математики одинаково эффективно переносятся на несколько лет раньше. Возрастные особенности никуда не делись. Пятиклассникам по-прежнему проще считать, чем доказывать. Они норовят перебирать случаи, а не рассуждать универсально. Но ведь именно с этого — перебора вариантов и ответа на любимый детьми вопрос «Сколько?» — и начинается комбинаторика! Кроме того, в ней не слишком мало и не слишком много видов стандартных задач-одноходовок, решать которые может натренироваться почти любой ученик. Поэтому при грамотном преподавании комбинаторика усваивается в 5—6 классах ничуть не хуже традиционной школьной программы. Этим она выгодно отличается от большинства традиционных олимпиадных тем, связанных со строгими доказательствами.

Цель данной книжки — адаптировать «краткий курс комбинаторики» для кружка в 5—6 классах. Раз уж появилось слово «цель», самое время задуматься о целях изучения комбинаторики в этом возрасте.

Цель, лежащая на поверхности: изучить заранее комбинаторную часть курса теории вероятностей и статистики, на который в 7—9 классах вечно не хватает времени. Но это лучше делать со всем классом, а не на кружке. Предлагаемый нами путь к этой цели тоже приведёт, но далеко не самым экономичным путём.

Цель поглубже: научить организации вычислений. Посчитать число элементов множества, где элементы не перечислены явно, а описаны свойствами, — часто встречающаяся задача. Для её решения умение логично мыслить и анализировать важнее знания формул. Тем более важно начать эти навыки прививать с юных лет.

А что совсем в глубине? То же, что и всегда: развитие математического мышления. Если конкретнее, умение строить математические модели. Этим модным словосочетанием методисты любят называть составление уравнения по условию текстовой задачи. Ну хорошо, иногда системы или даже неравенства. Но арсенал базовых математических моделей, доступных школьнику, гораздо разнообразнее: графы, таблицы, последовательности букв или цифр (то есть слова или многозначные числа) и т. д. Их можно использовать не только при решении трудных олимпиадных задач, доступных немногим, но и для стандартизации типовых задач. И полезно учиться строить модели посложнее, комбинируя базовые.

Деятельность многих выпускников, получивших хорошее математическое образование, сегодня связана с информатикой. Профессия аналитика становится массовой. Завтра массовые профессии наших лучших учеников будет называться по-другому. Но, скорее всего, на рабочем месте они по-прежнему будут решать прикладные задачи математическими методами. С чего начинается решение новой задачи? С вопросов: «Не решал ли я или кто-то ещё подобную задачу? Как решилась та задача? Как модифицировать готовое решение и применить его в новых условиях?»

Хотите дать своим ученикам конкурентное преимущество в будущем? Учите их переводить внешне разные задачи на удобный язык и видеть, что задача на самом деле одна и та же. Или, без всякого перевода на какой-то особый язык, просто узнавать, что задача похожа на вчерашнюю и решать её можно точно так же. Комбинаторика — очень удобная область для развития таких навыков. В этом и состоит стратегическая цель, а вовсе не в разучивании конкретных типов задач, которые мало где встретятся, кроме контрольной работы или олимпиады.

Сведение задачи к решённой ранее или вообще к стандартной модели в комбинаторике часто называют *кодированием*. Идея кодирования и связанного с ним родства задач красной нитью проходит через всю книжку. Наиболее подробно она обсуждается на третьем, пятом и шестом занятиях. Но подготовка к её восприятию начинается с первого занятия (придание точкам буквенных имён для удобства записи решения), продолжается на втором (неоднократно решается одна и та же задача подсчёта пар в разных формулировках) и активно повторяется на восьмом занятии. Постепенно вводятся модели, к которым удобно сводить комбинаторные задачи:

- клетки таблицы (с первого занятия);
- числа как строки цифр (с первого занятия);
- строки символов (с третьего занятия);
- слова как строки букв, включая бессмысленные (с пятого занятия).

В предварительном комментарии к пятому занятию подробно описаны методы установления родства задач, а на шестом предлагается закрепить их в игровой форме.

От стратегической цели вернёмся к тактической: перенести изучение основ комбинаторики в 5—6 классы. Её достижению мешают мифы, которые хотелось бы развеять.

1. На первом этапе надо объяснить, что такое перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без них, натренировать решать задачи этих шести типов и не путать их. Это неправда. Многие победители олимпиад и даже профессиональные математики «знают по имени» только два из шести: перестановки и сочетания (без повторений), которые широко используются в математике. Это не мешает им успешно решать задачи.

2. Решение комбинаторных задач требует знания формул и алгебраической культуры. И это неправда. Подсчёт стоимости трёх двадцатирублёвых шоколадок не требует ведь знания формулы про цену, количество и стоимость в общем виде?

3. Комбинаторные задачи нестандартны и требуют сообразительности. Это тоже неправда. Нестандартной может быть

или не быть задача из любой области. Как раз в комбинаторике много стандартных задач, решаемых по одинаковым схемам.

4. Раз основных типов задач немного, можно обучить комбинаторике за шесть занятий, по одному на каждый тип задач. А лучше за 4, по одному на правила умножения, сложения, вычитания и деления. Ну-ну... Почему бы заодно не попробовать изучить текстовые задачи за три урока, по одному на задачи на движение, работу и проценты? А когда не получится, перенести изучение текстовых задач в старшие классы.

