Глава 6

XVIII век

XVIII век в математике — это век Эйлера и французских математиков: Лагранжа, Лежандра, Лапласа.

XVIII век в математике был веком активной разработки и исследования обширных новых территорий анализа. Математики не справлялись с наплывом новых идей и не могли должным образом заботиться о строгости доказательств. Развивались новые области, возникшие из анализа: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, вариационное исчисление, дифференциальная геометрия.

Поначалу при работе с бесконечными рядами (даже расходящимися) не соблюдались никакие предосторожности. Получаемые при этом неверные результаты считались парадоксами и никак не объяснялись. Неверные результаты получались не только для расходящихся рядов, но и для условно сходящихся. Очень много дискуссий и споров вызвал ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$ С одной стороны, его сумма равна 0, поскольку она равна $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$ С другой стороны, она равна 1, поскольку

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1.$$

А если эту сумму мы обозначим S, то получим $S=1-S$, поэтому $S=\frac{1}{2}$. По-другому последний результат можно получить, положив $x=1$ в разложении $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$ Гвидо Гранди (1671—1742) полагал, что эти рассуждения доказывают, что мир мог быть создан из ничего.

В XVIII в. было много попыток геометрической интерпретации комплексных чисел, но они не пользовались успехом — комплексные числа не становились более приемлемыми. В XVIII в. никто всерьёз не заботился о логической обоснованности действительных и комплексных чисел.

В начале XVIII в. интенсивно обсуждался вопрос о форме Земли. Ньютон на основании своих теоретических рассуждений сделал вывод, что экваториальный радиус на $\frac{1}{230}$ больше полярного. (В действительности это на 30 % больше правильного значения.) Затем в 1720 г. Жак Кассини (1677—1756) сделал измерения и пришёл к обратному выводу: полярный радиус на $\frac{1}{95}$ больше экваториального. В 1730-е годы Французская академия наук отправила две экспедиции — одну в Лапландию, под руководством Мопертюи (в этой экспедиции был также Клеро), а другую в Перу. Мопертюи пришёл к выводу, что экваториальный радиус на $\frac{1}{178}$ больше полярного. Этот результат был менее точен, чем результат Ньютона.

Абрахам де Муавр (1667—1754)

После отмены Нантского эдикта, когда во Франции возобновились преследования протестантов, Муавр был вынужден покинуть Францию и с 1688 г. жил в Лондоне.

В 1697 г. Муавр опубликовал рекуррентное правило образования коэффициентов разложения в бесконечный ряд выражения

$$(az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^n,$$

в том числе и для рациональных n. Но доказательство он привёл только для натуральных n.

Формула Муавра впервые появилась в статье 1707 г., посвящённой решению некоторых специальных уравнений. Формулу из этой статьи можно записать в виде

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha + i\cos n\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha - i\cos n\alpha}.$$

Эта формула легко выводится из формулы $(\sin\alpha + i\cos\alpha)^n = \sin n\alpha + i\cos n\alpha$, которую сейчас обычно называют *формулой Муавра*. Эту формулу впервые получил не Муавр, а Эйлер.

Муавр обратил внимание, что уравнение деления дуги гиперболы на n равных частей чрезвычайно похоже на уравнение деления на n равных частей дуги окружности.

С 1718 г. Муавр опубликовал несколько работ по теории вероятностей. Развивая закон больших чисел Якоба Бернулли, он получил локальную и интегральную предельные теоремы. Впоследствии эти теоремы снова открыл Лаплас, и их называют *предельными теоремами Муавра—Лапласа*. Муавр вывел *нормальный закон распределения*. В связи с исследованиями азартных игр Муавр подробно изучил свойства рекуррентных последовательностей в нескольких работах

(1718—1730). В частности, Муавр строил общее решение однородного линейного разностного уравнения с помощью корней соответствующего алгебраического уравнения; он разобрал примеры, когда это уравнение имеет равные действительные корни и даже два комплексных корня.

