Глава 1

Симплекс-метод

§ 1.1. Постановка задачи

1.1.1. *Общая задача линейного программирования* может быть сформулирована следующим образом: минимизировать функцию

$$f(x) = c^1 x^1 + c^2 x^2 + \ldots + c^n x^n \tag{1.1.1}$$

при условиях

$$x^k \geqslant 0, \quad k \in J_+, \tag{1.1.2}$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \ldots + a_{1n}x^n \leqslant b^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x^1 + a_{m2}x^2 + \ldots + a_{mn}x^n \leqslant b^m, \end{array}\right\} \tag{1.1.3}$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{m+1,1}x^1 + a_{m+1,2}x^2 + \ldots + a_{m+1,n}x^n = b^{m+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x^1 + a_{s2}x^2 + \ldots + a_{sn}x^n = b^s, \end{array}\right\} \tag{1.1.4}$$

где c^j, b^i, a_{ij}, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, n}$, — заданные числа, J_+ — заданное подмножество индексов из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Функция (1.1.1) называется *целевой функцией*, условия (1.1.3) — *ограничениями типа неравенств*, условия (1.1.4) — *ограничениями типа равенств*. Условия (1.1.2) неотрицательности переменных, конечно, тоже являются ограничениями типа неравенств, но их принято выделять отдельно. В задаче (1.1.1)—(1.1.4) не исключаются случаи, когда $J_+ = \varnothing$ или $J_+ = \{1, 2, \ldots, n\}$; возможно также, что в этой задаче отсутствуют ограничения типа неравенств или типа равенств. Точку $x = (x^1, \ldots, x^n)$, удовлетворяющую всем условиям (1.1.2)—(1.1.4), будем называть *допустимой* точкой задачи (1.1.1)—(1.1.4) или просто допустимой точкой. Множество всех допустимых точек назовем *допустимым множеством* и обозначим через X. Для обозначения задачи минимизации функции $f(x)$ на множестве X часто будем пользоваться следующей краткой записью:

$$f(x) \to \inf, \quad x \in X. \tag{1.1.5}$$

Введем также следующее обозначение: пусть $f_* = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ — нижняя грань функции $f(x)$ на множестве X. Напомним, что если функция $f(x)$ ограничена снизу на X, то нижняя грань f_* конечна и обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \geqslant f_* > -\infty$ для всех $x \in X$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $x_\varepsilon \in X$, что $f(x_2) < f_* + \varepsilon$; если $f(x)$ на X не ограничена снизу, то $f_* \overset{\text{def}}{=} -\infty$ [5, 81, 93]. Точку $x_* = (x_*^1, x_*^2, \ldots, x_*^n) \in X$ называют *решением задачи* (1.1.5), если $f(x_*) = f_* > -\infty$. Множество решений этой задачи будем обозначать через X_*. Таким образом, $X_* = \{x \in X : f(x) = f_*\}$. Задача (1.1.1)—(1.1.4) называется *разрешимой*, если $X \neq \varnothing$, $f_* > -\infty$ и $X_* \neq \varnothing$. Наряду с задачей минимизации (1.1.5) нам придется иметь дело с задачей максимизации линейной функции (1.1.1) на множестве X, которую по аналогии с (1.1.5) будем кратко записывать в виде

$$f(x) \to \sup, \quad x \in X. \tag{1.1.6}$$

Для задачи (1.1.6) введем обозначения: $f^* = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ — верхняя грань функции $f(x)$ на множестве X; $X^* = \{x \in X : f(x) = f^*\}$ — множество решений задачи (1.1.6). Эта задача равносильна задаче минимизации

$$h(x) = -f(x) \to \inf, \quad x \in X, \tag{1.1.7}$$

т. е. всякое решение задачи (1.1.7) является решением задачи (1.1.6) и обратно. Учитывая такую связь между задачами минимизации и максимизации, мы ниже будем заниматься в основном задачами минимизации, так как всякое утверждение, доказанное для задачи (1.1.5), нетрудно переформулировать для задачи (1.1.6), а метод, разработанный для решения задачи (1.1.5), легко приспособить для решения задачи (1.1.6).

