

## Введение

Эта задача на делимость...  
Как вообще можно давать на экзамене то,  
чего нет в школьной программе?  
Да это даже учитель не решит.  
И будет прав.

*Опытный и очень уважаемый коллега,  
пожелавший остаться инкогнито*

Здравствуйтесь, уважаемые читатели! На протяжении всей книги я буду стараться вести повествование в формате диалога, подключая вас к процессу, — почему бы не начать прямо сейчас?

Книга, которую вы держите в руках, — про делимость. У многих школьников и учителей эта тема ассоциируется исключительно с ЕГЭ: в экзаменах как базового, так и профильного уровней есть задача на делимость, а кроме этого в старшей школе с делимостью столкнуться особо негде. Самое время реабилитировать тему: про ЕГЭ мы, конечно, тоже поговорим, но не только про него. Во главе угла будет, собственно, делимость. Даже так: Делимость!

Два слова о структуре. Сначала мы пробежимся по теории, разберем ряд примеров и закрепим разобранное упражнениями. Крайне рекомендуется читать главы по порядку, так как в каждой следующей может быть использовано что-то из предыдущих: практически индукция с широкой базой! Кроме того, по тексту разбросано немало забавных историй, разбавляющих порой скучноватую теорию, — вы же не хотите их пропустить?

После теории вас ждет полноценный задачник по тем же темам. Почему после разбора каждой главы сразу не дать задачи? А потому, что ряд задач решается с использованием сразу нескольких идей из разных тем, и поэтому разумнее сначала пройти и закрепить всю теорию и лишь потом перейти к более содержательным задачам. Наконец, отдельная часть книги посвящена задачам из ЕГЭ и межвузовских олимпиад: надо же быть в тренде! Про ЕГЭшную задачу мы поговорим отдельно.

Число 19 простое. Задача 19 — нет. По крайней мере, именно такое мнение бытует среди учащихся, да и большинства учителей математики. Оно и понятно: задача «не входит в школьную программу». Формально, конечно, входит: все факты, которые нужны для решения данной задачи, ребята проходят в 5—6 классах. Но во-первых, это ж когда было, на дворе одиннадцатый класс! А во-вторых, все-таки тема

«Теория чисел» обычно освещается не столь глубоко, как это нужно для решения задачи 19. Так что, увы, даже факт простоты числа 19 у многих школьников вызывает некоторое недоумение, что уж говорить о задаче 19.

Кроме того, задача 19 — одна из немногих задач ЕГЭ, которую не удастся «алгоритмизировать». К задачам 13 (уравнение), 15 (неравенство) и 17 (экономика) можно подготовить почти любого старательного ученика: вот план решения, вот стандартные идеи, вот типичные задачи, вперед! С некоторой натяжкой аналогичный тезис верен и применительно к задачам 14 и 18: да, объем там побольше, но спросите школьников, решивших эти задачи на экзамене, придумали ли они какую-то свежую идею или просто решали по аналогии с уже разобранным во время подготовки, и я догадываюсь, какой ответ вас ожидает. Так что остаются лишь планиметрия и теория чисел.

С другой стороны, если посмотреть на историю последней задачи ЕГЭ по математике, то можно заметить интересные детали. Так, едва появившись, задача сразу нашла массу критиков, а понравилась она разве что немногочисленным кружковцам, которые «на халяву» получали 2—4 балла, что их, разумеется, не расстраивало. И да, они не понимали, почему все так недовольны: «несложная же задача». Увы, эти люди, видимо, не были знакомы с народной мудростью, которую лет десять назад сообщил автору замечательный математик из Петербурга Константин Петрович Кохась: «Когда говорите слово „очевидно“, не забывайте добавлять кому».

Задача менялась, и через несколько лет появились «пункты», разделившие задачу на совсем простой пункт а), пункт б) посложнее и пункт в), зачастую неподъемный не только для подавляющего большинства участников экзамена, но и для многих учителей математики. Дошло до того, что 1 балл за эту задачу было получить проще, чем за любую другую из второй части ЕГЭ, и нередко слабые школьники, помимо тестовой части, приступали только к задаче 19. В последнее время пункт а) стал немного сложнее, так что процент выполнивших его предсказуемо упал. И сейчас снова нередко слышишь, что задача написана «для избранных», в школе этому не учат и надо скорее убрать это из экзамена.

В то же время я убежден, что решать задачу 19 можно и нужно. В чем-то она даже проще, чем задачи 13 или 15. Для решения этой задачи действительно крайне редко требуются знания, выходящие за рамки программы 7 класса. Но что еще важнее, именно задача 19 — а также подготовка к ней — учит многим полезным вещам, которые нередко остаются за рамками школьной программы. И речь не о спе-

цифических фактах и теоремах теории чисел, а о вполне универсальных идеях, скажем, об умении проиллюстрировать задачу примером или о понимании структуры доказательства.

В данной книге рассмотрены основные идеи, которые могут пригодиться при решении задачи 19. При этом книга не зациклена на конкретной задаче из ЕГЭ, а может восприниматься и как пособие по теории чисел, в котором можно найти и необходимую теорию, и разнообразные задачи по данной теме: от совсем детских до задач, предлагавшихся на олимпиадах разного уровня.

Книга писалась для широкого круга читателей: она может быть интересна как учителям, которые планируют заняться «делимостью» с ребятами (повторюсь, не только в рамках подготовки к экзамену, но и просто «для общего развития»), так и школьникам, которые хотят самостоятельно улучшить свои знания по данной теме.

Задачи для книжки брались из разных источников, которые представлены в соответствующем разделе. Надеюсь, что я не попаду в библиотечный ад за безграмотно оформленный список литературы...

Наконец, о благодарностях. Прежде всего, я бесконечно рад, что учился у таких замечательных людей, как Владимир Анатольевич Гольдич, Сергей Евгеньевич Рукшин, Александра Николаевна Косовская, Дмитрий Васильевич Максимов, — именно благодаря им я знаю и люблю теорию чисел. Владимир Борисович Некрасов — человек, который меня направляет в последние лет десять, — без него бы эта книжка была совсем другой. Отдельное, пусть и слегка заочное, спасибо Андрею Валентиновичу Жвалевскому, чей стиль является для автора близким к эталонному и чьи советы по написанию книг представляются особенно ценными. Огромное спасибо моему главному критику, не считая меня самого, — учителю математики и по совместительству моему папе, Игорю Павловичу Вольфсону, в ансамбле с которым было придумано и обсуждено столько, что впору приглашать его к себе на обложку. И конечно, ничего бы не получилось без моей жены, которой всегда удается придумать правильный стимул.