Что такое математика, или Метаматематика для нематематиков

О той пользе, которую математика приносит обществу, знают все. Любое предисловие к любой книге по математике начинается именно с этой, в общем-то совершенно справедливой, мысли. Говорится о том, как математика помогает рассчитать траекторию ракеты, построить мост, оценить размер страховых платежей. На крайний случай, говорят о том, как математика позволяет познавать законы природы.

Всё это совершенная правда. Но гораздо реже и меньше говорят о той пользе, которую математика приносит человеку — и тому, кто собирается посвятить ей жизнь, и тому, кто только немного постоит на границе великой страны, называемой Математика.

* * *

Широкая публика обычно представляет себе учёного-математика либо в виде скучного рассеянного сухаря, который вечно, выходя из дома, забывает то калоши, то зонтик, — либо как некоего средневекового мага (смотри американские фильмы типа «Изгоняющий дьявола»), который вещает, орудуя таинственными знаками, недоступными простым смертным.

(Замечу в скобках, что злоупотребление «таинственными знаками» — интегралами, алефами, кванторами и так далее — нехарактерно для серьёзных математиков. Они куда выше ценят работу, в которой удалось обойтись наиболее простым математическим аппаратом — другое дело, что это удаётся сравнительно редко.)

И потому я хотел бы начать с анекдота об А. Н. Колмогорове, услышанного мною около 30 лет назад. Слово «анекдот» я употребляю здесь не в современном, а в классическом смысле: анекдот есть случай, иногда смешной, иногда серьёзный, но непременно взятый из реальной жизни.

Итак, мой знакомый М. С. рассказал мне, как ему довелось присутствовать на каком-то военном совещании.

«Выступил полковник; трижды исписал всю доску формулами. Потом вышел Андрей Николаевич [Колмогоров]; он не написал ничего, но коротко и внятно объяснил собравшимся, о чём, собственно, говорил предыдущий докладчик.

И выходя с заседания, — закончил М. С., — я услышал такой обрывок разговора двух генералов:

— Этот штатский, видно, в математике не шибко силён, но в нашем деле здорово разбирается».

Можно было бы добродушно посмеяться над генералами: как же они ошиблись, приняв одного из величайших математиков XX в. за «штатского, который не шибко силён в математике». Но в действительности генералы не виноваты. Их слова — это довольно-таки типичная реакция непрофессионала на настоящую математику.

* * *

Что же собой представляет настоящая математика? Позвольте мне сначала сказать, чем она НЕ является.

Математика, в сущности, не наука. А если наука — то все прочие науки — не науки. Слишком уж велика разница. Математика ближе к музыке, чем к физике. И пропасть между математикой и физикой глубже, чем между физикой и социологией. Математика — это образ мысли, это человеческий характер. И математик — это не просто человек, окончивший мехмат. Это прежде всего определённый склад ума и, не побоюсь сказать, определённое состояние души.

А те, кто применяют математику, чаще всего просто подставляют полученные из опыта параметры в известные формулы. Речь идёт, таким образом, всего лишь о том, что некоторые люди (например, социологи или экономисты) выучили некоторое количество алгоритмов и умеют эти алгоритмы применять. Это не совсем бесполезно. Но математика тут почти что и ни при чём.

Для иллюстрации приведу такой пример.

• Психолог Д. Канеман в своей книге «Думай медленно… Решай быстро» утверждает, что люди очень часто принимают нерациональные решения. С этим спорить, пожалуй, невозможно. Однако все ли приводимые им примеры убедительны?

Вот один нелогичный, по мнению психолога, поступок. Участникам эксперимента предлагают на выбор: либо получить 46 долларов, либо бросить монетку и в случае успеха получить 100 долларов. Что лучше? Эксперимент показывает, что «лучше синица в руке, чем журавль в небе: большинство предпочитает получить гарантированные 46 долларов, чем 50%-й шанс на получение 100 долларов».

Психолог думает, что такое поведение нелогично или, по меньшей мере, нерационально. Согласимся ли мы с этим?

На первый взгляд, надо согласиться: ведь если вы идёте на риск, то получите (в математическом ожидании) не 46, а целых 50 долларов. Так и рассуждал психолог.

