Краткий обзор научной деятельности М. И. Вишика

Анатолий Бабин, Александр Демидов, Марк Маламуд,
Александр Комеч, Андрей Фурсиков, Владимир Чепыжов,
Александр Шнирельман

Работы Марка Вишика и его школы составили целую эпоху в теории уравнений с частными производными и получили широкое признание и в нашей стране, и во всём мире. Марк Иосифович является автором около 250 статей и трёх монографий. Он подготовил 57 кандидатов наук, более 30 из которых защитили докторские диссертации. В 1951 году Московское математическое общество присудило ему премию за статью «Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений». М. И. Вишик был приглашённым докладчиком на Международных математических конгрессах в 1966 году в Москве и в 1974 году в Ванкувере и участвовал в работе программных комитетов конгрессов 1970 и 1978 годов. В 1974 году М. И. Вишик был награждён почётной медалью Коллеж де Франс. В 1990 году он был избран почётным членом Американской академии искусств и наук, а в 1994 году — членом Национальной академии наук Италии (Академии сорокá). В 1992 году Российская академия наук присудила Марку Иосифовичу премию имени И. Г. Петровского за цикл работ «Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения». В 1994 году он был избран соросовским профессором. В 2001 году Свободный университет Берлина присвоил ему степень почётного доктора естественных наук (Doktor der Naturwissenschaften ehrenhalber). Марк Вишик был членом редколлегий международных математических журналов «Asymptotic Analysis» и «Rapporti Alpi-Appennino Accademia Nazionale delle Scieze detta dei XL».

Научные труды Марка Иосифовича принадлежат области дифференциальных уравнений в частных производных, функционального анализа и математической физики. Он был одним из основателей современной статистической гидромеханики и теории глобальных аттракторов нелинейных волновых процессов. В целом можно сказать, что его труды превратили теорию уравнений с частными производными в один из разделов современного функционального анализа. Важную роль в этом сыграла, конечно, его связь со школой Банаха. Нам представляется, что труды Марка Иосифовича являются вершиной математических достижений этой школы и максимальной реализацией её потенциала.

1. Краевые задачи и самосопряжённые расширения эллиптических операторов (подробнее см. с. 158). В 1949—1952 годах Марк Иосифович описал все самосопряжённые расширения сильно эллиптических операторов второго порядка, что дало ему возможность найти все корректные краевые задачи для таких операторов.

Попытки применить теорию расширений к исследованию граничных задач для оператора Лапласа предпринимались рядом американских математиков сразу после появления работы Дж. Кэлкина (1939 год)[1]. Однако это удалось только М. И. Вишику в работе [14][2], опередившей своё время и ставшей особенно цитируемой в последние 25—30 лет.

Одно из основных достижений работы [14] — регуляризация формулы Грина для эллиптического дифференциального оператора второго порядка в ограниченной области, позволившая распространить формулу на всю область максимального оператора. Необходимость регуляризации обусловлена тем, что следы функций из области определения максимального оператора не принадлежат соболевским пространствам с неотрицательными показателями. При этом отображение взятия пары следов (Дирихле и Неймана) оказалось сюръективным.

В работе даётся описание *разрешимых* (т. е. ограниченно обратимых) и *вполне разрешимых* (т. е. имеющих компактный обратный) сужений максимального оператора в терминах регуляризованных граничных условий.

Построена теория дуальных пар эллиптических несимметрических операторов с ограниченными обратными. Для этого вместо формул Неймана получены другие формулы разложения областей определения максимальных операторов (ныне — формулы Вишика).

[1] *Calkin J. W.* Abstract symmetric boundary conditions // Transactions of the American Mathematical Society. 1939. V. 45. P. 369—442. — *Прим. ред.*

[2] Ссылки по порядковым номерам относятся к списку публикаций М. И. Вишика в конце сборника. — *Прим. ред.*

На современном языке это означает, что М. И. Вишик впервые построил граничную тройку для эллиптического оператора дивергентного вида. Конструкция Вишика тем более удивительна, что теория следов для эллиптических операторов (и соболевских пространств) была построена Лионсом и Мадженесом лишь 7—10 лет спустя. Не располагая явным описанием следов, Вишик доказывает (на современном языке) следующие вложения:

$$L^p(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega) \quad \text{при} \ \ p \geqslant \frac{2(n-1)}{n},$$
$$H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^q(\partial\Omega) \qquad \text{при} \ q < \frac{2(n-1)}{n-2},$$

где $n = \dim\Omega \geqslant 2$.

2. Метод Вишика—Люстерника (подробнее см. с. 165). В 1957—1961 годах Марк Иосифович совместно с Л. А. Люстерником построил теорию задач для уравнений с малым параметром при старших производных, ввёл понятия *регулярного вырождения* и *регулярного пограничного слоя*. Общее число ссылок всего лишь на три цитируемые здесь статьи Вишика—Люстерника [35, 49, 45] об асимптотиках и на знаменитую работу Вишика [10] о сильно эллиптических системах (позволившую, в частности, обосновать асимптотики) — около трёхсот. Большинство этих публикаций в значительной степени основаны на базовых, гениально простых идеях метода Вишика—Люстерника, которые позволяют решать большой круг сложных проблем и поэтому получили такое обширное применение.

