Введение

Броуновское движение в физике

1. В 1827 г. шотландский ботаник Роберт Браун (Robert Brown, 1773—1858) поместил крошечную крупинку цветочной пыльцы растения Clarkia pulchella в воду и наблюдал за ней под микроскопом. Он обнаружил, что эта крошечная крупинка совершает непрерывное зигзагообразное движение, хотя, по его же словам, наблюдаемое движение «не связано с потоками в жидкости, с постепенным испарением, а присуще самим частичкам».

Описание этих наблюдений было опубликовано в статье *R. Brown*. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies // Philosophical magazine. 1828. V. 4. P. 161—173.

Нельзя сказать, что подобные движения не были известны ранее. Так, в поэме «О природе вещей», 60 г. до н. э., римский поэт Лукреций описывал подобные движения. В 1785 г. Ян Ингенхауз (J. Ingenhousz) описал движение угольной пыли в алкоголе. Однако лишь Р. Браун дал подробное описание этих беспорядочных движений.

Некоторые математические описания подобных явлений были даны Т. Н. Тиле (T. N. Tiele) в 1880 г. в статье про метод наименьших квадратов. В 1900 г. Л. Башелье (L. Bachelier) в своей диссертации «Théorie de la spéculation» представил стохастический анализ сходного беспорядочного движения цен на финансовом рынке.

2. Первые физико-математические объяснения движения, описанного Р. Брауном и названного в его честь *броуновским* (брауновским) *движением*, были предложены в работах А. Эйнштейна и М. Смолуховского: *A. Einstein*. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen // Ann. Phys. (Ser. 4). 1905. V. 17 (v. 322, № 8). P. 549—560 (рус. пер.: *А. Эйнштейн*. О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты // Собр. науч. тр. Т. 3. 1966. С. 108—117) и *M. Smoluchowski*. Zur kinetischen

Theory der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen // Ann. Phys. (Ser. 4). 1906. V. 21 (v. 326, № 14). P. 756—780.

В своей работе 1905 г. А. Эйнштейн дал четкое объяснение механизма броуновского движения. При этом для математического изучения броуновского движения он применяет *вероятностно-статистический подход*, выведя для плотности $\varphi = \varphi_t(x)$ (положения частицы в момент времени t в точке x) уравнение (теплопроводности)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

из которого он заключает, что любая из координат перемещаемой частицы за время t будет не порядка t, как думалось, а порядка $\sqrt{t}$.

Вторая часть работы — это выяснение зависимости коэффициента (диффузии) D от ряда физических величин (число Авогадро, константа Больцмана, температура и т. д.).

Эта работа привлекла внимание физиков, поскольку в ней давалось (косвенное) доказательство существования атомов и молекул, что затем было экспериментально подтверждено в работах Жана Батиста Перрена (Jean Baptiste Perrin, 1870—1942) в 1908 г. (См. *первое* издание 1913 г. его книги «Les Atomes».)

Броуновское движение и винеровская мера в математике

1. Вот что писал Н. Винер (1894—1964) в своей книге «Я — математик» (М.: Наука, 1967; Ижевск: РХД, 2001; в английском оригинале — *N. Wiener*. I am a mathematician. Garden City, N. Y.: Doubleday & Co., 1956):

«Само по себе броуновское движение вовсе не было совсем неисследованной областью физики. Но в фундаментальных работах Эйнштейна и Смолуховского, посвященных этой проблеме, изучалось или поведение некоторой частицы в какой-то фиксированный момент времени, или же зависящие от времени статистические характеристики большой совокупности частиц, математические же свойства траекторий отдельных частиц никак не затрагивались.

В этом последнем направлении почти ничего не было известно, если не считать глубокого замечания французского физика Перрена, отметившего в своей книге «Атомы» [Les Atomes; рус. пер.: М.: Гостехиздат, 1924], что крайне нерегулярные траектории частиц, совершающих броуновское движение, заставляют вспомнить непрерывные, нигде не дифференцируемые кривые математиков. В этом замечании говорится о непрерывности, поскольку частицы не совершают никаких мгновенных скачков, и о недифференцируемости, поскольку кажется, что ни в какой момент времени эти частицы не обладают точно определенным направлением движения».