Но математик рассудит по-другому.

Ведь «математического ожидания» вы отнюдь не получите; вместо этого вы получите то ли ноль, то ли 100 долларов. Получить ноль явно обидно. Ну, а получить сто? Это-то хорошо? Да, конечно; но надо ещё подумать: действительно ли вы, получив сто долларов, испытаете вдвое больше удовольствия, чем от получения сорока шести? Это далеко не очевидно...

Психолог исходит здесь из не сформулированного (и заведомо неверного, причём именно с точки зрения психологии) догмата о том, что получаемое человеком удовольствие находится в прямой (подчёркиваю: прямой) пропорциональной зависимости от полученной суммы. И, конечно, не учитывает обиды, которую испытает неудачник, который мог получить деньги, а вместо этого получил шиш.

Он правильно применил формулу; но он забыл, что результат надо ещё правильно истолковать.

* * *

Многие думают также, что математики — это люди, которые постоянно что-то вычисляют. Помнится, мой отец был сильно удивлён, обнаружив, что я умею считать интегралы гораздо хуже, чем он. И он тоже, хотя был достаточно сведущ в математике (он был физиком-теоретиком высокого класса), он тоже был уверен, что математик должен главным образом уметь вычислять. Конечно, такое умение непременно входит, как один из важнейших компонентов, в образование математика и в его «минимальный запас», но всё же суть работы математика отнюдь не в этом.

Я бы даже сказал, что дело обстоит как раз наоборот[1]. Математик часто вынужден вычислять (об этом ещё будет говорится ниже). Но он всегда стремится вычислять как можно меньше.

[1] В 1980-е годы мой друг прислал мне из Израиля калькулятор — по тогдашним понятиям, передовая техника. И пользовался ли я им?

Да, один раз. Он понадобился мне, когда я ездил со студентами на картошку, и мне нужно было рассчитать, кто из них сколько заработал. Конечно, я мог бы это сделать и с карандашиком, но складывать десяток чисел с калькулятором проще и надёжнее, чем в столбик.

И это, повторяю, был единственный случай, когда я воспользовался калькулятором для дела, а не так просто, для развлечения. В своей математической деятельности мне им так и не пришлось воспользоваться: он не был мне нужен.

Тут весьма уместно припомнить характерную ошибку, сделанную при переводе «Очерков по истории математики» (одного из томов фундаментального труда Н. Бурбаки).

Последняя (и следовательно, особенно важная) фраза книги в переводе заканчивается словами:

«...которые, подобно всем великим математикам, стремились заменить *идеи — вычислениями*».

Ошибка переводчика (или, что вероятнее, редакторов и корректоров) состоит в том, что два ключевых слова поменялись местами. В оригинале говорилось: «...заменить *вычисления — идеями*».

Ошибка не случайная, ох, не случайная! Она, как и обмолвка генералов, показывает, какая пропасть лежит между математикой — и досужими представлениями о ней.

Математика и Буратино

Алексей Толстой не любил математику. Её не любит ни Буратино (о глубоком философском смысле диалога Буратино с Мальвиной я поговорю чуть ниже), ни герой автобиографической повести «Детство Никиты», который с тоской представляет себе того купца, который купил (или продал) столько-то аршин синего и чёрного сукна; или те поезда, которые вышли из пунктов A и B, чтобы встретиться на расстоянии $\frac{3}{4}$ от A... Да. Мнение о том, что математика — очень скучная наука — не то чтобы доминирующее, но достаточно распространённое. Сплошные бассейны, в которые вода через одну трубу вливается, а в то же время (непонятно зачем) выливается через другую...

Я мог бы возразить, что на математических олимпиадах очень часто даются задачи с весьма занятными формулировками: «Короли ездили друг к другу пировать, а вечером слуги развозили их по домам...», «Мудрый таракан решил отыскать Истину...» Но вначале позвольте мне защитить именно «математическую скуку»: в ней заложен глубокий научный смысл.