Впервые в задачах сингулярного возмущения малым параметром в уравнениях с частными производными был предложен ошеломляющий своей простотой метод построения асимптотики, равномерной вплоть до границы области, где решение исходной задачи существенно изменяется. «Изюминка» метода заключается в том, что к предельному решению исходной задачи прибавлялась поправка в виде решения модельной задачи на полупрямой для найденного в методе Вишика—Люстерника обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами относительно так называемой «быстрой» переменной. Именно в направлении этой быстрой переменной решение исходной задачи существенно изменяется.

3. Квазилинейные уравнения (подробнее см. с. 169). В 1961—1963 годах Марк Иосифович исследовал эллиптические и параболические квазилинейные дифференциальные уравнения высокого порядка с монотонной главной частью и доказал разрешимость основных краевых задач для этих уравнений. Главной особенностью этих работ является оригинальное сочетание методов функционального анализа и топологии: теории степени отображения, гомотопии и теории Лерэ—Шаудера. Удивительная эффективность подхода, разработанного Марком Иосифовичем, сказалась в том, что ему удалось доказать как существование решений, так и их единственность.

4. Эллиптические и параболические краевые задачи. В 1964 году Марк Иосифович вместе с М. С. Аграновичем в работах [67, 68] ввёл новый класс эллиптических краевых задач с параметром и параболических краевых задач, что является далеко идущим обобщением классификации Петровского. Выдающимся достижением этой теории является доказательство однозначной разрешимости при больших значениях параметра.

В 1964—1969 годах Марк Иосифович вместе с Г. И. Эскиным создал новую теорию эллиптических краевых задач для псевдодифференциальных операторов, положив в основу метод Винера—Хопфа, точнее, его развитие в работах И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна. Важнейшую роль при этом сыграли также пространства Соболева и теоремы вложения.

Замечательная черта этой теории состоит в том, что в ней дано явное описание алгебры, содержащей эллиптические и параболические краевые задачи, и найдено пространство максимальных идеалов этой алгебры по модулю компактных операторов. Это оказалось чрезвычайно удобным для применения K-теории к вычислению индекса краевых задач методом Атьи—Ботта—Зингера. Замечательным итогом теории Вишика—Эскина является критерий существования корректной фредгольмовой краевой задачи для заданного эллиптического оператора. Этот критерий формулируется в терминах K-функтора.

Особое значение имеет найденное в этих работах условие гладкости псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем: такой оператор сохраняет пространство функций, гладких вплоть до границы. В частности, обратный символ к любому эллиптическому многочлену удовлетворяет этому условию. Это свойство является далеко идущим современным обобщением классических свойств потенциалов простого и двойного слоя. Полученные результаты являются новаторскими даже для краевых задач с дифференциальными операторами. Этот цикл работ по существу завершает построение теории линейных эллиптических краевых задач.

5. Статистическая гидромеханика. С 1973 года Марк Иосифович совместно с А. В. Фурсиковым начал заниматься статистической гидромеханикой. Они впервые построили строгую теорию статистических решений нелинейных эволюционных уравнений в частных производных. Ими была создана теория однородных, а также пространственно-временных статистических решений нелинейных параболических уравнений и системы Навье—Стокса со случайными начальными данными. Случай статистических решений системы Навье—Стокса с флуктуациями типа белого шума был изучен Марком Иосифовичем совместно с А. И. Комечем.

Эти задачи возникли в связи с проблемой обоснования законов Колмогорова развитой турбулентности и вызвали интерес А. Н. Колмогорова. В январе 1978 года в докладе на Московском математическом обществе он поставил ряд проблем, касающихся свойств турбулентных потоков. Ответы на некоторые из них были получены в работах Марка Иосифовича и его сотрудников. В частности, для стационарных статистических решений двумерной системы Навье—Стокса с белым шумом было доказано, что скорость диссипации энергии не зависит от вязкости, в соответствии с гипотезой Колмогорова. Работы указанного цикла составили содержание монографии [186], которая посвящена памяти А. Н. Колмогорова.

6. Аттракторы автономных эволюционных уравнений. В 1980-х годах Марк Иосифович совместно с А. В. Бабиным построил *глобальные аттракторы* автономных уравнений с частными производными, возникающих в математической физике. Ими получена оптимальная оценка хаусдорфовой размерности аттракторов двумерной системы Навье—Стокса при больших числах Рейнольдса.