Муавр разработал метод производящих функций для решения следующей задачи: какова вероятность того, что на n рулетках с f секторами (с номерами от 1 до f) в сумме получится $p+1$? Мономы функции $f(r)=1+r+r^2+r^3+\ldots+r^{f-1}=\frac{1-r^f}{1-r}$ соответствуют f различным секторам рулетки, а искомый ответ — это коэффициент при мономе степени $p+1-n$ функции $g(r)=(f(r))^n$.

В 1730 г. Стирлинг сообщил Муавру о найденном им ряде для $n!$, и в том же году Муавр дал более простой вывод этого ряда, причём впервые указал закон образования его коэффициентов, в которые входят числа Бернулли. Муавр также привёл асимптотическое равенство $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, которое получается, если ограничиться первыми тремя членами ряда. Это равенство часто называют *формулой Стирлинга*, хотя у Стирлинга этой формулы нет.

Джироламо Саккери (1667—1733)

В 1733 г., незадолго до смерти, итальянский монах-иезуит Саккери опубликовал книгу «Евклид, очищенный от всех пятен» (Euclides ab omni nævo vindicatus). Сначала он доказал три утверждения:

• если сумма углов одного треугольника меньше 180°, то сумма углов любого треугольника меньше 180°;

• если сумма углов одного треугольника равна 180°, то сумма углов любого треугольника равна 180°;

• если сумма углов одного треугольника больше 180°, то сумма углов любого треугольника больше 180°.

В исследованиях Саккери важную роль играл четырёхугольник $ABCD$, в котором углы A и B прямые, $AD=BC$ (рис. 6.1). Четы-

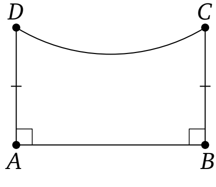

Рис. 6.1

рёхугольник такого вида получил название *четырёхугольника Саккери*, хотя идея рассмотрения такого четырёхугольника восходит к Насир ад-Дину ат-Туси. Можно доказать, что $\angle C = \angle D$. Если оба эти угла прямые, то выполняется пятый постулат Евклида. Саккери рассматривает два случая: 1) эти углы тупые; 2) эти углы острые.

При гипотезе тупого угла Саккери быстро приходит к противоречию. При этом он использует другие аксиомы Евклида, в частности, аксиому о том, что прямую можно сколь угодно продолжать. (В сферической геометрии такой аксиомы нет, и в сферической геометрии гипотеза тупого угла выполняется.) Он показывает, что в случае гипотезы тупого угла любые две прямые пересекаются, поэтому выполняется пятый постулат Евклида (действительно, пятый постулат заключается в том, что при определённых условиях прямые пересекаются). А если выполняется пятый постулат, то справедлива гипотеза прямого угла.

При гипотезе острого угла Саккери доказывает, что две прямые расположены одним из трёх способов:

- они пересекаются;
- они имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они удаляются друг от друга;
- в одном направлении они бесконечно сближаются, а в другом бесконечно расходятся.

Третий случай показался ему странным и противоречащим природе прямой линии, и он сделал (неверный) вывод, что гипотеза острого угла ложна. Такое доказательство не удовлетворило и его самого, поэтому он продолжил рассуждения. Саккери рассмотрел множество точек, равноудалённых от прямой (эквидистанту). Он понимал, что в случае гипотезы острого угла эта линия не является прямой. Но он ошибся в вычислении дуги эквидистанты: у него получилось, что она меньше расстояния между основаниями перпендикуляров, проведённых к прямой. А с другой стороны, эти перпендикуляры расходятся, поэтому получилось противоречие.

Саккери получил гораздо больше следствий из гипотезы острого угла, чем его предшественники. Но он не понимал, что доказал важные теоремы новой геометрии (геометрии Лобачевского).

Джакопо Франческо Риккати (1676—1754)

В 1723 г. Риккати впервые поставил вопрос: найти все m, при которых уравнение

$$dy + y^2 dx = ax^m dx$$

допускает разделение переменных. Как выяснилось, переменные разделяются, если $m = \frac{-4k}{2k-1}$, где k — целое число. Эти значения нашли сам Риккати и несколько других математиков; первым этот результат опубликовал Даниил Бернулли (1724). Это уравнение обычно называют *специальным уравнением Риккати*. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

называют *общим уравнением Риккати*.