Если нам предлагается решить скучную задачу о том, как купец продал 138 аршин синего и чёрного сукна за 477 рублей, причём синее стоило 5 рублей за аршин, а чёрное — 3, нам не требуется знать, не было ли это сукно, случайно, гнилым. Неважно и то, у кого купец его перед этим купил и какую прибыль получил (это, впрочем, могло бы стать темой другой задачи — но именно ДРУГОЙ).

Поэтому перед тем, как поговорить о задачах с увлекательными (или, по крайней мере, с занятными) формулировками, признаем, что хулители в немалой степени правы. Большинство математических задач по формулировке скучны; но отчего?

Вспомним, как «девочка с голубыми волосами» пытается учить Буратино математике. Результат, что называется, «значительно ниже среднего»:

«— У вас в кармане два яблока...

Буратино полез в карман.

— Врёте, ни одного.

— Я говорю, — терпеливо продолжала девочка, — предположим, у вас в кармане два яблока. Некто взял у вас одно яблоко. Сколько у вас осталось?

— Два.

— Подумайте хорошенько.

Буратино сморщился — так он здорово подумал.

— Два.

— Почему же?

— Я же не отдам Некту яблока, хоть он дерись!

— У вас нет никаких способностей к математике, — огорчённо сказала девочка...»

(*А. Толстой. «Золотой ключик, или приключения Буратино»*)

Мальвина права: своим ответом Буратино продемонстрировал свою неспособность отвлечься от конкретной ситуации. Математика всегда основана на «предположим это», и обсуждать вопрос «а почему бы не предположить другое», не принято[1].

В качестве иллюстрации к моему тезису приведу очередной анекдот.

• Корреспондент спрашивает директора сумасшедшего дома, как врачи проверяют, действительно ли пациент излечился. Директор отвечает:

— Мы напускаем полную ванну воды, кладём рядом чайную ложечку, рядом ставим кружку и предлагаем освободить ванну от воды.

Корреспондент. Ну, понятно: всякий нормальный человек возьмёт кружку.

Директор. Нет. Нормальный человек вынет пробку.

---

[1] Правда, знаменитый английский математик Дж. Литлвуд приводил такой пример:

«**Учитель.** Предположим, что x есть число овец. — **Ученик.** Но, господин учитель, предположим, что x не есть число овец. — Я спросил у Витгенштейна, имеет ли эта шутка глубокий философский смысл, и он ответил, что имеет». («Математическая смесь»).

Но, во всяком случае, математического смысла шутка, вроде бы, не имеет.

Этот анекдот неплохо иллюстрирует суть математического подхода к проблеме. Дело в том, что математик-то как раз поступит, вероятнее всего, как предлагал корреспондент: возьмёт кружку. Ведь математик привык решать задачи, в которых круг допустимых средств жёстко ограничен (и это важно!). А в задаче не сказано, разрешается ли вынимать пробку. Значит, наверно, нельзя.

В математике всегда говорится: «Дано то-то и то-то. Какие из этого можно сделать выводы?»

Вообще говоря, из этого можно сделать множество разнообразных выводов (так и проступает Буратино, проявляя тем свою отвагу, но уж никак не математический талант). И если мы хотим получить определённый вывод, нам необходимо прежде всего отбросить все посторонние соображения. Данный случай показывает это достаточно отчётливо.

В реальной ситуации не мешало бы знать и то, большие ли яблоки лежат в кармане или маленькие; и кто такой этот Некто, и каким путём он взял яблоко — попросил, потребовал или просто украл. В последнем случае надо не считать оставшиеся яблоки, а надавать ему по шее, что и предлагает сделать персонаж другой детской повести.

«— Слушай, — говорю, — Костя, мальчик и девочка собрали вместе 120 орехов, мальчик взял вдвое больше, чем девочка. Что делать, по-твоему?

— Надавать, — говорит, — ему по шее, чтоб не обижал девочек!

— Да я не про то...»

Это ключевая фраза для понимания математики как науки; она всегда «не про то». Но послушаем беседу мальчиков дальше.

«— Да я не про то спрашиваю. Как им разделить, чтобы у него было вдвое?

— Да что ты ко мне пристал? Пусть делят, как сами хотят. Пусть поровну делят.

— Да нельзя поровну. Это задача такая.

— Какая ещё задача?