1.1.2. Приведем примеры прикладных задач, приводящих к задачам линейного программирования.

Пример 1.1.1 (задача оптимального планирования производства). Пусть на некотором предприятии изготовляются n видов продукции из m видов сырья. Известно, что на изготовление одной единицы продукции j-го вида нужно a_{ij} единиц сырья i-го вида. В распоряжении предприятия имеется b^i единиц сырья i-го вида. Известно также, что с каждой единицы продукции j-го вида предприятие получает c_j единиц прибыли. Требуется определить, сколько единиц $x^1, x^2, \ldots, x^n$ каждого вида продукции должно изготовить предприятие, чтобы обеспечить себе максимальную прибыль.

Если предприятие наметит себе план производства $x = (x^1, \ldots, x^n)$, то оно израсходует $a_{i1}x^1 + \ldots + a_{in}x^n$ единиц сырья i-го вида и получит $c^1x^1 + \ldots + c^nx^n$ единиц прибыли. Ясно также, что все величины x^i, $i = \overline{1, n}$, неотрицательны. Поэтому мы приходим к следующей задаче линейного программирования: максимизировать функцию $f(x) = c^1x^1 + \ldots + c^nx^n$ при ограничениях $x^1 \geqslant 0, \ldots, x^n \geqslant 0$, $a_{i1}x^1 + \ldots + a_{in}x^n \leqslant b^i$, $i = \overline{1, m}$. Ясно, что эта задача является частным случаем задачи максимизации (1.1.6) или задачи минимизации (1.1.1)—(1.1.4) с заменой $f(x)$ на $-f(x)$.

Пример 1.1.2 (задача об оптимальном использовании посевной площади). Пусть под посев p культур отведено r земельных участков площадью соответственно $b^1, \ldots, b^r$ гектаров. Известно, что средняя урожайность i-й культуры на j-м участке составляет a_{ij} центнеров с гектара, а прибыль за один центнер i-й культуры составляет c^i рублей. Требуется определить, какую площадь на каждом участке следует отвести под каждую из культур, чтобы получить максимальную прибыль, если должно быть собрано не менее d_i центнеров i-й культуры.

Обозначим через x_{ij} площадь, которую планируется отвести под i-ю культуру на j-м участке. Тогда

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{pj} = b^j, \quad j = \overline{1, r}. \tag{1.1.8}$$

Ожидаемый средний урожай i-й культуры со всех участков равен $a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \ldots + a_{ir}x_{ir}$ центнеров. Поскольку согласно плану должно быть произведено не менее d_i центнеров i-й культуры, получаем, что

$$a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \ldots + a_{ir}x_{ir} \geqslant d_i, \quad i = \overline{1, p}. \tag{1.1.9}$$

Ожидаемая прибыль от урожая i-й культуры равна $c_i(a_{i1}x_{i1} + \ldots + a_{ir}x_{ir})$, а от урожая всех культур —

$$\sum_{i=1}^{p} c_i(a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \ldots + a_{ir}x_{ir}) = f(x). \tag{1.1.10}$$

Таким образом, приходим к задаче максимизации функции (1.1.10) (или минимизации функции $(-f(x))$) при условиях (1.1.8), (1.1.9) и естественных ограничениях

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Если умножить соотношения (1.1.9) на -1 и переменные $\{x_{ij}\}$ переобозначить через $x^1, x^2, \ldots, x^n$, то придем к задаче вида (1.1.1)—(1.1.4).

Пример 1.1.3 (транспортная задача). Пусть имеется r карьеров, где добывается песок, и p потребителей песка (например, кирпичные заводы). В i-м карьере ежесуточно добывается a_i тонн песка, а j-му потребителю ежесуточно требуется b_j тонн песка. Пусть c_{ij} — стоимость перевозки одной тонны песка с i-го карьера j-му потребителю. Требуется составить план перевозок песка так, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

Обозначим через x_{ij} количество тонн песка, которое планируется перевезти из i-го карьера j-му потребителю. Тогда с i-го карьера будет вывезено

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ip} = a_i \tag{1.1.11}$$

тонн песка, j-му потребителю доставлено

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{rj} = b_j \tag{1.1.12}$$

тонн песка, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, p}$, а стоимость перевозок будет равна

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{r} c_{ij}x_{ij}. \tag{1.1.13}$$

Естественно требовать, чтобы выполнялись условия

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, p}. \tag{1.1.14}$$

Таким образом, получили задачу минимизации функции (1.1.13) при условиях (1.1.11), (1.1.12), (1.1.14), которая, очевидно, является частным случаем задачи (1.1.1)—(1.1.4).

