

УДК 51
ББК 21.1
А45

Рецензент: доктор физико-математических наук,
профессор Ю. П. Соловьев.

Алфутова Н. Б. Устинов А. В.

А45 Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2009. — 336 с.

ISBN 978-5-94057-550-4

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по математике, предназначенный прежде всего для учеников старших классов с углубленным изучением математики, интересующихся точными науками. Он также будет полезен преподавателям математики и студентам, изучающим математику в высших учебных заведениях. Значительная часть материала может быть использована для подготовки к письменным и устным вступительным экзаменам в ВУЗы.

Основу сборника составляют задачи к курсу алгебры, который читался в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова при МГУ им. М. В. Ломоносова в 1995—2000 годах.

Предыдущее издание книги вышло в 2005 г.

ББК 21.1

ISBN 978-5-94057-550-4

© Алфутова Н. Б., Устинов А. В.,
2002, 2005, 2009.

© МЦНМО, 2009.

Оглавление

Предисловие	5
Обозначения	7
1. Метод математической индукции	8
1.1. Тождества, неравенства и делимость	8
1.2. Индукция в геометрии и комбинаторике	12
2. Комбинаторика	16
2.1. Сложить или умножить?	16
2.2. Принцип Дирихле	17
2.3. Размещения, перестановки и сочетания	20
2.4. Формула включений и исключений	28
2.5. Числа Каталана	30
3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики	32
3.1. Простые числа	32
3.2. Алгоритм Евклида	34
3.3. Мультипликативные функции	40
3.4. Числа Фибоначчи	45
3.5. Цепные дроби	53
3.6. Континуанты	60
4. Арифметика остатков	65
4.1. Четность	65
4.2. Делимость	68
4.3. Сравнения	70
4.4. Теоремы Ферма и Эйлера	76
4.5. Признаки делимости	82
4.6. Китайская теорема об остатках	86
5. Числа, дроби, системы счисления	90
5.1. Рациональные и иррациональные числа	90
5.2. Десятичные дроби	95
5.3. Двоичная и троичная системы счисления	98
6. Многочлены	106
6.1. Квадратный трехчлен	106
6.2. Алгоритм Евклида для многочленов и теорема Безу	109
6.3. Разложение на множители	115
6.4. Многочлены с кратными корнями	116
6.5. Теорема Виета	118
6.6. Интерполяционный многочлен Лагранжа	121
7. Комплексные числа	124
7.1. Комплексная плоскость	124
7.2. Преобразования комплексной плоскости	135
7.3. Целые гауссовы числа	138
8. Алгебра + геометрия	143
8.1. Геометрия помогает алгебре	143
8.2. Комплексные числа и геометрия	145
8.3. Тригонометрия	148

9. Уравнения и системы	155
9.1. Уравнения третьей степени	155
9.2. Тригонометрические замены	159
9.3. Итерации	161
9.4. Системы линейных уравнений	171
10. Неравенства	176
10.1. Различные неравенства	176
10.2. Суммы и минимумы	179
10.3. Выпуклость	180
10.4. Симметрические неравенства	182
11. Последовательности и ряды	185
11.1. Конечные разности	185
11.2. Рекуррентные последовательности	190
11.3. Производящие функции	198
11.4. Многочлены Гаусса	204
12. Шутки и ошибки	206
Ответы, указания, решения	210
Глава 1	210
Глава 2	212
Глава 3	220
Глава 4	237
Глава 5	247
Глава 6	255
Глава 7	261
Глава 8	268
Глава 9	273
Глава 10	281
Глава 11	286
Глава 12	301
А. Программа курса	303
В. Источники задач и ссылки на дополнительную литературу	305
С. Формулы и числа	308
I. Греческий алфавит	308
II. Треугольник Паскаля и числа Фибоначчи	308
III. (1, 2)-треугольник Паскаля и числа Люка	308
IV. Константы	309
V. Десятичные периоды дробей $1/p$	310
VI. Первые 20 греческих числовых приставок	311
VII. Последовательности	311
VIII. Многочлены	314
IX. Основные тригонометрические тождества	314
X. Таблица простых чисел	316
XI. Таблица квадратов	317
Литература	318
Предметный указатель	329

Предисловие

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по математике, предназначенный прежде всего для учеников старших классов, интересующихся точными науками. Он также будет полезен преподавателям математики и студентам, изучающим математику в высших учебных заведениях. Значительная часть материала может быть использована для подготовки к письменным и устным вступительным экзаменам в ВУЗы.