Джон Мэчин (1680—1751)

Астроном из Лондона Джон Мэчин предложил оригинальный способ вычисления числа π. Этот способ основан на использовании дуги, тангенс которой рационален и в то же время некоторое её кратное мало отличается от $\frac{\pi}{4}$. Пусть $\operatorname{tg}\varphi = p$ и $\operatorname{tg} n\varphi = q$. Тогда

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - n\varphi\right) = \frac{1-q}{1+q} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{4} = n\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1-q}{1+q} = n \operatorname{arctg} p + \operatorname{arctg}\frac{1-q}{1+q}.$$

В частности, если $n = 4$ и $p = \frac{1}{5}$, то $q = \frac{120}{119}$ и

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Последняя формула получила название *формула Мэчина*. С её помощью Мэчин быстро вычислил 100 десятичных знаков числа π.

Роджер Коутс (1682—1716)

В 1709—1713 годах Коутс (Котс) помогал Ньютону в подготовке второго издания «Математических начал натуральной философии». Ньютон доверил ему написать обширное предисловие к новому изданию.

Коутс опубликовал только одну статью. Эта статья в «Philosophical Transactions» за 1714 г. (вышла из печати в 1717 г.) посвящена логарифмической функции, которую он вводит как решение функционального уравнения $f(x^n) = nf(x)$. В этой статье содержится также соотношение $\ln(\cos x + i\sin x) = ix$, равносильное знаменитой формуле Эйлера. В этой же статье Коутс приводит метод нахождения рациональных приближений как подходящих непрерывных дробей.

Из-за преждевременной смерти Коутса многие его важные результаты остались неопубликованными. В частности, он получил разложение $a^n - x^n$ на квадратичные множители вида $a^2 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + x^2$ и аналогичное разложение $a^n + x^n$. Коутс первым получил разложение числа e в непрерывную дробь. Он первым сформулировал и геометрически обосновал правила дифференцирования тригонометрических функций (синуса, тангенса, секанса).

Коутс заметил, что когда прямая вращается вокруг точки, среднее гармоническое точек пересечения этой прямой с кривой степени n движется по некоторой прямой l. Для кривой степени 2 (коники) эта прямая l — поляра точки относительно коники.

Джулио Карло де Тоски ди Фаньяно (1682—1766)

В 1695 г. Иоганн Бернулли поставил задачу о нахождении кривых, сумма или разность дуг которых равна дуге окружности или отрезку прямой. Этой задачей заинтересовался любитель математики граф Фаньяно. Он исследовал дуги эллипсов, гипербол и лемнискат и открыл формулы сложения этих дуг (1716); это были первые теоремы сложения эллиптических интегралов. Фаньяно нашёл алгебраический способ деления на n частей квадранта лемнискаты Бернулли для $n = 2\cdot 2^m$, $n = 3\cdot 2^m$ и $n = 5\cdot 2^m$, где m — натуральное число. В память об этих открытиях на надгробии Фаньяно изображена лемниската.

Фаньяно известен также своими исследованиями геометрии треугольника. Он доказал, что если X — центр масс треугольника ABC, то $XA^2 + XB^2 + XC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

В 1750 г. Фаньяно собрал свои работы и издал их в двухтомной книге «Математические произведения» (Produzioni matematiche). Эйлера в 1751 г. попросили написать рецензию на эту книгу. Эйлер заинтересовался результатами Фаньяно о сложении эллиптических интегралов и разработал общую теорию таких интегралов.