К задачам вида (1.1.1)—(1.1.4) сводятся также и многие другие прикладные задачи технико-экономического содержания. Примеры таких задач см., скажем, в работах [11, 18, 45, 52, 70, 82, 85, 86, 96, 121, 124, 150, 157, 158].

1.1.3. Приведем различные другие формы записи общей задачи линейного программирования (1.1.1)—(1.1.4). Будем пользоваться общепринятыми в линейной алгебре понятиями и обозначениями [39, 79, 80]. Через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать n-мерные вещественные линейные пространства, состоящие из вектор-столбцов с обычными операциями сложения и умножения на числа. Векторы из $\mathbb{R}^n$ часто будем называть точками. Пространство $\mathbb{R}^n$, в котором введено скалярное произведение, будем называть евклидовым пространством и обозначать через E^n. Линейное пространство матриц $A=\{a_{ij},\, i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}\}$ размера $m\times n$ (m — число строк, n — число столбцов) будем обозначать через $\mathbb{R}^{m\times n}$. Введем вектор-столбцы

$$c=\begin{pmatrix}c^1\\ \vdots\\ c^n\end{pmatrix},\ a_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{in}\end{pmatrix},\ b_1=\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^m\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}b^{m+1}\\ \vdots\\ b^s\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$$

и матрицы

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}a_{m+1,1}&\dots&a_{m+1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{s1}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}.$$

Тогда задачу (1.1.1)—(1.1.4) можно записать в виде

$$\begin{gathered}f(x)=\langle c,x\rangle\to\inf,\\ x\in X=\{x\in E^n : x^k\geqslant 0,\ k\in J_+,\\ \langle a_i,x\rangle\leqslant b^i,\ i=\overline{1,m},\ \langle a_i,x\rangle=b^i,\ i=\overline{m+1,s}\},\end{gathered}\tag{1.1.15}$$

где $\langle c,x\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}c^ix^i$ — скалярное произведение вектор-столбцов x и c, или, еще короче:

$$\begin{gathered}f(x)=\langle c,x\rangle\to\inf,\\ x\in X=\{x\in E^n : x^k\geqslant 0,\ k\in J_+,\ A_1x\leqslant b_1,\ A_2x=b_2\};\end{gathered}\tag{1.1.16}$$

векторное неравенство $A_1x\leqslant b_1$ в формуле (1.1.16) означает совокупность покоординатных неравенств: $(A_1x)^i=\langle a_i,x\rangle\leqslant b^i$, $i=\overline{1,m}$.

Приведем другую форму записи общей задачи линейного программирования, которая часто будет использоваться ниже. Не умаляя общности дальнейших рассмотрений, можем считать, что переменные $x^1,\dots,x^n$ перенумерованы так, что множество J_+ из формулы (1.1.2) имеет вид $J_+=\{1,\dots,n_1\}$, $0\leqslant n_1\leqslant n$ ($n_1=0$ соответствует случаю $J_+=\varnothing$). Тогда, отдельно выделяя неотрицательные координаты, вектор $x\in E^n$ можем представить так: $x=(x_1,x_2)$,

$x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^{n_1}) \in E^{n_1}$, $x_2 = (x_2^1, \dots, x_2^{n_2}) \in E^{n_2}$, $x_1 \geqslant 0$, $n_1 + n_2 = n$, и после соответствующих преобразований записать задачу (1.1.1)—(1.1.4) в виде

$$\begin{gathered} f(x) = \langle c, x\rangle = \langle c_1, x_1\rangle + \langle c_2, x_2\rangle \to \inf, \\ x = (x_1, x_2) \in X = \{x = (x_1, x_2) \in E^{n_1} \times E^{n_2} : x_1 \geqslant 0, \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leqslant b_1, \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2\}, \end{gathered} \tag{1.1.17}$$

