

Оглавление

Глава 1. Введение	7
Глава 2. Основные понятия теории представлений	10
§ 2.1. Что такое теория представлений?	10
§ 2.2. Алгебры	13
§ 2.3. Представления	14
§ 2.4. Идеалы	19
§ 2.5. Факторы	20
§ 2.6. Алгебры, задаваемые образующими и соотношениями	21
§ 2.7. Примеры алгебр	21
§ 2.8. Колчаны	23
§ 2.9. Алгебры Ли	26
§ 2.10. Историческая интерлюдия: испытания и преобразования Софуса Ли	31
§ 2.11. Тензорные произведения	35
§ 2.12. Тензорная алгебра	40
§ 2.13. Третья проблема Гильберта	41
§ 2.14. Тензорные произведения представлений и сопряжённые представления алгебр Ли	41
§ 2.15. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$	42
§ 2.16. Задачи об алгебрах Ли	44
Глава 3. Общие результаты теории представлений	46
§ 3.1. Подпредставления в полупростых представлениях	46
§ 3.2. Теорема плотности	48
§ 3.3. Представления прямых сумм матричных алгебр	50
§ 3.4. Фильтрации	52
§ 3.5. Конечномерные алгебры	52
§ 3.6. Характеры представлений	55
§ 3.7. Теорема Жордана — Гёльдера	56
§ 3.8. Теорема Крулля — Шмидта	57

§ 3.9. Задачи	59
§ 3.10. Представления тензорных произведений	62
Глава 4. Представления конечных групп:	
основные результаты	64
§ 4.1. Теорема Машке	64
§ 4.2. Характеры	66
§ 4.3. Примеры	67
§ 4.4. Двойственные представления и тензорные произведения представлений	70
§ 4.5. Ортогональность характеров	70
§ 4.6. Унитарные представления. Другое доказательство теоремы Машке для комплексных представлений	73
§ 4.7. Ортогональность матричных элементов	75
§ 4.8. Таблицы характеров, примеры	76
§ 4.9. Вычисление кратностей неприводимых представлений в тензорных произведениях с помощью таблиц характеров	80
§ 4.10. Определитель Фробениуса	80
§ 4.11. Историческая интерлюдия: Георг Фробениус и его «принцип лошадиных торгов»	82
§ 4.12. Задачи	86
§ 4.13. Историческая интерлюдия: Уильям Роуэн Гамильтон и его кватернион геометрии, алгебры, метафизики и поэзии	91
Глава 5. Представления конечных групп:	
дальнейшие результаты	96
§ 5.1. Индикатор Фробениуса — Шура	96
§ 5.2. Алгебраические и целые алгебраические числа	98
§ 5.3. Теорема Фробениуса о делимости	101
§ 5.4. Теорема Бёрнсайда	103
§ 5.5. Историческая интерлюдия: Уильям Бёрнсайд и интеллектуальная гармония в математике	105
§ 5.6. Представления произведений	109
§ 5.7. Виртуальные представления	110
§ 5.8. Индуцированные представления	110
§ 5.9. Формула Фробениуса для характера индуцированного представления	111

§ 5.10. Взаимность Фробениуса	112
§ 5.11. Примеры	115
§ 5.12. Представления группы S_n	115
§ 5.13. Доказательство классификационной теоремы для представлений группы S_n	117
§ 5.14. Индуцированные представления симметрической группы	119
§ 5.15. Формула Фробениуса для характеров	121
§ 5.16. Задачи	124
§ 5.17. Формула крюков	124
§ 5.18. Двойственность Шура — Вейля для $\mathfrak{gl}(V)$	125
§ 5.19. Двойственность Шура — Вейля для $GL(V)$	127
§ 5.20. Историческая интерлюдия: Герман Вейль на пересечении скованности и свободы	128
§ 5.21. Функции Шура	134
§ 5.22. Характеры представлений L_λ	135
§ 5.23. Алгебраические представления группы $GL(V)$	136
§ 5.24. Задачи	138
§ 5.25. Представления группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$	139
§ 5.26. Теорема Артина	146
§ 5.27. Представления полупрямых произведений	147
Глава 6. Представления колчанов	149
§ 6.1. Задачи	149
§ 6.2. Неразложимые представления колчанов A_1, A_2, A_3	153
§ 6.3. Неразложимые представления колчана D_4	157
§ 6.4. Корни	161
§ 6.5. Теорема Габриэля	164
§ 6.6. Функторы отражения	165
§ 6.7. Элементы Кокстера	169
§ 6.8. Доказательство теоремы Габриэля	170
§ 6.9. Задачи	173
Глава 7. Введение в теорию категорий	175
§ 7.1. Определение категории	175
§ 7.2. Функторы	177
§ 7.3. Морфизмы функторов	178
§ 7.4. Эквивалентность категорий	179
§ 7.5. Представимые функторы	181

§ 7.6. Сопряжённые функторы	182
§ 7.7. Абелевы категории	184
§ 7.8. Комплексы и когомологии	185
§ 7.9. Точные функторы	188
§ 7.10. Историческая интерлюдия: Эйленберг, Маклейн и «общая абстрактная чепуха»	189
Глава 8. Гомологическая алгебра	198
§ 8.1. Проективные и инъективные модули	198
§ 8.2. Функторы Tor и Ext	200
Глава 9. Структура конечномерных алгебр	205
§ 9.1. Поднятие идемпотентов	205
§ 9.2. Проективные накрывающие	206
§ 9.3. Матрица Картана конечномерной алгебры	207
§ 9.4. Гомологическая размерность	208
§ 9.5. Блоки	209
§ 9.6. Конечные абелевы категории	210
§ 9.7. Эквивалентность Мориты	211
Библиография	213
Список литературы к историческим интерлюдиям	214
Предметный указатель	219