Последний вопрос риторический. И дело не только в разнообразии текстовых задач и сложности некоторых из них. Вообще (почти) никого (почти) ничему нельзя научить за одно занятие. Рассказать можно, а научить нет. Да и за два занятия тоже почти никого почти ничему. Где взять время на несколько занятий по каждому из четырёх правил?

Ответ известен и реализуется на хорошем школьном уроке. Позавчерашнее повторили, вчерашнее углубили, сегодняшнее узнали и слегка потренировали, на завтрашнее намекнули. В таком стиле мы и старались составлять занятия для этой книжки. Вместо набора независимых ярких сюжетов мы предлагаем одновременное развитие многих линий. Каждое занятие имеет название, подчёркивающее его основное содержание. Но чем важнее идея, тем шире она распространяется и на другие занятия. Поясним это на примере *дерева перебора*, которое мы считаем вторым по важности после кодирования методом решения комбинаторных задач. Наиболее подробный разговор о деревьях ведётся на пятом занятии, что ясно из его названия. Но эпизодически деревья используются начиная с самого первого занятия (вначале как иллюстрация к уже решённой задаче), а на третьем — довольно интенсивно. На шестом занятии подчёркивается роль деревьев в установлении родства задач-одноходовок, а на седьмом «составные» деревья используются в задачах, комбинирующих сложение и умножение.

Наряду с общими методами комбинаторики (к уже названным кодированию и деревьям добавим счёт по группам, правила умножения, сложения, вычитания и деления) ученики постепенно знакомятся с джентльменским набором типовых задач:

- подсчёт неупорядоченных пар (занятие 2),
- подсчёт строк символов (размещений) с повторениями (занятие 3) и без (занятие 5),
- подсчёт всех подмножеств данного множества (занятие 3),
- подсчёт перестановок (занятие 5),
- подсчёт сочетаний (занятие 8).

Каждый тип задач неоднократно повторяется на последующих занятиях. Перестановки с повторениями и сочетания с повторениями не вошли в этот выпуск.

Специальное внимание уделяется развитию общекультурных навыков:

- использование «маленьких случаев» для угадывания ответа и для самоконтроля,
- решение задачи двумя способами для самоконтроля и для доказательства формул,
- использование геометрических иллюстраций (в том числе графов, таблиц, кругов Эйлера).

Все перечисленные методы помогают не только найти количество элементов некоторого множества, но и осознать структуру этого множества. Вопрос «Сколько?» провоцирует учителя поскорее вооружить ученика формулами. Но формулы вторичны, а первично умение перечислять все элементы множества. В этой книжке с явного перечисления «маленьких» множеств начинается знакомство с каждым типом задач. При переходе к «большим» множествам перечисление не теряет актуальности. Вопрос «Перечислите все...» трансформируется в описание, как можно было бы перечислить все элементы множества (например, разбив случаи на группы или частично изобразив дерево перебора). В некоторых задачах требуется найти элемент множества, находящийся при перечислении на определённом месте.

Сложную структуру (каждая тема изучается на нескольких занятиях, каждое занятие преследует несколько целей) трудно транслировать без потерь. Цели занятия и роли конкретных задач поясняются в комментариях, расположенных в начале каждого занятия и после некоторых задач. Вместо лаконичных решений ко многим задачам предлагаются подробные обсуждения, включающие также возможные пути к решению, связи с другими задачами, анализ полученного ответа и т. п. К некоторым задачам предложено более одного решения. Стоит ли тратить время на второе решение? Стоит, если это способ показать или закрепить полезный метод. Здесь важен баланс. Какие-то задачи разбирает учитель, обращая внимание на все важные с его точки зрения детали. Другие решают ученики так, как им удобнее, лишь бы правильно. Какие-то из них учитель в конце занятия разберёт, какие-то нет. Разделение задач на задачи для разбора и для самостоятельного решения условно и зависит от особенностей конкретного кружка. Организовать индивидуальную работу и повторение поможет список дополнительных задач, часть из них новые, часть являются переформулировками известных.

Школьникам, работающим с книгой самостоятельно, мы предлагаем сначала познакомиться с условиями задач очередного занятия по раздаточным материалам в конце книжки и порешать их, затем проверить себя по ответам, вынесенным в отдельный раздел, и подумать ещё, если ответ не сходится. И лишь после этого прочитать полный текст занятия.

В 1969 году была впервые опубликована замечательная книга Н. Я. Виленкина и др. «Комбинаторика», адресованная старшеклассникам и первокурсникам. Похоже, все русскоязычные бумажные и электронные пособия по комбинаторике вышли из неё, как из гоголевской шинели. Через 25 лет адаптированный для учеников 6—9 классов курс комбинаторики был изложен в изданной в 1994 году книге С. А. Генкина и др. «Ленинградские математические кружки». С тех пор прошло ещё 25 лет. Авторы постарались осмыслить и частично изложить накопившийся за это время опыт работы летних математических школ (в первую очередь Кировской) и кружков. Мы надеемся, что предложенные занятия помогут освоить основы комбинаторики любознательным ученикам 5—6 классов массовой школы. Вопросы следующего уровня вынесены в отдельный выпуск. К ним, в частности, относятся связь дерева перебора с алфавитным порядком перечисления, правило деления, соответствие, треугольник Паскаля, метод шаров и перегородок.