где

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_i 1} & \dots & a_{m_i n_j} \end{pmatrix}, \quad c_j = \begin{pmatrix} c_j^1 \\ \vdots \\ c_j^{n_j} \end{pmatrix}, \quad b_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_j^{m_i} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2.$$

Подчеркнем, что в формулах (1.1.16), (1.1.17) и всюду ниже в произведениях вида $A_{ij}x_j$, $A_i x$, Dy матриц A_{ij}, A_i, D на соответствующие векторы x_j, x, y подразумевается, что x_j, x, y — это вектор-столбцы подходящей размерности, хотя для экономии места мы часто будем записывать эти векторы в виде строки, помечая их знаком транспонирования «$\top$». Так, например, вектор-столбец x часто будем обозначать так: $x = (x^1, \dots, x^n)^\top$. Там, где не могут возникнуть недоразумения, знак «$\top$» часто будем опускать.

Иногда мы будем пользоваться другой формой записи общей задачи линейного программирования:

$$f(x) = \langle c, x\rangle \to \inf, \quad x \in X = \{x \in E^n : A_3 x \leqslant b_3, \ A_4 x = b_4\}, \tag{1.1.18}$$

где A_3 — матрица размера $m_1 \times n$, A_4 — матрица размера $m_2 \times n$, $b_3 \in E^{m_1}$, $b_4 \in E^{m_2}$, $c \in E^n$. Эта форма записи легко получается из (1.1.16), если заметить, что условие $x^k \geqslant 0$ равносильно неравенству $\langle -e_k, x\rangle \leqslant 0$, где $e_k = (0, 0, \dots$ $\dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ — k-й столбец единичной матрицы размера $n \times n$, и положить

$$A_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ -e_k^\top, \ \ k \in J_+ \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b^k = 0, \ \ k \in J_+ \end{pmatrix}, \quad A_4 = A_2, \quad b_4 = b_2.$$

Как видим, в задаче (1.1.18), в отличие от (1.1.16) и (1.1.17), ограничения типа $x^k \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$ отдельно не выделены и включены в неравенство $A_3 x \leqslant b_3$.

1.1.4. Из общей задачи линейного программирования обычно выделяют так называемую *каноническую* задачу:

$$f(x) = \langle c, x\rangle \to \inf, \quad x \in X = \{x \in E^n : x \geqslant 0, \ Ax = b\}, \tag{1.1.19}$$

где A — матрица размера $m \times n$, $c \in E^n$, $b \in E^m$. Задача (1.1.19) получается из общей задачи (1.1.17) при $n_1 = n$, $n_2 = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = m$, $A_{21} = A$, $b_2 = b$, матрицы A_{11}, A_{12}, A_{22} и вектор b_1 отсутствуют. Задача (1.1.19) привлекательна тем, что при ее исследовании и разработке методов ее решения можно пользоваться хорошо известной из линейной алгебры теорией систем линейных алгебраических уравнений. Замечательно также и то, что методы, созданные для решения канонической задачи (1.1.19), нетрудно модифицировать и применять для решения общей задачи (1.1.17). Дело в том, что задача (1.1.17), оказывается, сама равносильна некоторой канонической задаче. Покажем это.

Для того чтобы легче было понять последующие построения, прежде всего заметим, что любое действительное число a можно представить в виде разности двух неотрицательных чисел: $a = a^+ - a^-$, где $a^+ = \max\{0; a\} \geqslant 0$, $a^- = \max\{0; -a\} \geqslant 0$. Отсюда следует, что $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^{n_2})$ можно представить в виде разности неотрицательных векторов:

$$x_2 = z_1 - z_2, \quad z_1 = \max\{0; x_2\} \geqslant 0, \quad z_2 = \max\{0; -x_2\} \geqslant 0, \tag{1.1.20}$$