Эти слова объясняют представленное Н. Винером изложение теории броуновского движения (*N. Wiener*. Differential-space // J. Math. and Phys. 1923. V. 2. P. 131—174), называемого также винеровским процессом, почти все траектории которого являются *непрерывными нигде не дифференцируемыми функциями*.

2. В гл. I и II настоящей книги дается определение броуновского движения и рассматриваются вопросы существования и математического построения этого движения, называемого, как уже сказано, также винеровским процессом.

Есть несколько подходов к решению этих вопросов. Первоначальный метод Винера состоял в построении такого процесса с помощью функциональных тригонометрических рядов со случайными коэффициентами. Более общий подход к конструкции процессов был предложен А. Н. Колмогоровым, который доказал существование броуновского движения, исходя из общей конструкции процессов по конечномерным распределениям и теоремы, дающей условия существования модификации с непрерывными траекториями.

Броуновское движение обладает многими интересными траекторными свойствами — его траектории непрерывные, но не дифференцируемые и не монотонные. Для них выполнены законы повторного логарифма, арксинуса, арктангенса. Эти и другие вопросы рассматриваются в гл. III и VI.

В современной теории вероятностей наряду с вероятностным пространством рассматривают также *фильтрованное* вероятностное пространство. С этим понятием связаны марковские моменты, моменты остановки, строго марковское свойство и др. Материал, относящийся к этим вопросам, содержится в гл. IV и V.

Броуновское движение порождает многие известные процессы — броуновский мост, бесселевские процессы, процессы Орнштейна — Уленбека и ряд других. Рассмотрению броуновского моста посвящена глава VII, в которой дается применение в математической статистике (критерии Колмогорова и Смирнова).

В главе VIII для случая дискретного времени обсуждаются важные вопросы равномерной интегрируемости и опциональности (сохранения различных свойств при замене детерминированного момента времени на случайный).

С броуновским движением тесно связана теория мартингалов. Некоторым вопросам этой теории и ее применениям к броуновскому движению (тождества Вальда, характеризационная теорема П. Леви, дающая условия, при которых непрерывный мартингал является броуновским движением, теорема Гирсанова) посвящены гл. IX и X.

В теории вероятностей и ее применениях проводится много исследований относительно распределений вероятностей моментов выхода броуновского движения на те или иные границы. Ряд конкретных случаев рассматриваются в гл. XI. Интересна изложенная здесь техника получения соответствующих результатов.

Именно с броуновским движением связано развитие стохастического анализа, в основе которого лежит конструкция стохастического интеграла Ито и формула замены переменных. Им посвящена глава XII, результаты которой будут постоянно использоваться в других главах.

Вопросам поведения броуновского движения в пространствах разных размерностей (возвратность и невозвратность, среднее значение меры пребывания, вероятностная функция Грина) посвящается гл. XIII.

Теория броуновского движения тесно связана с теорией потенциала, гармоническими функциями, дифференциальными уравнениями. Глава XIV дает представление об этих вопросах, включая и такие вопросы, как вероятностное представление решений задач Дирихле и Пуассона для оператора Лапласа с граничными условиями.

В гл. XV включен материал векторного исчисления, дифференциального и интегрального анализа, формулы Грина и Стокса. Это классический материал, но он включен в книгу, поскольку будет систематически использоваться и напоминание этих результатов делает наше изложение более замкнутым.

Как уже говорилось, нас особенно интересует проблематика вероятностных решений дифференциальных уравнений с частными производными. Излагаемый в гл. XVI материал о фундаментальных решениях и функциях Грина можно рассматривать как предпосылку к сформулированной проблеме. В гл. XVII и гл. XVIII подробно изучаются процессы Орнштейна—Уленбека, которые далее будут часто встречаться, и процессы Бесселя, обладающие многими интересными особенностями. Все эти процессы порождаются броуновским движением.

В следующей главе XIX рассматривается общий вопрос об интегральных представлениях по броуновскому движению. Здесь также рассматриваются такие вопросы, как стохастическая замена времени (теоремы Дамбиса и Дубинса—Шварца, теоремы Найта, Монро и т. п.).

