

Предисловие

Несколько лет назад я стал собирать примеры удачного применения линейной алгебры, и вот перед вами получившаяся коллекция. Эти примеры в основном принадлежат к главным сферам моих научных интересов — комбинаторике, геометрии и информатике. Большинство из них математические — относятся к доказательству теорем, но некоторые посвящены разумным способам вычислений, т. е. алгоритмам. Появление методов линейной алгебры часто оказывается неожиданным.

В некоторый момент я стал называть примеры из этой коллекции «миниатюрами». Потом я решил, что название «миниатюра» подходит, если полное изложение результата, с предварительными сведениями и всем прочим, занимает не больше четырёх печатных страниц (формата А4). Это правило абсолютно произвольно, как и многие другие правила, но в нём есть рациональное зерно — а именно, такой объём обычно без труда излагается за 90 минут (стандартная продолжительность лекции в университетах, где мне случалось преподавать). Разумеется, есть и отступления от этого правила, например шестистраничные миниатюры, которые я не смог заставить себя исключить.

Очевидно, коллекцию можно расширять до бесконечности, но я счёл, что тридцать три — достаточно удачное число, чтобы на нём остановиться.

Изложение предназначено в основном для лекторов (мне приходилось преподавать почти всё, что сюда включено), а также для студентов, которым интересны красивые математические идеи, даже если они требуют определённых размышлений. Надеюсь, что материал получился готовым для изучения, а подробности, предоставленные читателю, действительно не содержат каверз.

У читателя предполагается знание основ линейной алгебры, а также некоторое знакомство с многочленами и с терминологией геометрии и теории графов. Уровень трудности разных разделов различен, и в целом я их упорядочил, начиная от самых, по моему мнению, доступных и переходя к более трудным.

Я хотел сделать каждый раздел в основном независимым от других. При хорошей вузовской подготовке можно, например, начать

с раздела 24. Такой подход противоположен обычному построению учебника математики, где материал излагается последовательно и если надо понять что-то на странице 123, то обычно надо понять предыдущие 122 страницы или, если повезёт, подходящие 38.

Разумеется, «антиучебниковое» построение иногда приводит к скучным повторениям и, что, может быть, ещё более важно, накладывает ограничения на возможную степень освоения материала. С другой стороны, я верю, что здесь есть и преимущества: я бросил читать несколько учебников задолго до страницы 123, осознав, что между короткими, как правило, периодами чтения я не мог удержать в памяти ключевые определения (имеющие маленьких детей поймут, о чём я говорю).

Прочитав несколько разделов, читатель может усмотреть одинаковые схемы в некоторых доказательствах. Их можно долго обсуждать, но я решил исключить всякие общие рассуждения о линейно-алгебраических методах.

В этом тексте нет ничего оригинального, и некоторые примеры достаточно хорошо известны и появлялись во многих публикациях (а иногда и в других моих книгах). Ниже перечислено несколько основных источников. Я добавил также ссылки на исходные публикации, когда смог их найти. Однако я свёл исторические замечания к минимуму и уделил лишь ограниченное внимание происхождению обсуждаемых идей. (Приношу извинения авторам, чьи работы упомянуты в недостаточной степени или совсем не упомянуты, и прошу сообщать мне о таких случаях.)

Буду также признателен за сообщения об опечатках и предложения по улучшению изложения.

Дальнейшее чтение

Превосходным учебником может служить

Babai L., Frankl P. Linear Algebra Methods in Combinatorics (Preliminary version 2). Department of Computer Science, The University of Chicago, 1992.

К сожалению, эта книга никогда не публиковалась официально. С некоторым усилием её можно получить лишь в качестве записок лекций Чикагского университета. Она содержит некоторые темы, рассмотренные здесь, а также массу другого материала подобного рода и очень удачное изложение некоторых разделов линейной алгебры.

Алгебраической теории графов посвящены, например, книги
Biggs N. Algebraic Graph Theory. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993

и

Godsil C., Royle G. Algebraic Graph Theory. New York: Springer, 2001.

Вероятностные алгоритмы в духе разделов 11 и 24 хорошо разобраны в книге

Motwani R., Raghavan P. Randomized Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

Благодарности. За ценные комментарии к предварительным вариантам этой книги заслуживают благодарности Отфрид Чонг, Эстер Эзра, Нати Линиал, Яна Максова, Хелена Никлова, Ёсио Окамото, Павел Патак, Олег Пихурко, Зузана Сафернова и все те, кого я, может быть, забыл включить в этот список. Благодарю также Дэвида Уилсона за разрешение использовать его изображение случайного ромбического замощения в разделе 22, а также Дженнифер Райт Шарп за тщательное редактирование. Наконец, я признателен многочисленным сотрудникам Отделения прикладной математики Карлова университета в Праге и Института теоретической информатики Высшей технической школы в Цюрихе за превосходную рабочую обстановку.