Основу сборника составляют задачи к курсу алгебры, который в 1995–2000 годах читался О. А. Чалых, Н. Б. Алфутовой и А. В. Устиновым в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова при МГУ. В приложении А приведена программа этого курса. Для того, чтобы сделать содержание книги более широким и целостным, авторы включили в нее дополнительный материал, собрав и упорядочив задачи из других источников.

Математические курсы, читаемые в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова, традиционно содержат разделы, которые можно назвать смежными. Они находятся на стыке алгебры с комбинаторикой, геометрией, теорией чисел и математическим анализом. Поэтому некоторые задачи из книги имеют к алгебре лишь косвенное отношение. Эти задачи призваны подчеркнуть связь различных разделов математики и проиллюстрировать многообразие методов.

В каждой главе кратко излагается теоретический материал, необходимый для понимания задач. В конце задачи иногда даются ссылки на задачи или литературу, которые непосредственно связаны с данным материалом. Близкий по духу теоретический материал можно найти в книгах [15] и [23], которые также написаны по материалам курсов, читавшихся в школе им. А. Н. Колмогорова.

При подготовке пособия использовались различные учебники и монографии, сборники олимпиадных и конкурсных задач, существенная часть упражнений была почерпнута из многочисленных публикаций журнала «Квант». В результате работы над книгой был создан своеобразный путеводитель, помещенный в приложение В. В нем по каждой из тем задачника даны ссылки на соответствующие публикации. К со-

жалению, в настоящий момент не представляется возможным указать авторов всех задач, вошедших в книгу, и перечислить все оригинальные источники. Часть материала встречается сразу в нескольких сборниках. Со многими задачами авторы познакомились еще за время своего обучения в школе-интернате. Некоторые упражнения рождались в разговорах с коллегами по кафедре математики.

В книге также встречаются более сложные задачи, не соответствующие школьному уровню. Они составлены по материалам спецкурсов и спецсеминаров, которые второй из авторов вел на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

Авторы приносят глубокую благодарность педагогам и математикам, работавшим в разное время в ФМШ № 18 при МГУ (позднее в школе им. А. Н. Колмогорова), опыт которых отражен в этой книге. Авторы благодарят В. В. Вавилова, А. А. Егорова, которые взяли на себя труд прочесть предварительные варианты первого издания книги, за их многочисленные добавления, исправления и полезные советы. Особая благодарность И. Д. Кану, который участвовал в подготовке как первого, так и второго издания книги. Отдельное спасибо О. А. Соловьеву за неизменную ТрХ-ническую поддержку.

Авторы будут благодарны читателям за отзывы, критические замечания, предложения и новые задачи.