Глава XX посвящена двумерному (плоскому) броуновскому движению, что иллюстрирует связь этого движения с комплексным анализом. Особо отметим здесь материал о конформной инвариантности П. Леви, теорему Спицера об асимптотическом поведении угловой составляющей комплексного броуновского движения и теорему Колмогорова—Леонтовича о площади, заметаемой броуновским диском конечного радиуса.

Вероятностная мера броуновского движения — это винеровская мера. Соответствующий материал содержится в главе XXI, в которой рассматриваются и различные свойства этой меры (например, квазиинвариантность), и различные вычисления по этой мере. В связи с понятием винеровской меры следует отметить интересное обобщение (кратко излагаемое в § 2 гл. XXI) этого понятия — абстрактную винеровскую меру, введенную Л. Гроссом в 1965 г.

В следующей главе XXII мы подробно рассматриваем вероятностное представление решений ряда дифференциальных уравнений с частными производными (уравнение теплопроводности, уравнение Фейнмана—Каца, уравнение Блэка—Шоулса). Дается краткое введение к уравнению Шрёдингера.

О броуновском движении часто говорят как о предельном объекте в функциональной центральной предельной теореме. С тем чтобы сделать подобное высказывание более определенным, мы приводим в гл. XXIII—XXV большой материал о слабой сходимости вероятностных мер на метрических пространствах (включая теорему Прохорова и принцип инвариантности Донскера). Этот материал требует большой предварительной работы, связанной с метрическими пространствами, свойствами вероятностных мер на таких пространствах, в частности равномерной плотностью, и др. Изложение здесь завершается доказательством принципа инвариантности Донскера и существования винеровской меры как некоторого предельного объекта в смысле слабой сходимости.

Материал многих последующих глав связан с *методом Стейна* в оценивании *близости* вероятностных мер и *исчислением Маллявэна* на *винеровском пространстве*, т. е. банаховом пространстве $C_0[0,T]$ (непрерывных функций, выходящих из нуля) с винеровской мерой.

В гл. XXVI подробно рассматривается *метод Стейна*, позволяющий оценивать близость вероятностных мер в различных метриках, таких как равномерная метрика Колмогорова, расстояние по вариации, метрика Васерштейна и др. Приводится ряд результатов, где в качестве предельного распределения возникает не только нормальное (гауссовское) распределение, но и пуассоновское (согласно Чену).

Если стохастический анализ связан прежде всего с *интегрированием* по броуновскому движению, то материал последующих глав будет связан с *дифференциальным исчислением Маллявэна* на винеровском пространстве. Сначала (гл. XXVII) рассматриваются предпосылки этого исчисления, называемого также *исчислением вариаций*. Сюда мы относим вопросы интегрирования по частям, разные вопросы дифференцирования в конечномерном пространстве и связанные с ними операторы D, δ и L и полиномы Эрмита. Затем (в гл. XXVIII) рассматриваются операторы Эрмита, Орнштейна—Уленбека, Мелера, разного рода неравенства (Пуанкаре, Виртингера, Соболева, Эфрона—Стейна, концентрационные неравенства).

К вопросу о предпосылках к исчислению Маллявэна относится и глава XXIX, в которой рассматриваются функциональные производные (по Фреше и по Гато), изонормальные гауссовские процессы и необходимые для дальнейшего вопросы структуры L^2-функционалов на винеровском пространстве, кратные интегралы Винера—Ито и повторные интегралы Ито.

Собственно изложение исчисления Маллявэна начинается с гл. XXX. Здесь определяется сначала производная для полиномиальных функционалов (S) на винеровском пространстве и затем для замыкания ($\overline{S}$) таких функционалов (по соболевской метрике).

Важными в формуле интегрирования по частям являются дивергентные операторы, которые, оказывается, совпадают с интегралами Скорохода, обобщающими интегралы Ито на случай, вообще говоря, упреждающих функций. Для случая винеровского пространства в гл. XXX рассматриваются вопросы действия разных операторов (Эрмита, Орнштейна—Уленбека, Мелера) на функционалы, определенные на этом пространстве, их структура и свойства (например, гиперсжимающие полугруппы).

Глава XXXI посвящена рассмотрению ряда вопросов, где применяется исчисление Маллявэна.