где операция взятия максимума проводится покоординатно: $z_1 = (z_1^1, \ldots, z_1^{n_2})$, $z_1^j = \max\{0; x_2^j\}$, $z_2 = (z_2^1, \ldots, z_2^{n_2})$, $z_2^j = \max\{0; -x_2^j\}$, $j = \overline{1, n_2}$. Далее, заметим, что ограничения $Ax \leqslant b$ типа неравенств можно записать в виде ограничений типа равенств $Ax + y = b$, добавив сюда неравенство $y \geqslant 0$: ясно, что точка x будет решением неравенства $Ax \leqslant b$ тогда и только тогда, когда (x, y) — решение системы $Ax + y = b$, $y \geqslant 0$. Отсюда следует, что, вводя переменную

$$y = b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2, \tag{1.1.21}$$

ограничение $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leqslant b_1$ с учетом соотношений (1.1.20) можно представить в равносильном виде

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y = A_{11}x_1 + A_{12}z_1 + (-A_{12})z_2 + y = b_1, \quad y \geqslant 0.$$

Ограничение $A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$ с учетом соотношений (1.1.20) запишем в виде

$$A_{21}x_1 + A_{22}z_1 + (-A_{22})z_2 + 0y = b_2.$$

Учитывая эти соображения, в пространстве переменных $w = (x_1, z_1, z_2, y)$, $x_1 \in E^{n_1}$, $z_1 \in E^{n_2}$, $z_2 \in E^{n_2}$, $y \in E^{m_1}$, рассмотрим следующую каноническую задачу:

$$\begin{gathered} g(w) = \langle c_1, x_1\rangle + \langle c_2, z_1\rangle + \langle -c_2, z_2\rangle + \langle 0, y\rangle \to \inf, \\ \begin{aligned} w \in W = \{w = (x_1, z_1, z_2, y) : w \geqslant 0,& \\ A_{11}x_1 + A_{12}z_1 + (-A_{12})z_2 + I_{m_1}y = b_1,& \\ A_{21}x_1 + A_{22}z_1 + (-A_{22})z_2 + 0y = b_2\},& \end{aligned} \end{gathered} \tag{1.1.22}$$

где I_{m_1} — единичная матрица размера $m_1 \times m_1$. Оказывается, задачи (1.1.17) и (1.1.22) обе одновременно имеют решение или не имеют решения, причем, зная какое-либо решение одной из этих задач, нетрудно получить решение другой задачи. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1.1. *Задачи* (1.1.17) *и* (1.1.22) *равносильны, т. е.*

1) *множества X и W оба пусты или оба непусты одновременно*;

2) *если $X \neq \varnothing$, $W \neq \varnothing$, то $f_* = g_*$, где $f_* = \inf_{x\in X} f(x)$, $g_* = \inf_{w\in W} g(w)$*;

3) *множества решений $X_* = \{x \in X : f(x) = f_*\}$, $W_* = \{w \in W : g(w) = g_*\}$ этих задач оба пусты или оба непусты одновременно, причем если $x_* = (x_{1*}, x_{2*}) \in X_*$, то $w_* = (x_{1*}, z_{1*}, z_{2*}, y_*) \in W_*$, где $z_{1*} = \max\{0; x_{2*}\}$, $z_{2*} = \max\{0; -x_{2*}\}$, $y_* = b_1 - A_{11}x_{1*} - A_{12}x_{2*}$, и обратно, если $w_* = (x_{1*}, z_{1*}, z_{2*}, y_*) \in W_*$, то $x_* = (x_{1*}, x_{2*} = z_{1*} - z_{2*}) \in X_*$.*

Доказательство. Учитывая связи (1.1.20), (1.1.21) между переменными x_1, x_2, z_1, z_2, y и определения множеств X, W в задачах (1.1.17), (1.1.22), заключаем, что если $x = (x_1, x_2) \in X$, то $w = w(x) = (x_1,\ z_1 = \max\{0; x_2\},$

$z_2 = \max\{0; -x_2\}$, $y = b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2) \in W$. И обратно, если $w = (x_1, z_1, z_2, y) \in \in W$, то $x = x(w) = (x_1,\ x_2 = z_1 - z_2) \in X$. Отсюда ясно, что либо оба множества X и W пусты, либо оба непусты одновременно. Далее, из определений функций $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$, $x(w)$ следуют тождества

$$f(x) \equiv g(w(x)), \quad g(w) \equiv f(x(w)) \ \ \forall x, w. \tag{1.1.23}$$

