

## Предисловие к новому изданию

Символ вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , вынесенный на обложку настоящей книги, подчеркивает, что ее «математика» носит вероятностный, статистический характер. Именно вероятностный подход позволил Л. Башелье (1900 г., [12]) сделать тот важный шаг, который явился, в сущности, началом стохастической финансовой математики и теории случайных процессов (как это отмечено в [280]). С момента публикации диссертации Л. Башелье (1900 г.) прошло много лет, за это время в финансовой математике появились новые теории, методы и подходы, стала яснее ее связь с экономикой и современным стохастическим исчислением, дающим возможность глубже проникать в динамику финансовых данных и ставить вопрос о предсказании их будущего поведения.

Именно это исчисление сделало понятным тот факт, что такое важное экономическое понятие, как арбитраж, допускает чисто мартингалное толкование, явившееся, по существу, основой всей стохастической финансовой математики.

Настоящая книга призвана дать весьма широкое представление о предмете финансовой математики, ее истории, основных этапах становления ее теорий, теории арбитража и расчетов в стохастических финансовых моделях.

В книге уделяется значительное внимание не только моделям с дискретным временем, но и моделям в непрерывном времени, включая нужные в финансовой математике теорему Гирсанова, преобразование Эшера, формулы Башелье и Блэка—Шоулса для расчетов опционов европейского типа, ...

О современном состоянии стохастической финансовой математики читатель может получить информацию из статей в ведущих журналах «Finance and Stochastics», «Journal of Finance» и др. Публикуется большое число журналов, посвященных анализу стохастических данных. К числу таких журналов можно отнести, например, «Quantitative Finance», «Journal of Portfolio Management».

Мы надеемся, что книга будет полезна и студентам, и всем тем, кто в своей деятельности связан с финансовой теорией и практикой.

Москва, 2015 г.

А. Н. Ширяев

## Предисловие

Замысел автора состоял в том, чтобы

- отобрать и изложить материал, который необходим и может оказаться полезным тем, кто имеет дело со стохастическим анализом и расчетами в моделях финансовых рынков, функционирующих в условиях неопределенности;
- привести основные понятия, концепции и результаты стохастической финансовой математики;
- дать применения к разнообразным расчетам в стохастической финансовой инженерии.

Не в последнюю очередь имелись в виду и запросы преподавания по специальности «Финансовая математика и финансовая инженерия» с акцентом на вероятностно-статистические идеи и методы стохастического исчисления при анализе *рыночного риска*.

Подзаголовок «Факты. Модели. Теория» как нельзя лучше отражает характер и стиль изложения, сложившийся у автора во многом в результате «обратной связи» со слушателями ряда курсов его лекций (Москва, Цюрих, Орхус, ...).

Так, математическая аудитория неизменно проявляла большой интерес не только к чисто математическим вопросам «Теории», но и к «Фактам» относительно реалий финансовых рынков и их функционирования. Именно это обстоятельство и побудило автора посвятить первую главу описанию ключевых объектов и структур таких рынков, определить цели и задачи финансовой теории и финансовой инженерии, а также изложить некоторые вопросы истории и становления вероятностно-статистической идеологии при анализе финансовых рынков.

С другой стороны, слушатели, знакомые, скажем, с рынком ценных бумаг и оперированием с ними, проявляли большую заинтересованность в том, чтобы ознакомиться с разными классами стохастических процессов, применяемыми или могущими быть полезными при построении моделей динамики финансовых показателей (цен, индексов, обменных курсов, ...) и при

проведении тех или иных расчетов (рисков, хеджирующих стратегий, рациональных стоимостей опционов, ...).

Этим целям служат вторая и третья главы, посвященные разнообразным стохастическим моделям как в случае дискретного, так и непрерывного времени.

Автору представляется, что материал этих глав, относящийся к теории случайных процессов, будет полезен широкому кругу читателей и не только в связи с финансовой математикой.

Хотелось бы здесь особо подчеркнуть, что в случае дискретного времени при описании эволюции стохастических последовательностей мы, как правило, отправляемся от их *разложения Дуба на предсказуемую и мартингальную составляющие*. Это объясняет, почему рассматриваемый подход часто называют «мартингальным» и почему «теория мартингалов» становится естественным и полезным математическим аппаратом в финансовой математике и инженерии.

Понятия «предсказуемости» и «мартингальности», пронизывающие все последующее изложение, в то же самое время оказываются весьма естественными и с экономической точки зрения. Так, например, такие экономические понятия, как *портфель ценных бумаг и хеджирование*, математически просто определяются именно с привлечением понятия предсказуемости. А такие понятия, как *эффективность* и *безарбитражность* финансового рынка, находят свое математическое воплощение с привлечением понятий мартингала и мартингальных мер (первая фундаментальная теорема теории расчетов финансовых активов; § 2b гл. V).

