

Предисловие

В МАРТЕ 2009 ГОДА я сидел на каком-то административном совещании. Коллеге, сидевшему рядом со мной, было даже скучнее, чем мне. Очевидно, Максим Концевич думал о чем-то еще. Внезапно он передал мне билет на парижское метро, на котором было что-то нарисовано и написано единственное слово: «невозможно». Это была новая теорема, которой он хотел со мной поделиться! Чтобы догадаться, в чем состоит утверждение теоремы, мне потребовалось потратить несколько минут и чуть-чуть пошептаться с Максимом. Ещё через несколько минут я отыскал доказательство. Вот это утверждение.



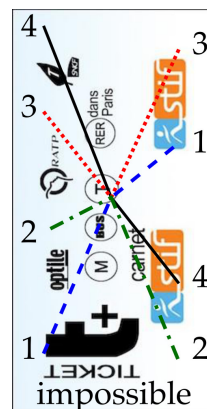
Максим Концевич

Теорема. Четверка многочленов P_1, P_2, P_3, P_4 от вещественной переменной x не может удовлетворять неравенствам

- $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ при малых $x < 0$,
- $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$ при малых $x > 0$.

На относительное расположение графиков четырех вещественных многочленов имеются некоторые ограничения. Я был потрясен: новый элементарный результат о четырех многочленах в 2009 году!

Впоследствии я попытался обобщить это утверждение, изучить ситуацию, когда многочленов более четырех, и так далее. В результате получилось приятное путешествие, с большим количеством окружных путей, по неожиданно разнообразным областям математики и разным периодам истории математики. Как обыч-



но, это привело к открытым проблемам, которые я умею решать лишь частично.

Цель книжки — пригласить читателя на эту математическую прогулку. Я не выбирал наиболее эффективный способ достижения конкретной цели; на самом деле никакой цели в этом тексте нет. Почти все главы независимы, и вы можете пропускать любые из них, если захотите. Если вы сочтете какой-нибудь пункт слишком сложным или слишком скучным, его тоже можно пропустить. Мы нанесем визит Гиппарху, Ньютону и Гауссу, а еще многим современным математикам. Мы немного поиграем с алгеброй, топологией, геометрией, комплексным анализом, комбинаторикой и компьютерными науками. Погуляем по миру математики?

Однако чтобы всё-таки достичь какой-то цели и не превращать эту прогулку в абсолютно случайное блуждание, давайте я процитирую результат, который будет доказан в одной из последних глав. Это, вероятно, единственный новый результат в этой работе.

Рассмотрим точку p на плоской кривой C .

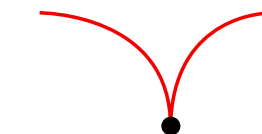
Если кривая C *гладкая*, локальная картина не очень интересна.

Если кривая C *особая* в точке p , картина может оказаться сложнее, как, например, для каспидальной точки $x^2 = y^3$. Ограничимся рассмотрением *алгебраических* кривых, заданных уравнением вида $F(x, y) = 0$, где F — это многочлен от x, y с вещественными коэффициентами. Оказывается, в окрестности одной из своих точек такая кривая представляется как объединение конечного числа неприводимых компонент, которые принято называть *ветвями*. Природа этих ветвей в прошлом была предметом многих споров; эту тему мы обсудим подробно. Основной результат состоит в том, что *топологически* все ветви являются гладкими! Точнее, для каждой ветви имеется локальный гомеоморфизм плоскости, переводящий ее в прямую. Каждая ветвь пересекает маленькую окружность с центром в p ровно в двух точках.

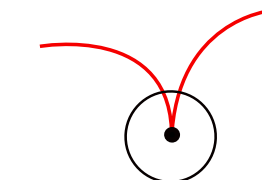
Относительное положение нескольких ветвей кривой — вопрос гораздо более тонкий. В окрестности особой точки топология кривой описывается четным числом точек окружности, разбитых на пары: это разбиение задается ветвями. Мы получаем $2n$ точек на кривой, образующих n пар, где каждая пара покрашена в свой цвет или отмечена своей буквой.



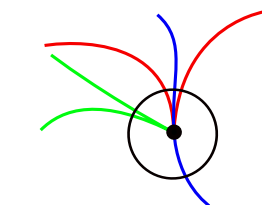
Гладкая кривая



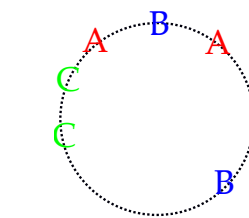
Каспидальная точка



Маленькая окружность пересекает кривую в двух точках

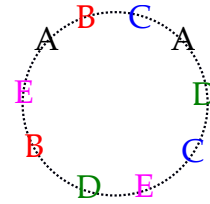


Кривая с тремя ветвями

Ассоциированное циклическое слово $ABACCB$

Теперь я могу сформулировать теорему, которая более или менее будет нашей конечной целью, чем-то вроде маяка, указывающего направление.

Теорема. *Не существует особенности вещественной алгебраической кривой на плоскости, состоящей из пяти ветвей A, B, C, D, E и пересекающей маленькую окружность, как на рисунке на полях.*



Невозможные пять ветвей

На самом деле я докажу гораздо более точную теорему: я дам полное описание всевозможных топологических конфигураций ветвей аналитической кривой.

Я написал эту «маленькую книжечку», ориентируясь на одного конкретного читателя: на себя самого в годы учёбы в университете. Точнее, я ограничил необходимые для ее чтения предварительные сведения тем, что я знал сам в то время, когда сдавал экзамен «agrégation»¹, ровно сорок лет тому назад! Я хорошо помню, что мне было очень тяжело (да и по сей день непросто) читать длинные математические трактаты, полные технических деталей, и больше нравилось смотреть на картинки. Сейчас я уже выучил, что точность и подробности часто необходимы в математике, но мне до сих пор очень нравятся прогулки. Я пытался вообразить, как бы я сам среагировал, увидев эту книгу, когда я был начинающим. Эта беседа между «двумя версиями меня самого» оказалась интересной и напомнила мне рассказ Борхеса «Другой». Было ли это сном? Или реконструкцией прошлого?

¹ Французский экзамен на право преподавания в средней и высшей школе, аналог выпускного экзамена из университета. — *Прим. пер.*

Здесь следует сделать предостережение: это не учебник со структурой «определение-теорема-доказательство». Вы должны быть готовы к тому, что время от времени мы можем теряться, как часто бывает на прогулках. Я знаю, что вы будете ворчать на меня из-за отсутствия точных определений, и действительно, некоторые определения вам придется принимать сырыми... Конечно же, учебники необходимы, и на полях я буду приводить множество ссылок. Однако я убежден, что математические идеи и примеры предшествуют формальным доказательствам и определениям. Как когда-то сказал Даламбер: «Просто идите вперед... и вера последует за вами!» Время от времени вам будет открываться красивый вид, простирающийся из тумана, подобный тому, что



6 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПРОГУЛКА С ОСМОТРОМ ОСОБЕННОСТЕЙ

изображен на фронтисписе (это картина Каспара Давида Фридриха «Странник над морем тумана», 1818): не так ли устроен и математический мир?

Я надеюсь, что некоторым сегодняшним заинтересованным студентам понравятся эти виды.

Теперь мы готовы отправиться в путешествие.