ВВЕДЕНИЕ

> «...ad alcuno, dico, di quelli, che troppo laconicamente vorrebbero vedere, nei più angusti spazii che possibil fusse, ristretti i filosofici insegnamenti, sì che sempre si usasse quella rigida e concisa maniera, spogliata di qualsivoglia vaghezza ed ornamento, che è propria dei puri geometri, li quali né pure una parola proferiscono che dalla assoluta necessità non sia loro suggerita.
>
> Ma io, all'incontro, non ascrivo a difetto in un trattato, ancorché indirizzato ad un solo scopo, interserire altre varie notizie, purché non siano totalmente separate e senza veruna coerenza annesse al principale instituto»[1].
>
> *Galileo Galilei*
> *«Lettera al Principe Leopoldo di Toscana»* (1623)

Гидродинамика относится к небольшому числу фундаментальных проблем математики, успехи в которых могут служить мерилом действительного прогресса математики в целом. Много удивительных достижений в этой области основывается не столько на эксперименте, сколько на глубоких теориях, стимулировавших, в свою очередь, развитие таких областей математики как теория функций комплексного переменного, топология, теория устойчивости, теория бифуркаций, теория вполне интегрируемых динамических систем.

Несмотря на все эти успехи, гидродинамика с ее поразительными эмпирическими законами остается вызовом для математиков. Такие явления как турбулентность еще не имеют строгой математической теории, и даже вопросы существования решений основных уравнений гидродинамики трехмерной жидкости остаются открытыми.

Простейшей, но уже очень содержательной математической моделью гидродинамики является динамика идеальной (несжимаемой и невязкой) однородной жидкости. С математической точки зрения теория такой жидкости есть ни что иное, как изучение геодезических на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов области течения, где группа снабжена правоинвариантной римановой метрикой.

---

[1] «...некоторые предпочитают видеть научные тексты спресованными слишком лаконично в минимальный объем и используют для этого всегда такую строгую и краткую манеру, которой однако не хватает красоты и изящества и которая так популярна среди чистых геометров, не произнесущих и одного слова, если только оно не вызвано абсолютной необходимостью.

Я же, напротив, не считаю недостатком трактата, хотя бы и посвященного одной цели, вставлять в него всевозможные дополнительные замечания там, где они уместны и соответствуют главной цели». Галилео Галилей [Gal].

В 1765 году Л. Эйлер [Eul] опубликовал уравнения движения твердого тела, носящие его имя. Эйлеровские движения твердого тела являются геодезическими на группе вращений трехмерного евклидова пространства. Группа вращений при этом снабжена левоинвариантной римановой метрикой, и теория Эйлера, в сущности, использует только это одно обстоятельство. Уравнения Эйлера сохраняют силу для произвольной группы. Для других групп также получаются «уравнения Эйлера» — например, уравнения движения твердого тела в многомерном пространстве, уравнения Эйлера гидродинамики идеальной жидкости и т. д.

Теоремы Эйлера об устойчивости вращения вокруг большой и вокруг малой осей эллипсоида инерции твердого тела также имеют аналоги в случае произвольной группы. В случае гидродинамики эти аналоги доставляют нелинейные обобщения теоремы Рэлея об устойчивости двумерных течений без точек перегиба профиля скоростей.

Описание течений идеальной жидкости при помощи геодезических правоинвариантной римановой метрики позволяет применить к исследованию этих течений методы римановой геометрии. Для этого нет необходимости строить сколько-нибудь последовательную теорию бесконечномерных римановых многообразий (что связано со значительными аналитическими трудностями, например, из-за отсутствия теорем существования решений соответствующих дифференциальных уравнений).

Стратегия применения геометрических методов к бесконечномерным задачам состоит скорее в том, чтобы, установив какие-либо факты в конечномерной ситуации (для геодезических инвариантных метрик на конечномерных группах Ли), использовать их, чтобы *сформулировать* соответствующие факты в бесконечномерном случае групп диффеоморфизмов. Доказательства этих окончательных результатов часто можно затем сделать строгими, минуя трудные вопросы обоснования промежуточных результатов (вроде продолжимости решений на нужный отрезок времени). Получаемые на этом пути результаты носят характер *априорных* утверждений: те или иные тождества или неравенства имеют место при любом разумном понимании решений всякий раз, когда нужное решение существует, но само это существование остается под вопросом.

В частности, мы выведем формулы для римановой кривизны группы, снабженной инвариантной римановой метрикой. Применяя эти формулы к случаю бесконечномерного многообразия, геодезическими которого являются движения идеальной жидкости, мы находим, что риманова кривизна во многих случаях отрицательна. Отрицательность кривизны влечет неустойчивость движения по геодезическим (как это хорошо известно из геометрии конечномерных римановых многообразий).

Применяя этот результат к (бесконечномерному) случаю групп диффеоморфизмов, мы приходим к выводу, что движение идеальной жидкости *неустойчиво* (в том смысле, что небольшое изменение начальных условий вызывает со временем большое изменение перемещений частиц). Более того, формулы для кривизны позволяют оценить величину показателя экспоненциального расхождения движений с близкими начальными условиями, а следовательно, и время, после которого движение масс жидкости становится принципиально непредсказуемым.

Например, в простейшей идеализированной модели атмосферы (рассматриваемой как двумерная идеальная жидкость на поверхности тора) отклонения возрастают за два месяца в 10^5 раз. Ясно, что уже одно это обстоятельство делает динамический прогноз погоды на такое время практически невозможным (независимо от того, насколько мощные компьютеры и сколь густая сеть данных для этого используется).