— Ну, задача по арифметике.

— Тьфу! — говорит Шишкин. — У меня морская свинка подохла, я её только позавчера купил, а он тут с задачами лезет!»

(*Н. Носов. «Витя Малеев в школе и дома»*)

Этот разговор, так же как и разговор Буратино с Мальвиной, имеет глубокий философский смысл. Советы Кости Шишкина («надавать по шее»; «пусть поровну делят») вполне разумны с общечеловеческой точки зрения, но для задачи никак не подходят. И, соответственно, позиция Вити Малеева («как им разделить, чтобы у него было вдвое?») никак не сообразуется с жизненной мудростью. В самом деле, зачем им делить так, чтобы было вдвое? Витя и Костя говорят на разных языках.

После того, как сказано «дано то-то и то-то» — то, что дано, уже не обсуждается. Эти условия можно и должно обсуждать либо ДО, либо ПОСЛЕ того, как задача решена. Но не в процессе решения. Первое, чему необходимо научиться, занимаясь математикой — искусству полностью забыть о нематематическом содержании задачи, оставить от жизненной ситуации лишь голый скелет формальных данных. Неспециалист скажет: видите, какая математика скверная, как она оторвана от жизни... Отнюдь! Просто это лишь половина дела, и притом вторая половина; для настоящих занятий математикой необходимо предварительно уметь в обычной жизненной ситуации понять: можно ли здесь вообще применить математику?

Очень часто это возможно — поскольку математический аппарат очень разнообразен, могуч, и «школьная математика» даёт представление о реальных возможностях математики не большее, чем капля воды — об Атлантическом океане. И к очень многим ситуациям можно тем или иным боком присобачить математическую теорию (или создать новую математическую теорию, специально для этой ситуации), затем выделить чистую математическую задачу — и уж потом переходить ко второй части: решение этой задачи. Как заметил У. Сойер, математику надо всё объяснять, «как ребёнку или Сократу» («Прелюдия к математике»). Но научить этому — как выделить математическую сторону в ситуации, где математикой вроде бы и не пахнет, — много трудней, чем решить задачу про бассейн с двумя трубами. И школа, вполне естественно и разумно, начинает с того, что легче.

Школьнику же остаётся задача попроще: вышелушить математическое ядро задачи там, где оно уже почти видно.

Но и здесь это не совсем тривиально. И чем скучнее условие задачи — тем легче это сделать. Унылые, однообразные условия задач даются именно для того, чтобы это было легче.

А теперь — как обстоит дело на олимпиадах? Математическая олимпиада — совсем другой случай. Туда приходят люди, для которых вышелушить математическое содержание — проще простого, как бы замысловато задача ни была сформулирована. И для них необходимость понять чисто математическое содержание задачи, исключив из неё мудрого таракана и королей, — не в тягость, а в радость. Это некий дополнительный аттракцион.

Это примерно так же, как в анекдотах: в них обычно что-то не договаривается. Дело не в том, что догадаться о недоговорённом трудно — наоборот, это очень легко. И рассказывающий и слушающий улыбаются друг другу улыбкой авгуров, «посвящённых» в недоговорённое.

* * *

Но как же на самом деле работают математики?

Иной раз представляют дело так: для математики, дескать, нужно, чтоб всё было просто: «тут белые, там чёрные, по эту сторону свободные, по ту — рабы», а жизнь, мол, сложнее.

Так ли это? Отчасти.

Действительно, математики хотят иметь теории попроще и ценят такие теории. Однако работает математик всё-таки совершенно иначе. Поскольку приходится, хочешь не хочешь, опираться на факты. Да, вначале он обычно строит какую-нибудь совсем простую рабочую гипотезу; но тут же выясняется, что факты ей противоречат. Он начинает её менять. Даже пиджак шьётся не с одной примерки — а тут всё много сложнее. Переделываешь раз, другой, третий. На десятый раз начинаешь примерно понимать, какая именно теория имеет шанс оказаться верной — причём обычно нечто совершенно непохожее на то, что собирался сделать: думал, что шьёшь штаны, а вышла штормовка.