Пусть $X \neq \varnothing$. Тогда либо $f_* = -\infty$, либо $f_* > -\infty$. Сначала рассмотрим случай $f_* = -\infty$. Тогда существует такая последовательность $\{x_k\}$, $x_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, что $\{f(x_k)\} \to f_* = -\infty$. Положим $w_k = w(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Из соотношений (1.1.23) тогда имеем $g(w_k) = g(w(x_k)) = f(x_k) \to -\infty$, откуда с учетом включения $w_k \in W$, $k = 1, 2, \ldots$, получим, что $g_* = -\infty$. Рассуждая аналогично, заключаем, что если $g_* = -\infty$, то $f_* = -\infty$.

Пусть теперь $f_* > -\infty$. Тогда из предыдущего рассуждения следует, что $g_* > -\infty$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению нижней грани найдется такая точка $x_\varepsilon \in X$, что $f_* \leqslant f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$. Тогда $w_\varepsilon = w(x_\varepsilon) \in W$ и из соотношений (1.1.23) следует, что $g_* \leqslant g(w_\varepsilon) = f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$, т. е. $g_* < f_* + \varepsilon$. Аналогично по определению g_* существует точка $v_\varepsilon \in W$, для которой $g_* \leqslant g(v_\varepsilon) < g_* + \varepsilon$. Тогда $y_\varepsilon = x(v_\varepsilon) \in X$ и $f_* \leqslant f(y_\varepsilon) = f(x(v_\varepsilon)) = g(v_\varepsilon) < < g_* + \varepsilon$, т. е. $f_* < g_* + \varepsilon$. Следовательно, $f_* - \varepsilon < g_* < f_* + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что $f_* = g_* > -\infty$.

Наконец, если $x_* \in X_*$, то $w_* = w(x_*) \in W$, и в силу вышедоказанного $g(w_*) = g(w(x_*)) = f(x_*) = f_* = g_*$. Это значит, что $w(x_*) \in W_*$ при любом $x_* \in X_*$. Аналогично доказывается, что если $w_* \in W_*$, то $x_* = x(w_*) \in X_*$. Отсюда следует, что либо оба множества X_* и W_* пусты, либо оба непусты одновременно и справедливы равенства $X_* = \{x = x(w),\ w \in W_*\}$, $W_* = \{w = w(x),\ x \in X_*\}$. Теорема 1.1.1 доказана.

1.1.5. В теории и методах линейного программирования наряду с канонической задачей еще принято выделять так называемую *основную* (или *стандартную*) задачу линейного программирования:

$$f(x) = \langle c, x\rangle \to \inf, \quad x \in X = \{x \geqslant 0\colon Ax \leqslant b\}, \tag{1.1.24}$$

получающуюся из общей задачи (1.1.17) при $n_1 = n$, $n_2 = 0$, $m_1 = m$, $m_2 = 0$, $A_{11} = A$, $b_1 = b$, матрицы A_{12}, A_{21}, A_{22} и вектор b_2 отсутствуют. Это объясняется тем, что в приложениях большое число линейных математических моделей изначально естественным образом записывается в виде задачи (1.1.24). Следует также отметить, что задача (1.1.24) весьма удобна для геометрических интерпретаций, делающих наглядными многие понятия и методы линейного программирования.

Если ввести дополнительные переменные $y = (y^1, \ldots, y^m)$ посредством соотношений

$$y = b - Ax, \quad y \geqslant 0, \tag{1.1.25}$$

то задачу (1.1.24) в пространстве E^{n+m} переменных $w = (x, y)$ можно записать в канонической форме:

$$\begin{gathered} g(w) = \langle d, w\rangle \to \inf, \quad w \in W, \\ W = \{w = (x, y) \geqslant 0\colon Cw \equiv Ax + I_m y = b\}, \end{gathered} \tag{1.1.26}$$

где $d = (c, 0) \in E^{n+m}$, $C = (A, I_m)$, I_m — единичная матрица размера $m \times m$. Из теоремы 1.1.1 следует, что задачи (1.1.24) и (1.1.26) равносильны и, зная решение $x_* \in X_*$ задачи (1.1.24), по формуле (1.1.25) нетрудно получить решение задачи (1.1.26): $w_* = (x_*,\ y_* = b - Ax_*)$, и обратно, если $w_* = (x_*, y_*) \in W_*$, то $x_* \in X_*$.

