

Занятие 1

Поиск закономерностей

На начальном этапе работы с последовательностями важно научить детей воспринимать последовательность (составной, потенциально бесконечный объект) как единое целое, подчиняющееся единому правилу.

На этом занятии мы будем рассматривать числа, записанные в строчку в определенном порядке, или, иначе говоря, **числовые последовательности**. Для начала попробуем научиться угадывать правило, по которому эти числа следуют одно за другим, а также находить числа, стоящие на определенных местах.



Пример 1.1. Даны последовательности чисел: а) 5, 8, 11, 14, 17, ...; б) 1, 8, 27, 64, 125, ...; в) 1, 2, 6, 24, 120, ...; г) 4, 8, 16, 32, 64, ... Для каждой из них: 1) сформулируйте правило, по которому она составлена, и укажите следующее число; 2) запишите числа, которые будут стоять на десятом и на двадцатом месте.

Отметим, что ответ на первый вопрос может быть неоднозначным, так как школьники могут увидеть различные закономерности. При этом имеет смысл обсуждать наиболее очевидные.

Решение. а) 1. Заметим, что **каждое следующее число на 3 больше чем предыдущее**, тогда следующим будет число 20.

2. Так как число 20 будет шестым, то, постепенно прибавляя по 3, получим, что на десятом месте стоит число 32. Можно таким же образом искать число, стоящее на двадцатом месте, но это не очень удобно. Имеет смысл рассуждать так: сколько раз надо прибавить по 3, чтобы из первого числа получить двадцатое? Это надо сделать 19 раз, поэтому двадцатое число равно $5 + 19 \cdot 3 = 62$.

б) 1. Заметим, что $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, $125 = 5^3$, то есть *каждое число — это номер места, на котором оно стоит, возведенный в куб*. Значит, следующее число: $6^3 = 216$.

2. Десятое число равно $10^3 = 1000$, а двадцатое — это $20^3 = 8000$.

в) 1. Заметим, что второе число получается из первого умножением на 2, третье получается из второго умножением на 3, четвертое из третьего — умножением на 4 и так далее, то есть *каждое число получается из предыдущего умножением на номер места, на котором оно стоит*. Значит, следующее число: $120 \cdot 6 = 720$.

2. Десятое число получается из девятого умножением на 10, девятое — из восьмого умножением на 9, и так далее. Значит, десятое число — это *произведение всех натуральных чисел от 1 до 10*. Такое произведение принято записывать так: $10!$ (*читается: десять факториал*), причем вычислять это произведение особого смысла не имеет. Аналогично двадцатое число — это $20!$ (*двадцать факториал*).

г) 1. *Каждое число получается из предыдущего умножением на 2*, поэтому следующим будет число 128.

2. Для ответа на этот вопрос полезно записать данную последовательность чисел иначе: $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \dots$, и тогда закономерность, по которой она составлена, можно сформулировать по-другому: *каждое число является степенью двойки, показатель которой на единицу больше, чем номер места, на котором оно стоит*. Тогда можно увидеть, что десятое число равно 2^{11} , а двадцатое — это 2^{21} .

Ответ: а) 1) 20; 2) 32 и 62; б) 1) 216; 2) 1000 и 8000; в) 1) 120; 2) $10!$ и $20!$; г) 1) 128; 2) 2^{11} и 2^{21} .

В рассмотренном примере мы встретились с двумя видами правил, по которым могут быть построены последовательности: в пункте а) каждый **член последовательности** определяется исходя из предыдущего, а в пункте б) он определяется исходя из его порядкового номера. В пунктах в) и г) предъявлены последовательности, которые можно задать как тем, так и другим способом.

Понятно, что последовательность из пункта а) также можно задать исходя из номера и первого члена, но обсуждать это на данном этапе, скорее всего, преждевременно. При этом полезно обсудить на более простых примерах, что разные правила могут задавать одну и ту же последовательность.

Пример 1.2. Саша и Маша записали в ряд по 20 чисел. Саша начал с единицы и придумал такое правило: на втором месте — разность между первым числом и числом 3, на третьем — сумма второго числа и числа 5, затем — разность третьего и числа 7, потом сумма четвертого и числа 9, и так далее. Маша поступила проще: записала последовательные натуральные числа от 1 до 20, а затем у каждого четного числа поменяла знак на противоположный. Какие ряды чисел у них получились: разные или одинаковые?