Н. Б. Алфутова

iam.khv.ru

А. В. Устинов

ustinov@mech.math.msu.su

Предметный указатель

- Азбука Морзе 45, 61, 235, 236
Аксиома индукции 8
Алгоритм вавилонский
 вычисления $\sqrt{2}$ 161
— Евклида 34–40, 49, 53, 139, 222–223
— — для многочленов 109–115
— жадный 217, 228
Алфавит греческий 308
— племени Мумбо-Юмбо 16, 207
Альтернатива Фредгольма 174, 281, 288
Анаграммы 22
Аргумент комплексного числа 124
- Бином Ньютона 22, 25, 132, 228, 265, 297
Биномиальный коэффициент 132, 185–188
- Вероятность 28, 195, 292
- Гомотетия 135
- Деление с остатком многочленов 109
— — чисел 8
Диаграмма Юнга 183, 184, 203, 284, 299, 300
— — мажорирующая 183, 184
Дискриминант 157
— кубического уравнения 157
Дискриминантная кривая для кубического уравнения 157
— парабола 108, 256
Дроби бесконечные непрерывные 55
— — периодические 56–57
— — чисто периодические 57
— десятичные 95–98
— — периодические 90
— — чисто периодические 96
— неприводимые 243
— подходящие 54
— цепные (непрерывные) 53–59, 243
- Задача Бхаскары 93
— Иосифа Флавия 101
— Кэррола 141
— Леонардо Пизанского 45
— Сильвестра 14
— Ферма 43
Золотое сечение 47, 164
- Игра «Йога» 67, 103
— «Ним» 102, 252
— «Шоколадка» 103, 252
— «Цзяньшицзы» 51
— на монотонности 166
Инверсия 146
Итерационная ломаная 163
- Календарь восточный 89
— григорианский 55, 207
— персидский 56
— юлианский 56
Квадратичная иррациональность 57, 92, 95, 248
Класс вычетов 70
Комплексная плоскость 124
— — расширенная 136
Конечная разность 185–190
— — первого порядка 185
— — порядка n 186
Континуант 60–64
Корень n -ой степени из комплексного числа 127
— квадратный из комплексного числа 126
— многочлена кратный 116
— — простой 117
— — рациональный 116
— цифровой 82–83