С другой стороны, каноническую задачу (1.1.19) нетрудно записать в форме основной задачи. В самом деле, если ограничения типа равенств $Ax = b$ заменить на равносильную систему двух неравенств $Ax \leqslant b$, $Ax \geqslant b$, то задачу (1.1.19) можно записать в виде

$$\begin{gathered} f(x) = \langle c, x\rangle \to \inf, \\ x \in X = \{x \geqslant 0\colon Ax \leqslant b,\ (-A)x \leqslant -b\} = \{x \geqslant 0\colon Hx \leqslant h\}, \\ H = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{1.1.27}$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.1.1, нетрудно установить равносильность задач (1.1.19) и (1.1.27).

Как видим, общая задача линейного программирования, каноническая задача и основная задача тесно связаны между собой и простым преобразованием от одной формы легко перейти к другой. Поэтому если мы научимся решать одну из этих задач, то тем самым будем уметь решать задачу линейного программирования, записанную в любой другой форме.

Упражнения

1.1.1. Требуется составить наиболее дешевую смесь, содержащую не менее b^i единиц i-го вещества, $i = \overline{1, m}$, при условии, что для изготовления смеси имеется n видов продукции, причем в одной единице j-го продукта содержится a_{ij} единиц i-го вещества, а цена одной единицы j-го продукта равна c_j рублей (задача о смесях). Сформулируйте эту задачу в виде основной задачи (1.1.24).

1.1.2. Задачу $f(x) = x^1 + x^2 + x^3 - x^4 - x^5 \to \sup$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in X = \{x^1 \geqslant 0,\quad x^3 \geqslant 0,\quad x^4 \geqslant 0\colon\ x^1 + x^2 - x^3 \leqslant 1,\quad x^1 + x^4 + x^5 = 3,\quad x^1 - x^3 + x^5 \geqslant 1,\ -1 \leqslant x^2 \leqslant 1,\ x^5 \geqslant 1\}$ запишите в виде задач (1.1.1)—(1.1.4), (1.1.15)—(1.1.19), (1.1.24).

1.1.3. Общую задачу (1.1.17) запишите в форме основной задачи (1.1.24), докажите их равносильность.

1.1.4. Задачу $f(x) = \langle c_1, x_1\rangle + \langle c_2, x_2\rangle + \langle c_3, x_3\rangle \to \inf$, $x \in X = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in E^{n_1} \times E^{n_2} \times E^{n_3}\colon\ x_1 \geqslant 0,\quad 0 \leqslant x_2 \leqslant d,\quad A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \leqslant b_1,\quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2\}$, где A_{ij} — матрицы размера $m_i \times n_j$, $c_j \in E^{n_j}$, $b_i \in E^{m_i}$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2$; $d \in E^{n_2}$, запишите в виде задач (1.1.1)—(1.1.4), (1.1.15)—(1.1.19), (1.1.24).

1.1.5. Исследуйте задачу $f(x) = \langle c, x\rangle \to \inf$, $x \in X = E^n_+ = \{x \in E^n\colon x \geqslant 0\}$. Покажите, что если $c \geqslant 0$, то $f_* = f(0) = 0$; если $c^i < 0$ для некоторого i, то $f_* = -\infty$.

1.1.6. Докажите, что в пространстве переменных (x_1, z, y), где $z = (z_2^0, z_2^1, \ldots$ $\ldots, z_2^{n_2})$, $z_2^0 = -\min\limits_{1 \leqslant p \leqslant n_2} x_2^p$ при $\min\limits_{1 \leqslant p \leqslant n_2} x_2^p < 0$, $z_2^0 = 0$ при $\min\limits_{1 \leqslant p \leqslant n_2} x_2^p \geqslant 0$, $z_2^j = x_2^j + z_2^0$,