Решение. Непосредственным вычислением можно убедиться, что ряд чисел Саши выглядит так: 1, -2 , 3, -4 , 5, -6 , ..., 19, -20 . Очевидно, что у Маши получился такой же ряд.

Ответ: одинаковые.

Встречаются последовательности, в которых угадать правила, по которым они построены, и найти недостающие члены весьма непросто, и помогают в этом не только предыдущие, но и последующие члены.

Пример 1.3. Дана последовательность, в которой пропущено ровно пять чисел: 102, 105, 111, 114, 120, 123, 129, __, __, __, __, __, 201, 204, 210, 213, 219. Вставьте пропущенные числа.

Решение. Для того чтобы восстановить пропущенные числа, необходимо заметить, что каждый член данной последовательности начиная со второго получается в резуль-

тате сложения предыдущего члена и суммы его цифр: $105 = 102 + 3$, $111 = 105 + 6$ и так далее. Таким образом, искомые числа: $141 = 129 + 12$, $147 = 141 + 6$, $159 = 147 + 12$, $174 = 159 + 15$, $186 = 174 + 12$.

Ответ: пропущены числа 141; 147; 159; 174; 186.

Отметим, что, на первый взгляд, существует более простая закономерность: каждое число, стоящее на четном месте, на 3 больше, чем предыдущее число, а каждое число, стоящее на нечетном месте, на 6 больше, чем предыдущее. Эту закономерность использовать не удастся: если вставить числа 132, 138, 141, 147 и 150, то следующим числом должно быть 156, а не 201.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1.1. Сформулируйте правило, по которому составлена каждая последовательность, найдите следующее число и число, стоящее на десятом месте:

- а) 3, 6, 9, 12, 15; ...; б) 20, 15, 10, 5, 0, -5, ...;
в) 1024, 512, 256, 128, 64, ...; г) 10, 8, 11, 9, 12, 10, ...;
д) 2, 5, 10, 17, 26, ...; е) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{2}$, ...;
ж) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{16}{81}$, $\frac{25}{243}$, ...; з) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

1.2. Петя, Вася и Коля записали в ряд по 100 чисел. У Пети пятое число равно 12, и каждое число начиная со второго на два больше левого соседа. У Васи первое и третье число равны 4 и 6 соответственно, а каждое число, кроме крайних, вдвое меньше суммы его соседей. А Коля просто записывал периметры прямоугольников шириной в одну клетку: сначала — периметр прямоугольника длиной в одну клетку, потом — длиной в две клетки, и так далее (сторона каждой клетки равна 1). У кого из мальчиков совпали записанные ряды чисел?

1.3. На прямой отметили 100 точек так, что расстояние между любыми соседними точками равно 7.

- а) Каково расстояние между крайними точками?
б) Точки пронумеровали по порядку слева направо. Какой номер имеет точка, расстояние от которой до первой точки равно 77?

в) Координата первой точки равна 10. Найдите координату тридцать первой точки.

г) Какой номер будет иметь точка с координатой 110, если координата первой точки равна 5?

1.4. Дана последовательность: 1,5; 1,65; 1,8; 1,95; ...

а) Укажите закономерность и найдите число, стоящее на сто первом месте.

б) На каком месте в этой последовательности стоит число 6?

1.5. Найдите закономерность в последовательности чисел 111, 213, 141, 516, 171, 819, 202, 122, ... и запишите следующие два числа.

1.6. Найдите закономерность и следующий член последовательности: 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ...

1.7. Даны две последовательности:

2, 4, 8, 16, 14, 10, 2, 4, ... и 3, 6, 12, 6, 12, ...

В них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону. а) Укажите этот закон. б) Найдите все последовательности натуральных чисел, построенные по этому же закону, все члены которых равны между собой. в) Докажите, что если такая последовательность начинается с 2^{1000} , то в ней рано или поздно появится однозначное число.

Ответы и решения

1.1. **Ответы:** а) каждое число получается из предыдущего прибавлением числа 3 (каждое число равно своему утроенному порядковому номеру); следующее число: 18, десятое число: 30;

б) каждое число получается из предыдущего вычитанием числа 5; следующее число: -10 , десятое число: -25 ;

в) каждое число в два раза меньше предыдущего; следующее число: 32, десятое число: 2;

г) на нечетных местах расположен ряд последовательных натуральных чисел начиная с числа 10, а на четных местах — ряд последовательных натуральных чисел начиная с числа 8; следующее число: 13, десятое число: 12;