Так, использование производных Маллявэна позволяет дать представление подынтегральных выражений в формуле Кларка—Окона для L^2-функционалов на винеровском пространстве.

Исчисление Маллявэна возникало в связи с разработкой вероятностного доказательства гладкости решений задачи Коши для параболического уравнения, где правая часть задается оператором второго порядка (см. формулы (1), (2) в § 5 гл. XXXI).

Условия гладкости (гипоэллиптичности) были получены в 1967 г. Хёрмандером чисто аналитическими методами. Переформулировав эту задачу в терминах решений соответствующего стохастического дифференциального уравнения, Маллявэн дал *вероятностное* доказательство результатов Хёрмандера. Изложению этого круга вопросов посвящены § 3—5 гл. XXXI.

В финансовой математике многие модели основаны на стохастических дифференциальных уравнениях, порождаемых броуновским движением. Тем самым приходится иметь дело с функционалами, определенными на винеровском пространстве, для которых развито исчисление вариаций («исчисление Маллявэна»). Глава XXXII содержит изложение вопросов «чувствительности» (главным образом для некоторых опционов) цен, когда те или иные характеристики моделей изменяются, скажем, на эпсилон.

Глава XXXIII представляет интерес и с точки зрения классических предельных теорем сходимости к гауссовскому закону, и с точки зрения применения идей исчисления Маллявэна и идей метода Стейна. В этой главе рассматриваются различные функционалы F на винеровском пространстве и приводятся оценки расстояния (по вариации и в метрике Колмогорова) их распределений от гауссовского распределения.

Глава XXXIV посвящена теории стохастических дифференциальных уравнений. Многие такие уравнения появляются и в основном материале книги (уравнения Орнштейна—Уленбека, броуновского моста, Блэка—Шоулса, Бесселя и др.).

При систематическом изучении материала книги рекомендуется ознакомиться с данной главой как можно раньше. Это даст представление о разнице между сильными и слабыми решениями, о теоремах существования и единственности решений стохастических уравнений. Рассматриваются здесь также разные подходы к понятию марковских физических процессов, введенных для случая непрерывного времени в работе А. Н. Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей» (1931 г.) под названием «стохастически определенных» процессов (или, как иногда говорят, марковских процессов в широком смысле). Теорема в § 5 дает представление о разных формах марковского свойства применительно к решениям стохастических дифференциальных уравнений.

Глава XXXV посвящена изложению теории *обратных* стохастических дифференциальных уравнений, характеризуемых прежде всего тем, что вместо начального условия задается условие в *терминальный* момент времени. Сами же решения таких уравнений являются по определению адаптированными, как и в обычных стохастических дифференциальных уравнениях. Такие (обратные) уравнения возникают в разнообразных вопросах самой теории вероятностей и в ее применениях, например, к финансовой математике, а также при отыскании вероятностных представлений решений дифференциальных уравнений с частными производными. Эти вопросы изучаются в гл. XXXVI, где также рассматривается проблематика, связанная с нелинейными ожиданиями и их представлениями.

Впечатляющее применение *обратных* стохастических дифференциальных уравнений мы находим в стохастическом управлении в системах, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями. В гл. XXXVII мы не только излагаем соответствующую теорию, но и достаточно подробно описываем нужные здесь вариационные методы — сначала историю их возникновения, затем основные результаты (уравнения Эйлера—Лагранжа, принцип максимума и др.)

Броуновское движение ведет себя весьма экзотическим образом, что демонстрируется во многих главах книги. В главе XXXVIII поведение траекторий броуновского движения в размерностях $n \geqslant 1$ изучается с точки зрения «размерности» различных связанных с ним случайных множеств, например множества его нулей или множества, заметаемого его траекториями на временно́м интервале $[0, 1]$. При этом размерность множеств понимается в смысле Минковского или Хаусдорфа; даются определения этих размерностей и излагаются их основные свойства.

Цель заключительной главы XXXIX — описать вкратце предпосылки и ряд подходов (Гейзенберг, Шрёдингер, Фейнман) к квантовой механике и дать некоторые *вероятностные* интерпретации, в том числе основанные на диффузионных уравнениях, связанных с броуновским движением.

В целом о характере материала всех 39 глав читатель может получить представление из приведенного выше оглавления.