Коэффициент Фурье, конечный
137

Коэффициенты биномиальные
21–28, 204

— — обобщенные 50

— полиномиальные 23

— фибоначчиевы 50, 229

Круговое свойство
дробно-линейных
отображений 146
— — инверсии 146

Лейбница формула 187

Лягушка путешественница 195

— сапер 195

Марсианские амебы 67, 103, 237

Массив Витхоффа 52, 230

Метод Архимеда 169

— бесконечного спуска 92, 281,
290, 291

— Браункера 193

— Виета 158, 295

— возведения в степень,
бинарный 99

— Гаусса 171, 281

— Гюйгенса 170

— итераций 163

— Лобачевского 169

— математической индукции
8–14, 206

— неопределенных
коэффициентов 114, 115, 286

— Ньютона 165, 168, 278

Многочлен 106–123

— Гаусса 204–205, 314

— Лагранжа интерполяционный
121–123

— Люка 194–195, 201, 291, 314

— положительный 134

— симметрический 118–121,
182–184

— Фибоначчи 194–195, 201, 291,
314

— целозначный 189

— Чебышёва 128, 130, 194, 201,
263, 311, 312, 314

— элементарный симметрический
118

многочлен возвратный 205

Многочлены коммутирующие 130

Множество Кантора 100

Модуль комплексного числа 124

Морозные узоры 63

Набор показателей 182

— — мажорирующий 183

— — несравнимый 184

Наибольший общий делитель
многочленов 112
— чисел 34

Наименьшее общее кратное 38

Неполные частные 53

Неравенство 176–184

— Бернулли 11

— Гельдера 181

— Иенсена 181, 283, 284

— Коробова 178

— Коши—Буняковского 179

— между средним
арифметическим и средним
геометрическим 11, 180, 184,
285

— между средним
арифметическим и средним
квадратическим 179

— Минковского 181

— Мюрхеда 184

— симметрическое 182–184

— Чебышёва 178

Ним-сумма 102–103, 252

Окружность Аполлония 125

— Эйлера 147

Ортоцентр треугольника 147

Осевая симметрия 135

Основная теорема алгебры 130

— — арифметики 40

Отношение двойное 145, 146

— трех точек 145

— четырех точек 145

- Отображение дробно-линейное
 136
 — комплексной плоскости 135–136
- Параллельный перенос 135
 Пентатоп 288
 Перестановка 20, 182
 Период десятичной дроби 90
 — непрерывной дроби 56
 Племя Мумбо-Юмбо 16, 207
 Поворот 135
 Полиномиальная теорема 23
 Полиномиальные коэффициенты
 23
 Последовательность линейная
 рекуррентная 190–197
 — Люка 48
 — Морса 101
 — Трибоначчи 197, 200, 295
 — Фибоначчи 45
 Правило знаков Декарта 112
 — Кирхгофа 174, 281
 — произведения 16
 — суммы 16
 Предпериод десятичной дроби 90
 — непрерывной дроби 56
 Преобразование Абеля 187
 — комплексной плоскости 135–136
 Преферанс 23, 28
 Признак делимости 82–85
 — — на 2, 4 и 8 82
 — — — 3 и 9 82, 85
 — — — 5 и 25 82
 — — — 7 83
 — — — 11 82
 — — — 17 84
 — — — 19 83
 — — Паскаля 85
 — — эстафетный 84
 Принцип крайнего 220
 Принцип Дирихле 17–19, 70, 76,
 239, 249
 Производящая функция 198–204
 — — многочленов Люка 201
 — — — Фибоначчи 201
 — — — Чебышёва 201
- — чисел Каталана 203
 — — — Люка 200
 — — — Фибоначчи 200, 298
 Прямая корневая 108, 157
 — Симпсона 148
 — Эйлера 147
- Радикальная ось 147
 Радикальный центр 147
 Разбиение прямоугольника 53
 — числа 201–203
 Размещения 20
 Результат 106
 Репьюнит 7, 95–96
 Ряд Лейбница 141, 142
 — обратных квадратов 134
 — формальный степенной 198–204
 Ряд Фурье, конечный 136
- Свойства подходящих дробей 54
 — сравнений 70
 — чисел Фибоначчи 45
 Свойство шестиугольника 25
 Система вычетов полная 70–71, 87
 — — приведенная 79, 87
 — сравнений 86–87
 — счисления биномиальная 25
 — — в остатках 86
 — — двоичная 43, 95, 98–105,
 252–255, 299, 309
 — — десятичная 95–98
 — — позиционная 8
 — — троичная 98–105
 — — факториальная 10
 — — фибоначчиева 47, 51, 86, 208
 — уравнений, линейных 171–174
 Сочетания 21
 Спектр числа 50, 229
 Сравнения 70–89
 — с одним неизвестным 74
 Среднее
 арифметико-геометрическое
 278
 — арифметико-гармоническое 166
 — арифметико-геометрическое
 166

- Среднее арифметическое 11, 181, 184
 — гармоническое 181
 — геометрико-гармоническое 167
 — геометрическое 11, 182, 184
 — квадратическое 182
 — степенное 181–182
 Степень точки относительно окружности 147
 Схема Горнера 114, 259
 Счастливые билеты 199, 297
- Теорема Безу 110, 257, 259
 — Валена 58
 — Вейерштрасса 161, 278
 — Виета 118–121, 265
 — — для квадратного уравнения 106, 255
 — Вильсона 74
 — Вильсона, обратная 74
 — Гауа 59
 — Гаусса—Люка 133
 — Дирихле 19
 — Евклида 32
 — китайская об остатках для многочленов 111
 — — — для чисел 86–89, 247
 — Клемента 74
 — косинусов 152, 269
 — — для трехгранного угла 153
 — Лагранжа 57
 — — о конечном приращении 278
 — Ламе 49
 — Лежандра 57
 — Лейбница 74
 — Лиувилля 190
 — Люка 46
 — о рациональных корнях многочлена 116, 129, 263
 — о симметрических многочленах 118
 — о трех центрах подобия 135
 — основная алгебры 130
 — — арифметики 40
 — полиномиальная 23, 76
 — Птолемея 269
 — синусов 152
 — — для трехгранного угла 153
 — Ферма (малая) 76–81, 243–246
 — Холла о свадьбах 15
 — Шарковского 167
 — Штёрмера 142
 — Эйлера 14, 76–81, 246, 249
 — — о четных совершенных числах 42
- Термит 65
 Тождество Гаусса 80
 — Кассини 45–46, 228
 — Фибоначчи 126
 Треугольник Лейбница, гармонический 27, 216
 — Люка 26
 — Паскаля 24, 27, 47–50, 217, 308
 — Паскаля, (1, 2) 26, 308
 Тригонометрическая форма комплексного числа 124
 Тригонометрические замены 159–161
 — тождества 314–316
- Уравнение биквадратное 126
 — кубическое 155–159
 — — неприводимый случай 158
 — Пелля 193, 311, 312
 — характеристическое 190–196
- Фазовая плоскость для квадратного уравнения 108
 — — для кубического уравнения 157–158
- Факториал 9, 311
 Ферма формула 170
 Фигуры Лиссажу 129
 Формула n -го члена линейной рекуррентной последовательности 191
 — Бине 47, 194, 200, 228
 — включений и исключений 28–30, 79, 218–219
 — Герона 153, 269
 — — итерационная 162
 — Джонсона 39