Подход к описанию стохастических последовательностей, основанный на разложении Дуба, делает вполне понятным и логичным обращение в случае *непрерывного времени* к (весьма широкому) классу *семимартингалов* (§ 5a гл. III). Будучи процессами, представимыми в виде суммы процесса ограниченной вариации («медленно меняющаяся» компонента) и локального мартингала (многие из которых, как, например, броуновское движение, являются «быстро меняющимися»), семимартингалы обладают тем замечательным свойством, что для них определен стохастический интеграл, что, в свою очередь, открывает широкие возможности применения стохастического исчисления при моделировании финансовых показателей такими процессами.

Четвертая глава («статистическая») призвана дать представление о том реальном статистическом «сырье», с которым приходится сталкиваться при эмпирическом анализе финансовых данных.

На статистическом материале, относящемся преимущественно к обменным курсам валют (финансовый рынок которых носит интернациональный характер и является одним из самых больших среди финансовых рынков, имея дневной оборот в несколько сотен миллиардов долларов), показывается, что величины «возврата» (см. формулу (3) в § 1a гл. II) имеют плотность распределения с «тяжелыми хвостами» и с сильной «вытянутостью» в центральной области. Во временном поведении этих величин наблюдаются

свойства «кластерности» и «сильной зависимости» (образно — «цены помнят прошлое»). Выявляется фрактальная структура ряда характеристик волатильности (изменчивости) величин «возврата».

Все это, разумеется, надо учитывать при построении моделей, адекватно отражающих реальную динамику финансовых показателей, что становится особенно существенным, если преследовать цель *прогноза* их будущего движения.

Собственно «Теории» и, в частности, *теории арбитража* отводятся пятая глава (дискретное время) и седьмая глава (непрерывное время).

Центральными здесь являются *первая и вторая фундаментальные теоремы теории расчетов финансовых активов*.

Первая теорема утверждает (с некоторыми оговорками), что финансовый рынок является *безарбитражным* в том и только том случае, когда существует так называемая мартингальная (риск-нейтральная) вероятностная мера, относительно которой (дисконтированные) цены образуют мартингал. Вторая теорема описывает те безарбитражные рынки, для которых выполнено свойство *полноты*, гарантирующее возможность построения портфеля ценных бумаг, капитал которого воспроизводит платежные поручения.

Обе эти теоремы действительно заслуживают того, чтобы их называть фундаментальными, поскольку они дают возможность придать экономическому понятию «безарбитражности» точный математический смысл в рамках (хорошо развитой) *теории мартингалов*.

Шестая и восьмая главы посвящены расчетам, опирающимся на первую и вторую фундаментальные теоремы. При этом традиционно много места отводится расчетам рациональных стоимостей и хеджирующих стратегий разного рода *опционов* (европейского и американского типов), являющихся теми *производными* финансовыми инструментами, для которых наиболее развита теория расчетов и на примере которых лучше всего понимать общие принципы и приемы расчетов на безарбитражных рынках.

Перед автором, естественно, стояла проблема не только отбора «репрезентативного» материала для изложения, но и выбора формы изложения.

Читатель заметит, что автор часто следует лекционному стилю, приводя пояснения типа «что-где-когда». В случае дискретного времени приводятся, по существу, все доказательства основных результатов. В случае же непрерывного времени довольно-таки часто многие результаты (теории мартингалов, стохастического исчисления, ...) приводятся лишь своими формулировками с указанием соответствующей литературы, где могут быть найдены доказательства.

Предложение о написании книги по финансовой математике для издательства World Scientific было сделано профессором Оле Е. Барндорфф-Нильсеном в начале 1995 года. Дав свое согласие, автор смог приступить к первым наброскам текста лишь в середине 1995 года, планируя вначале излагать весь материал только для случая *дискретного времени*. Однако по мере работы над текстом автор все больше убеждался в том, что без случая *непрерывного*

## Предисловие

времени представление о финансовой математике и финансовой инженерии будет далеко не полным. В результате в книге дается изложение и для дискретного, и для непрерывного времени.

Книга состоит из двух томов. Первый том («Факты. Модели») включает главы I—IV. Второй том («Теория») состоит из глав V—VIII.

На само написание основного текста автору понадобилось примерно два года. Несколько месяцев ушло на компьютерный набор текста, редактирование и подготовку оригинал-макета книги, осуществленные И. Л. Легостаевой, Т. Б. Толозовой и А. Д. Изааком на базе информационно-издательского сектора Отделения математики Российской академии наук. Автор приносит им свою искреннюю признательность прежде всего за их высококвалифицированную и самоотверженную помощь, а также за ту терпимость, которую они к нему проявляли всякий раз, когда он менял уже набранный и отредактированный текст, представляя свою очередную «последнюю» версию.

Автор благодарен своим друзьям и коллегам, российским и зарубежным, а также АФЦ (Актуарно-финансовый центр, Москва), VW-project (the Volkswagen-project, Germany), MCAA и CAF (the Mathematical Research Center and the Centre for Analytical Finance, Aarhus, Denmark), INRIA-МГУ (институт им. А. М. Ляпунова, Paris-Москва) за поддержку и гостеприимство.

Москва  
1995—1997

А. Ширяев  
Математический институт  
им. В. А. Стеклова РАН  
и  
Московский государственный  
университет им. М. В. Ломоносова