

Оглавление

Введение

0.1. Зачем эта книга	9
0.2. Основная идея	11
0.3. Содержание и используемый материал	12
0.4. Задачи	13
0.5. Для специалистов	14
0.6. Благодарности	15
0.7. Обозначения и соглашения	16

§ 1. Графы на плоскости

1.1. Введение и основные результаты	17
1.2. Словарик по теории графов	18
1.3. Графы и раскраски карт на плоскости	20
1.4. Доказательство формулы Эйлера	22
1.5. Планарность дисков с ленточками	25
1.6. Планарность утолщений	28
1.7. Иероглифы и ориентированные утолщения*	31
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	32

§ 2. Наглядные задачи о поверхностях

2.1. Примеры поверхностей	40
2.2. Разрезания и вырезания	44
2.3. Графы на поверхностях и раскраски карт	47
2.4. Неравенство Эйлера для сфер с ручками	48
2.5. Реализуемость иероглифов	50
2.6. Реализуемость ориентированных утолщений	52
2.7. Топологическая эквивалентность (гомеоморфность)	53
2.8. Неориентируемые поверхности*	55
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	60

§ 3. Векторные поля на плоскости

3.1. Введение и основные результаты	72
3.2. Гомотопность ломаных	74
3.3. Векторные поля	75
3.4. Гомотопность векторных полей	76
3.5. Непрерывные отображения	78
3.6. К теоремам Брауэра и Борсука—Улама	79

3.7. Гомотопность непрерывных отображений	81
3.8. Число оборотов вектора	81
3.9. Поднятия и их применения	83
3.10. Гомотопическая классификация векторных полей	85
3.11. Отображения между окружностью и сферой	86
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	87

§ 4. Векторные поля на двумерных поверхностях

4.1. Введение и основные результаты	95
4.2. Векторные поля и гомотопии для сферы	96
4.3. Классификация векторных полей на торе	98
4.4. Векторные поля на других поверхностях	99
4.5. Двумерные подмногообразия	100
4.6. Теорема Эйлера—Пуанкаре	103
4.7. Касательные векторные поля общего положения	104
4.8. Построение векторных полей по триангуляции	106
4.9. Другое построение векторных полей*	110
4.10. Нормальные векторные поля*	112
4.11. Гомологический инвариант векторных полей*	113
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	116

§ 5. Двумерные многообразия

5.1. Введение и основные результаты	118
5.2. Примеры гиперграфов	121
5.3. Тела и гомеоморфность графов	122
5.4. Тела и гомеоморфность гиперграфов	123
5.5. Локально евклидовы гиперграфы	124
5.6. Эйлерова характеристика гиперграфа	126
5.7. Ориентируемые триангуляции 2-многообразий	128
5.8. Регулярные окрестности и клеточные подграфы	130
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	131

§ 6. Гомологии двумерных многообразий

6.1. Критерий ориентируемости	132
6.2. Циклы	133
6.3. Гомологичность циклов	135
6.4. Гомологии и первый класс Штифеля—Уитни	137
6.5. Вычисления и свойства группы гомологий	139
6.6. Форма пересечений: мотивировка	140
6.7. Форма пересечений: определение и свойства	141
6.8. Препятствие Уитни к вложимости*	143
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	145

§ 7. Инволюции*

7.1. Примеры инволюций	148
7.2. Классификация инволюций	151
7.3. Другой подход к классификации инволюций	153

§ 8. Векторные поля на многомерных многообразиях

8.1. Векторные поля в евклидовом пространстве	155
8.2. Степень отображения	157
8.3. Гомотопическая классификация отображений в сферу	159
8.4. Многомерные многообразия	160
8.5. Векторные поля на многомерных многообразиях	162
8.6. Существование векторных полей	163
8.7. Векторные поля на трехмерной сфере	165
8.8. Оснащенные зацепления	168
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	169

§ 9. Наборы векторных полей

9.1. Введение и основные результаты	172
9.2. Параллелизуемость на двумерном подмногообразии	174
9.3. Погружения и лемма о подмногообразии*	176
9.4. Ориентируемость трехмерных многообразий	178
9.5. План доказательства теоремы Штифеля	181
9.6. Неформальное описание препятствующего класса*	182
9.7. Доказательство леммы о препятствии	183
9.8. Характеристические классы для 4-многообразий	187
9.9. Характеристические классы для n -многообразий	189
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	192

§ 10. Гомологии многомерных многообразий

10.1. Различение трехмерных многообразий	198
10.2. Многомерные гиперграфы и их гомеоморфность	199
10.3. Многомерные многообразия	201
10.4. Клеточные разбиения и эйлерова характеристика	203
10.5. Одномерные гомологии	204
10.6. Общее определение групп гомологий	207
10.7. Определение умножения пересечения в гомологиях	209
10.8. Двойственность Пуанкаре для 3-многообразий	210
10.9. Двойственность Пуанкаре для n -многообразий	211
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	213

§ 11. Дальнейшие применения гомологий

11.1. Невложимость в коразмерности 1	217
--	-----

11.2. Гомологии пары и двойственность Лефшеца	219
11.3. Последовательность пары	220
11.4. Сигнатура	221
11.5. Последовательность Майера—Виеториса	222
11.6. Двойственность Александера—Понтрягина	224
11.7. Двойственность Александера для многообразий	226
11.8. Последовательности Бокштейна и Кюннета*	227
11.9. Пример Милнора нестандартной сферы	228
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	231

§ 12. Непогружаемость и невложимость

12.1. Введение и основные результаты	235
12.2. Наборы нормальных полей	236
12.3. Непогружаемость в коразмерности 1	238
12.4. Непогружаемость в коразмерности 2	240
12.5. Доказательство леммы Уитни о препятствии	242
12.6. Тривиальность касательных классов*	243
12.7. Степени двойки и классы Штифеля—Уитни*	244
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	247

§ 13. Расслоения и их применения

13.1. Простейшие расслоения	248
13.2. Векторные расслоения	250
13.3. Сумма векторных расслоений	252
13.4. Классификация расслоений*	253
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	256

§ 14. Гомотопическая классификация отображений

14.1. Фундаментальная группа	257
14.2. Накрытия	259
14.3. Теоремы о фундаментальной группе	260
14.4. Гомотопические группы	261
14.5. Последовательность расслоения	263
14.6. Гомотопические группы сфер	265
14.7. Теоремы Уайтхеда и Гуревича	266
14.8. Последовательность вложения*	268
14.9. Реализация циклов подмногообразиями*	269
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	271

§ 15. Классификация погружений и вложений

15.1. Погружения окружности в плоскость	274
15.2. Выворачивание сфер наизнанку	276

15.3. Классификация погружений многообразий	278
15.4. набросок доказательства теоремы Кервера	279
15.5. Заузливание вложений	282
15.6. Инвариант дополнения	283
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	286
§ 16. Инварианты кобордизма многообразий	
16.1. Введение	288
16.2. Базовые утверждения о кобордантности	289
16.3. Числа Штифеля—Уитни	290
16.4. Классы Понтрягина*	292
16.5. Числа Понтрягина и формула Хирцебруха*	293
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	294
Литература	296