Дорожная карта

Поскольку наш путь явно не будет прямым и вам нужно быть готовыми к тому, что мы иногда будем уходить в сторону, может оказаться полезным дать примерное описание нашего маршрута в стиле того, как это делают туристические операторы в рекламных буклетах своих туров.

В первых четырех главах обсуждается *взаимное расположение графиков семейства вещественных многочленов* $P_1, \ldots, P_n$, в духе теоремы Концевича, о которой я говорил в предисловии. Сравнение значений многочленов $P_i(x)$ при малых отрицательных и малых положительных значениях x задает перестановку множества $\{1, \ldots, n\}$, которая и описывает локальную картину в окрестности нуля. Я приведу достаточно точное описание этих перестановок. Оказывается, они уже рассматривались в ином контексте специалистами по комбинаторике, под именем *отделимых перестановок*. Далее мы рассмотрим *стеки с проталкиванием и удалением*, описанные Дональдом Кнутом в его книге «Искусство программирования». Мы также *подсчитаем* число отделимых перестановок, и это даст нам возможность выяснить, что эти числа уже рассматривались Гиппархом более двух тысяч лет назад.

Перестановка, заданная пятью многочленами

Затем мы попробуем обобщить задачу, рассмотрев не графики многочленов, а *плоские кривые*, неявно заданные некоторым вещественным полиномиальным уравнением $F(x, y) = 0$. Это потребует понимания топологии алгебраической (или аналитической) кривой в окрестности особой точки. Первые важные результаты на эту тему были получены Ньютоном в 1669 году в его замечательной работе «Tractatus de methodis serierum et fluxionum»,

Из работы Ньютона «De methodis»

которую мы изучим двумя главами позже. В этой работе подробно описывается знаменитый *метод Ньютона*, позволяющий приближенно находить корни многочленов. В ней также вводится связанное с ним понятие *многоугольников Ньютона*. Строго говоря, Ньютон не приводил доказательств, однако он понимал, что локально аналитическая кривая состоит из конечного числа *ветвей*, которые представляют собой «графики» *формальных степенных рядов с рациональными показателями*. В дополнительной главе, которую я назвал «Немного формальной алгебры», приводятся объяснения результатов Ньютона в современных терминах вместе с доказательствами.

Из докторской диссертации Гаусса

До этого момента наше изложение будет чисто алгебраическим. Затем мы рассмотрим принадлежащее Гауссу первое доказательство основной теоремы алгебры — оно легло в основу его докторской диссертации, защищенной в 1799 году, и использовало рассуждения топологического характера, что по тем временам было революционным. Оно основывалось на недоказанном утверждении, что *алгебраическая кривая, входящая внутрь диска, должна из него выйти*. Доказательство этого утверждения значительно тоньше, чем может показаться, и два математика с одним и тем же именем не смогли получить его в течение XIX века.

Эйлер, Коши и Пуанкаре были великими мастерами в деле обращения со степенными рядами. Две главы посвящены их открытиям. В конце второй из них мы, используя Calcul des limites de Cauchy, наконец получим доказательство *сходимости рядов Ньютона*. Это позволит нам показать, что маленькая окружность, проведенная вокруг особенности плоской вещественной аналитической кривой, пересекает кривую в четном числе точек, что определяет *хордовую диаграмму*, т. е. $2n$ точек, циклически упорядоченных на окружности и объединенных в пары.

Диск, раздутый в трех точках

В следующих трех главах рассматривается топология особенностей аналитических плоских кривых. Мы объясним метод *раздутия* — это своего рода микроскоп, позволяющий нам глубже заглянуть внутрь особенности. Топологически он заключается во вклеивании ленты Мёбиуса или ожерелий Мёбиуса, если микроскоп используется несколько раз. Операция раздутия окажется мощным инструментом для разрешения особенностей.

Локальные картинки, описывающие *комплексные* плоские кривые, также красивы и достойны того, чтобы на них взглянуть. Поскольку $\mathbb{C}^2$ имеет вещественную размерность 4, мы будем пересекать кривую маленькими трехмерными сферами с центром в особенности. С этой точки зрения даже прямые могут дать нам примечательные конструкции, как, например, расслоение Хопфа.

Расслоение Хопфа

Более сложные особенности, например касп $x^3 - y^2 = 0$, описываются при помощи *узлов* и *зацеплений*. Чтобы разобраться с общим случаем, мы нанесем визит Виктору Пюизё, который в 1850 году предложил совершенно новый подход к рядам Ньютона. В 1968 году Джон Милнор использовал эти идеи, чтобы получить полную топологическую картину над *комплексными числами*.

Узел-трилистник

Интересно, что мы найдем связь между отделимыми перестановками и ассоциэдрами. Это семейство выпуклых многогранников, которые были введены Тамари и Сташеффом, чтобы понять значение «ассоциативности с точностью до гомотопии». С помощью этих многогранников Джиму Сташеффу удалось дать описание пространств с тем же типом гомотопий, как у топологических групп. Это оказалось стартовой точкой для развития теории операд, которая играет фундаментальную роль в современной теории гомотопий и алгебраической топологии. Операды — это очень общие алгебраические структуры, которые превосходным образом приспособлены к нашей ситуации. К числу типичных примеров операд относятся деревья, косы, конфигурационные пространства и т. д. Мы увидим, что набор всех особенностей, с точностью до гомеоморфизмов, можно рассматривать как операду особенностей, что помогает понять общую картину.

Ассоциэдр

Исключительно для забавы мы изучим короткую заметку Гаусса о замкнутых кривых на плоскости с простыми двойными точками. Если обойти вдоль кривой, в каждой двойной точке мы побываем дважды, так что это определяет некоторую хордовую диаграмму. Можно ли как-то описать такие диаграммы?

Наконец мы достигнем нашей приблизительной цели: полного описания хордовых диаграмм, получающихся по особенностям вещественных аналитических плоских кривых. Этому посвящены следующие две главы.

Книга завершается двумя дополнительными главами. Одна из них посвящена подходу Гаусса к числам зацеплений, а во второй описывается без доказательства универсальный инвариант Концевича для узлов. Основная цель этой финальной главы — воодушевить читателя продолжать исследования дальше.