И всё-таки при этом теория должна быть простой. Под очень сложную теорию можно подогнать всё, что угодно (появился новый факт — вводишь в основное уравнение ещё один член); но слишком сложная теория никому не нужна. Вот и вертись, как знаешь.

Можно ещё это изобразить таким образом: допустим, есть ряд экспериментальных точек, и надо придумать кривую, на которую они все, хотя бы приблизительно, ложатся.

Вообще-то есть совсем простая теорема, которая гласит: для любого набора точек существует многочлен, на графике которого все они лежат. Ну так что: берём этот многочлен, и вперёд? Как бы не так!

Берём сначала две точки и бодро проводим через них прямую (иначе говоря, строим график многочлена 1 степени). Но третья точка, вот досада, на график не попадает. Не беда: вместо прямой возьмём параболу (вместо уравнения первой степени — уравнение второй) и проведём её через 3 точки.

Но для четвёртой придётся брать уравнение третьей степени, потом четвёртой, и так далее. Для 40 точек придётся взять уравнение 39-й степени. Однако мало того, что его долго искать, главное — даже уравнение 9-й степени, не говоря уж о 39-й, никому не нужно.

Начинаем химичить. Будем считать, что измерения проведены неточно, и теория тоже не совсем точная — значит, пусть искомая кривая пройдёт не через наши точки, а поблизости от них. Вот эти две точки, которые не лезут ни в какие ворота — долой; условимся, что они из другой науки. После этого попробуем подобрать что-то приемлемое... А потом понимаешь, что точки довольно хорошо лягут на кривую, — но надо брать не многочлен, а сумму трёх синусоид. Впрочем, две точки всё-таки придётся выбросить... Только не те, которые я выбрасывал раньше, а две другие.

Вот примерно так и работаем. А вы говорите «простая теория»...

Зачем нужно уметь считать?

Г-жа Простакова (*Правдину*). Как, батюшка, назвал ты науку-то?

Правдин. География.

Г-жа Простакова (*Митрофану*). Слышишь, еоргафия.

Митрофан. Да что такое! Господи боже мой! Пристали с ножом к горлу.

Г-жа Простакова (*Правдину*). И ведомо, батюшка. Да скажи ему, сделай милость, какая это наука-то, он её и расскажет.

Правдин. Описание земли.

Г-жа Простакова (*Стародуму*). А к чему бы это служило на первый случай?

Стародум. На первый случай сгодилось бы и к тому, что ежели б случилось ехать, так знаешь, куда едешь.

Г-жа Простакова. Ах, мой батюшка! Да извозчики-то на что ж? Это их дело. Это-таки и наука-то не дворянская. Дворянин только скажи: повези меня туда, свезут, куда изволишь. Мне поверь, батюшка, что, конечно, то вздор, чего не знает Митрофанушка.

Д. Фонвизин. «Недоросль»

Выше я сказал о том, что математики стараются считать поменьше. Теперь я хочу выдвинуть дополнительный тезис: всем нематематикам (не только физикам) необходимо уметь считать. Или, говоря точнее, — уметь работать с цифрами.

Ведь очень многие склонны думать, что такое умение требуется только математикам (ну, может быть, физикам, или ещё в каких-то точных науках). Во всех прочих случаях, если нужны цифры — то «извозчик довезёт», пусть кто-нибудь сосчитает за нас.

А результат получается печальный: они приводят цифры, но не понимают, что именно из этих цифр можно извлечь. Притом — подчеркну — речь отнюдь не о том, что математики обладают какими-то особенно хитрыми приёмами, позволяющими извлечь из имеющихся цифр нечто, недоступное простым смертным. Да, такие приёмы действительно существуют, математики ими владеют и изредка применяют. Но, как правило, речь идёт о совершенно элементарном умении не просто смотреть на цифры, а сопоставлять их. Здесь не требуется знание специальных разделов математики. А требуется некое владение духом математики — т. е. тем, что необходимо каждому человеку.

Приведу несколько примеров.

• Американская исследовательница Энн Эпплбаум в своей книге «ГУЛАГ» приводит данные о числе его узников.

Данные, надо сказать, достаточно удивительные.