Джордж Беркли (1685—1753)

В 1734 г. Беркли выпустил памфлет «Аналитик» (The Analyst: a Discourse addressed to an Infidel Mathematician) с остроумной и во многом справедливой критикой принципов анализа; он подверг критике как подход Ньютона, так и подход Лейбница. Метод анализа он считал несогласным с логикой: его можно рассматривать только как некую догадку, но не как метод научного доказательства. Невозможно понять, что такое приращение текущих величин в самом начале их зарождения или исчезновения: «Они не есть ни конечные величины, ни величины бесконечно малые, но они и не нули. Разве мы не имеем права назвать их призраками (ghosts) исчезнувших величин?» (цит. по: *Дж. Беркли.* Сочинения. М.: Мысль, 1978. С. 426). Невозможно представить себе мгновенную скорость, т. е. скорость в данное мгновение и в данной точке. В предложенном Ньютоном выводе флюксии степенной функции x^n Беркли усматривал нарушение логики: сначала составляется отношение приращения функции $(x+o)^n - x^n$ к приращению аргумента o, а затем принимается, что приращение исчезает. Но если при выводе предложения принималось некое допущение, а в конце это допущение отвергается или заменяется противоположным, то всё рассуждение теряет силу. И как вообще можно говорить об отношении между вещами, не имеющими величины?

Правильность результатов, получаемых с помощью анализа, Беркли объясняет наличием в аналитических рассуждениях двух противоположных и взаимно уничтожающихся ошибок. Такое же мнение высказал Лагранж в 1761 г.

Критику Беркли приходилось учитывать, и многие пытались применить в анализе строгие методы древнегреческих математиков.

Брук Тейлор (1685—1731)

Основное сочинение Тейлора — «Прямой и обратный метод приращений» (Methodus Incrementorum Directa et Inversa, 1715). В нём получена общая теорема о разложении функции в степенной ряд (*ряд Тейлора*). За три года до этого Тейлор сообщал её в письме Джону Мэчину. Специальный вид своего ряда, ошибочно называемый *рядом Маклорена*, Тейлор тоже привёл, но не дал ему никакого применения.

Тейлор исходит из интерполяционной формулы Ньютона, выведенной для конечного приращения $h = n\Delta x$:

$$f(a+h) - f(a) = h\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots(h-(n-1)\Delta x)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n},$$

где

$$\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a),$$
$$\Delta^2 f(a) = \Delta(\Delta(f(a)) = f(a+2\Delta x) - 2f(a+\Delta x) + f(a)$$

и т. д. Тейлор делает предельный переход $\Delta x \to 0$ и, не заботясь о том, что число членов разложения неограниченно возрастает, делает вывод, что для любой функции $f(x)$ имеет место разложение

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{df(a)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2f(a)}{dx^2} + \ldots$$

Книга Тейлора привлекла внимание к дальнейшей разработке теории конечных разностей. В этой же книге получены правило дифференцирования обратной функции и формула замены переменных, введено интегрирование по частям, на языке механики и геометрии получено дифференциальное уравнение малых колебаний струны. Тейлор нашёл решение уравнения малых колебаний струны и получил выражение основной частоты колебаний струны через натяжение и линейную плотность. Тейлор ввёл также понятие особого решения дифференциального уравнения. Так он назвал решение, которое не получается подстановкой некоторого значения константы в выражение для общего решения дифференциального уравнения. Особое решение — это огибающая семейства общих решений.

В том же 1715 г. издана книга Тейлора «Линейная перспектива» (Linear Perspective), в которой разработаны основные принципы перспективы.

Николай Бернулли (1687—1759)

Николай Бернулли — племянник Якоба и Иоганна Бернулли. Переписываясь с Лейбницем в 1712—1716 г., он показал, что последовательность $(1+x)^n$ расходится при $x > 0$.

В письме 1743 г. к Эйлеру Николай Бернулли пишет, что с рядами нельзя обращаться как с многочленами бесконечной степени; в частности, нельзя рассматривать суммы корней этих «многочленов», как делал Эйлер. Он также обращал внимание, что для вычислений нельзя использовать расходящиеся ряды. Эйлер же настаивал, что расходящийся ряд имеет определённое значение, соответствующее значению того алгебраического выражения, из которого этот ряд получен. (Эйлер здесь подразумевал степенные ряды.) Эйлер утверждал, что такое определение суммы расходящегося ряда ещё ни разу не привело его к противоречию. Николай Бернулли на это возражал, что двум разным выражениям может соответствовать один и тот же ряд, поэтому сумма ряда может быть не единственной. Но это не убедило Эйлера, поскольку Бернулли не привёл кон-