Мы попытались сделать главы книги независимыми друг от друга, насколько это возможно. Ссылки внутри одной и той же главы не содержат ее номер. Для первого знакомства с предметом мы адресуем читателя к следующим параграфам в соответствующих главах: § 1–5 и § 12 гл. I, § 1 и § 3–4 гл. II, § 1–2 и § 4 гл. III, § 1 гл. IV, § 1–2 гл. V, § 1 и § 4 гл. VI.

Некоторые утверждения в этой книге могут оказаться новыми даже для специалистов. Отметим классификацию локальных законов сохранения в идеальной гидродинамике (теорема 9.9, гл. I), решение М. Фридмана проблемы Сахарова–Зельдовича о минимизации энергии незаузленного магнитного поля (теорема 3.1, гл. III), обсуждение конструкции инвариантов многообразий, основанных на оценках энергии узлов (замечание 2.6, гл. III), обсуждение комплексной версии инвариантов Васильева для зацеплений (гл. III, п. 7.5), замечание Б. Зельдовича о медианах треугольника Лобачевского (задача 1.4, гл. IV), соотношение ковариантной производной векторного поля и оператора инерции в гидродинамике (гл. IV, п. 1.4), отступление об уравнении Фоккера–Планка (гл. V, п. 3.3) и конструкцию динамо при помощи геодезического потока на поверхности постоянной отрицательной кривизны (гл. V, п. 4.4). В русское издание мы также постарались включить ссылки на самые недавние исследования и решения ряда вопросов, поставленных в английском издании этой книги [AKh2]. К их числу относятся описание соотношения между эйлеровой и лагранжевой устойчивостью [Pre], доказательство фредгольмовости экспоненциального отображения на группе диффеоморфизмов в двумерном случае [EbM, EbMP], универсальность уравнения Монжа–Ампера в задачах гидродинамики и оптимального переноса массы [KhM2], решение «проблемы коротких путей» в определении асимптотического инварианта Хопфа [Vog], а также броуновская интерпретация многомерного аналога этого инварианта [Riv, Kh3]. Заметно расширен параграф, написанный А. Шнирельманом, где, в частности, добавлено описание слабых решений двумерного уравнения Эйлера в терминах обобщенных континуальных кос [Shn9]. Многие по-прежнему открытые вопросы гидродинамики собраны в книге [Arn26].

* * *

Мы глубоко признательны всем тем, кто помогал нам на разных этапах работы: Ф. Айкарди, М. А. Бергеру, Ж.-Л. Брылински, А. Вейнстейну, О. Я. Виро, М. М. Вишику, В. А. Владимирову, В. Л. Гинзбургу, М. Л. Громову, А. Д. Джилберту, Л. А. Дикому, В. М. Закалюкину, И. С. Захаревичу, Я. Б. Зельдовичу, А. В. Зоричу, В. А. Зоричу, Ю. С. Ильяшенко, К. Кингу, В. В. Козлову, А. Н. Колмогорову, Е. И. Коркиной, О. А. Ладыженской, П. Лауренсу, Ж. Лере, А. М. Лукацкому, М. Ю. Любичу, Д. Мак-Дафф, С. В. Манакову, Дж. Е. Марсдену, А. С. Мищенко, Ю. Мозеру, Р. Монтгомери, Дж. Моро, К. Моффату, Н. А. Некрасову, Ю. А. Неретину, С. П. Новикову, В. Ю. Овсиенко, В. И. Оселедцу, Л. В. Полтеровичу, М. Поляку, Т. С. Ратью, С. Резникову, К. Роже, А. А. Рослому, А. А. Рузмайкину, А. Д. Сахарову, Д. Серру, Я. Г. Синаю, С. Л. Соболеву, Д. Д. Соколову, С. Л. Табачникову, А. Н. Тодорову, Л. Д. Фаддееву, В. В. Фоку, М. Х. Фридману, У. Фришу, К. М. Ханину, М. Хенону, Х. Хоферу, В. Ю. Цейтлину, Е. Цендеру, Ю. В. Чеканову, С. Чилдрессу, Б. З. Шапиро, Л. Шварцу, А. И. Шнирельману, М. А. Шубину, Д. Г. Эбину, Я. М. Элиашбергу, М.-Р. Эрману, В. И. Юдовичу, Л.-С. Янг и многим другим.

Параграф 7 гл. IV был написан А. И. Шнирельманом. Начальный вариант § 5 гл. VI написан Б. З. Шапиро, а замечание 4.11 гл. II — Дж. Е. Марсденом. Мы особенно обязаны О. С. Козловскому и Г. Мисиолеку за многочисленные обсуждения различных тем этой книги и за их многочисленные полезные замечания. О. С. Козловский также сообщил нам свои недавние неопубликованные результаты для нескольких параграфов в гл. V (в частности, для п. 1.2, п. 2.3, п. 3.5).

Мы благодарны А. Мекишу за помощь с рисунками и Д. Крамеру за тщательную правку английской рукописи. Подготовка книги была частично поддержана РФФИ и NSERC.

Борис Хесин сомневается, что этот проект был бы когда-нибудь закончен без неутомимой моральной поддержки его жены Маши в течение всей работы над книгой, казавшейся бесконечной. Он также признателен за гостеприимство Институту Макса Планка в Бонне и Институтам высших исследований в Бюр-сюр-Иветте и в Принстоне.

Русское издание книги было бы невозможным без помощи Т. В. Белокриницкой, В. М. Закалюкина, О. С. Козловского, А. М. Лукацкого, П. Е. Пушкаря, а также Ю. Н. Торхова и С. А. Ботовой. Им всем мы чрезвычайно признательны.