Во-первых, эти цифры заметно меньше тех, которые мы привыкли считать оценочными. Согласно этим данным, в начале 1930-х годов общее число узников ГУЛАГа составляло около 300 тысяч, и дальше росло медленно, но верно. (Кстати сказать, в 1937 г. не было какого-то резкого скачка; цифра выросла, да, но не так уж заметно.) Максимум был достигнут в 1953 г. — несколько больше 2,5 миллионов. Кстати, это примерно равняется числу заключённых в тюрьмах США в наши дни (правда, надо сделать поправку: население США примерно вдвое больше, следовательно, процент заключённых в нынешних США примерно вдвое меньше).

Но более странно другое. Суммируя число заключённых по годам (этого мисс Эпплбаум не сосчитала), мы получаем приблизительно 36 миллионов. Между тем она пишет, что общее число людей составляет примерно 18 миллионов.

Расхождение? Да. Но совсем не в ту сторону, как кажется на первый взгляд. Первая цифра и должна быть заметно больше: ведь человек, просидевший, скажем, 8 лет, в первом случае учитывается 8 раз.

А вышло, что каждый заключённый ГУЛАГа учитывался в среднем только два раза.

Отсюда математически неизбежный вывод: либо цифры фальшивые, либо средний срок заключения составлял около 2 лет.

Предположим, что цифры не фальшивые (это предположение косвенно подтверждается тем фактом, что мисс Эпплбаум, во всяком случае, НЕ стремилась оправдывать советский режим). Тогда — как их объяснить?

Может быть, высокой смертностью? Нет. Конечно, высокая смертность несколько корректирует эти цифры, но «списать» это противоречие на её счёт, как легко сосчитать, не удаётся. (Для того, чтобы объяснить такую ситуацию только высокой смертностью, нужно было бы, чтобы по крайней мере 80 % заключённых умирало в течение первого года, а реальная цифра заведомо меньше в несколько раз — или даже в десятки раз.)

Между тем буквально все авторы пишут, что все сроки составляли 8—10 лет и более; о ком ни прочтёшь — узнаешь, что он провёл в лагерях 10 лет и более. Даже делая поправку на «добросовестность» сегодняшних журналистов, трудно сделать так, чтобы данные сходились.

По моей грубой прикидке, высокая смертность в лагерях может «сблизить» две приведённые цифры — 10 лет (обычные сроки) и 2 года (цифра, выведенная выше) процентов на 20, может быть — 30. От силы — 50, но это уж с колоссальными натяжками. Так или иначе, требуется ещё и другое, дополнительное объяснение.

Может быть, оно состоит в том, что «астрономические» сроки относятся к известным людям (старым большевикам или интеллигенции и т. п.), тогда как простых людей и воров выпускали быстро.

Я говорю «возможно»; никак не настаиваю на такой версии. Для целей настоящей статьи важно другое: никого эти расхождения в цифрах не смущают. Зачем «дворянину» знать математику? Или хотя бы арифметику?

И исследователи приводят очень интересные цифры, решительно не понимая, что же из них можно извлечь.

Но оставим этот пример, где мы неизбежно оказываемся в лапах самой низменной политики. Рассмотрим другой пример, который сегодня не имеет уж ровно никакого политического подтекста; автора не обвинишь в том, что он нарочно, в каких-то низких целях, завысил или занизил цифры. Тем не менее...

• Вот данные о богатых и бедных дворянах в Российской империи. (Таблица взята из книги *Миронов Б.* «Социальная история России периода империи (XVIII — начало XX в.)». СПб., 2003. Т. 1. С. 89.)

И опять — автор книги не очень умеет считать, а вернее — не понимает, зачем нужно это уметь. В результате в таблице есть странности.

А именно, рассмотрим частное от деления чисел четвёртого столбца на соответствующие числа второго. Это частное показывает, сколько крепостных в среднем приходится на одного дворянина малого, среднего или большого достатка.

Например, посмотрим, сколько же крепостных приходится на одного дворянина с 4—20 крестьянами. Делим 327,5 тысяч на 190,2 тысячи... так... выходит... это ещё что?!

Выходит, что в среднем на помещика с 4—20 крестьянами приходилось по 1,7 крепостного.