- Формула для чисел Каталана 31, 203, 300
 — Кардано 156, 158, 273–275, 295
 — Лежандра 43, 225–226, 239
 — Лейбница 187
 — Муавра 127, 131, 262, 264
 — Ньюкома 231
 — Ньютона, интерполяционная 188
 — Рамануджана 153
 — сложного радикала 93
 — сокращенного умножения 114
 — Тейлора для многочлена 114
 — Ферма 170
 — Эйлера 131
- Функция $\delta_q(a)$ 131
 — $\nu(n)$ 99, 252, 299
 — $\sigma(n)$ 41–43, 225
 — $\tau(n)$ 41, 80
 — вполне мультипликативная 42
 — выпуклая вверх (вниз) 180
 — гармоническая 190
 — многозначная 264
 — мультипликативная 40–44
 — показательная от комплексного аргумента 131
 — производящая 198–205
 — — — многочленов Люка 201
 — — — Фибоначчи 201
 — — — Чебышёва 201
 — — чисел Каталана 203
 — — — Люка 200
 — — — Фибоначчи 200, 298
 — Эйлера $\varphi(n)$ 78–81, 87, 243–244, 249
- Ханойская башня 12, 101, 252
- Цикл Де Брёйна 104
- Цифровой корень числа 82–83
- Числа автоморфы 88
 — гармонические 75
 — гексы 15, 288
 — Грегори 141
 — дружественные 42
 — Евклида, e_n 33, 72
 — из электрической розетки 57
 — иррациональные 90–95
 — Кармайкла 81, 313
 — Каталана, C_n 30–31, 64, 203, 311
 — квадратно-треугольные 192
 — квадратные 192, 290
 — комплексно сопряженные 124
 — комплексные 124–136
 — Люка, L_n 48–49, 54, 169, 200, 228, 279, 308, 312
 — Мерсенна 34, 42, 225, 312
 — многоугольные 14
 — несоизмеримые 90
 — октаэдральные 288
 — простые 32–34, 72, 316
 — — близнецы 33, 74
 — — длинные 97, 310, 312
 — пятиугольные 288
 — рациональные 90–95
 — совершенные 42, 75, 83, 225
 — составные 32–33
 — тетраэдральные 15, 288
 — треугольные 14, 192, 290
 — Трибоначчи 197, 200, 295, 298, 311
 — Ферма, f_n 34, 37, 313
 — Фибоначчи, F_n 45–50, 54, 59, 78, 151, 168, 200, 227–230, 279, 308, 311
 — Фробениуса 39
 — целые гауссовы 138–142
 — Штёрмера 142
- Число $2 \cos \frac{2\pi}{7}$ 59, 92, 128, 143, 153, 234, 248, 275, 279, 309
 — $2 \cos \frac{2\pi}{9}$ 59, 92, 143, 153, 235, 248, 275, 279, 309
 — $\frac{1}{7}$ 96
 — π 7
 — π 134, 141, 169–170, 309
 — $\sqrt{2}$ 51, 57, 58, 95, 143, 161, 165, 191, 232, 291, 309, 311, 312
 — $\sqrt{3}$ 57, 164, 192, 193, 309, 313

Числа $\sqrt{5}$ 195, 309

— $\sqrt[3]{2}$ 309

— $\hat{\varphi}$ 47, 228, 294

— e 7, 94, 95, 170, 178, 249, 280,
309

— i 7, 124

— Фейнмана 91

— Фибоначчи 294

— Фидия, φ 7

— Фидия, φ 47, 51, 200, 228, 269,
294, 302, 309

Шахматный город 22

Экспонента 187, 200

— комплексного аргумента 131

Надежда Борисовна Алфутова
Алексей Владимирович Устинов

Алгебра и теория чисел.
Сборник задач для математических школ

Подписано в печать 13.08.2009 г. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 21. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано по СтР-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести
в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mcsme.ru