Работы М. И. Вишика и А. В. Бабина 1982—1990 годов оказали очень большое влияние на развитие теории аттракторов уравнений с частными производными. В их работах 1982 года введено понятие максимального (глобального) аттрактора и показано, что это понятие описывает динамические свойства различных классов уравнений математической физики, в том числе параболических, гиперболических с трением и системы Навье—Стокса. Понятие глобального аттрактора оказалось очень полезным, а развитая техника оказалась применимой к широким классам задач, что привело к заметной активизации деятельности по изучению динамических свойств уравнений с частными производными, стали появляться десятки работ в год по этой тематике. Книга [191] и её перевод на английский язык постоянно цитируются в работах по теории аттракторов уравнений математической физики; количество ссылок на них превышает 800. В работах Бабина—Вишика впервые получены оценки сверху размерности аттракторов в терминах физических параметров задач, получены оценки размерности снизу, доказано существование глобального аттрактора гиперболических уравнений, доказано существование глобальных аттракторов и получены оценки размерности для уравнений в неограниченных областях.

7. Аттракторы нелинейных неавтономных эволюционных уравнений математической физики (подробнее см. с. 172). В 1990-х годах Марк Иосифович и В. В. Чепыжов построили общую теорию равномерных глобальных аттракторов неавтономных уравнений с частными производными. В основу этой теории были положены идеи и методы теории глобальных аттракторов автономных уравнений, а также опубликованных немного ранее работ французского математика Алена Аро (Alain Haraux). В этих работах было введено понятие равномерного глобального аттрактора неавтономного диссипативного уравнения, содержащего зависящие от времени коэффициенты и члены, которые являются периодическими, квазипериодическими или почти периодическими функциями со значениями в некоторых банаховых пространствах. Аро доказал ряд теорем о существовании и структуре равномерных аттракторов конкретных нелинейных параболических уравнений с почти периодическими членами. В работах М. И. Вишика и В. В. Чепыжова был предложен метод сведения задачи построения равномерного аттрактора неавтономного уравнения к исследованию глобального аттрактора автономной динамической системы, действующей в расширенном фазовом пространстве, основанный на конструкции косого произведения. При этом ими был введён новый класс трансляционно-компактных функций, существенно расширяющий класс почти периодических по времени функций, для которых стало возможно построение равномерного аттрактора соответствующей неавтономной динамической системы. При исследовании равномерных аттракторов общих неавтономных диссипативных уравнений с частными производными ими было обнаружено, что в условиях общего положения равномерный аттрактор, будучи компактным множеством, имеет бесконечную размерность, в чём состояло принципиальное отличие от свойств аттрактора соответствующего автономного уравнения, который в случае общего положения является конечномерным. М. И. Вишик и В. В. Чепыжов предложили исследовать колмогровскую эпсилон-энтропию для таких аттракторов. Они доказали ряд важных теорем об оценках сверху эпсилон-энтропии равномерных аттракторов, которые обобщали известные оценки для аттракторов соответствующих автономных уравнений. С помощью этих результатов были получены оптимальные оценки эпсилон-энтропии для ряда важных неавтономных уравнений математической физики, например для 2D-системы Навье—Стокса с зависящей от времени внешней силой, для неавтономных систем реакции-диффузии, для комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау, для диссипативных неавтономных волновых уравнений и для других уравнений и систем. Наиболее полно эти результаты изложены в книге [256].

8. Траекторные аттракторы уравнений математической физики (подробнее см. с. 172). В 2000-х годах М. И. Вишик совместно с В. В. Чепыжовым разработал метод траекторных аттракторов, позволивший строить динамические системы и аттракторы для уравнений математической физики, для которых не доказана или не имеет места теорема единственности решения соответствующей задачи Коши, например для неоднородной 3D-системы Навье—Стокса в ограниченной области. Для таких уравнений обычно удаётся построить глобальные слабые решения в соответствующих фазовых пространствах, например с помощью метода галёркинских приближений, однако доказать единственность решений этих уравнений удаётся только для сильных решений, которые, как правило, можно построить лишь локально, на малом интервале времени. В этом случае для исследования асимптотического поведения решений нельзя напрямую использовать классическую схему построения динамической системы (например, полугруппы в автономном случае) в фазовом пространстве H начальных данных задачи Коши, чтобы затем исследовать её глобальный аттрактор, так как мешает неединственность решений. Однако для таких уравнений можно построить траекторную динамическую систему, действующую в пространстве траекторий этих уравнений, т. е. функций, определённых на полуоси времени со значениями в пространстве H. После этого можно строить и исследовать глобальный аттрактор полугруппы трансляций по времени, действующей в пространстве траекторий (т. е. слабых решений) изучаемого уравнения в слабой (а иногда и в сильной!) локальной топологии. Этот универсальный метод применялся для исследования различных типов диссипативных уравнений математической физики, как автономных, так и неавтономных: общих систем реакции-диффузии, 3D-систем Навье—Стокса, диссипативных волновых уравнений, нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрических областях (последним уравнениям посвящён цикл совместных работ М. И. Вишика и С. В. Зелика [234, 245, 246]) и других уравнений и систем. С помощью метода траекторных аттракторов также были исследованы различные задачи приближения и возмущения траекторных аттракторов уравнений, возникающих в сложных моделях математической физики, а также задачи усреднения аттракторов уравнений с частыми производными, которые содержат быстро осциллирующие члены по времени или по пространственным переменным. Эти и другие проблемы изложены в обзоре [287], а также в книге [256].