

Глава 1

Дроби и проценты

Основные факты и понятия

Положительное рациональное число — это число вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Положительное рациональное число называют также *обыкновенной дробью* или просто *дробью*. Число p называют при этом *числителем дроби*, а число q — *знаменателем дроби*.

Дробь $\frac{p}{q}$ называют *несократимой*, если числа p и q не имеют общих делителей.

Дробь $\frac{p}{q}$ называют *правильной*, если $p < q$.

Обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$ больше обыкновенной дроби $\frac{c}{d}$, если $ad > bc$.

Если знаменатель q дроби $\frac{p}{q}$ — некоторая степень числа 10, то эту дробь можно записать в виде *конечной десятичной дроби*. Например, дроби

$$\frac{5}{10}, \frac{3}{100}, \frac{7}{10000}, \frac{192}{10}$$

записываются следующими конечными десятичными дробями:

$$0,5, 0,03, 0,0007, 19,2.$$

Каждую из этих десятичных дробей называют *десятичным разложением* соответствующей обыкновенной дроби.

Если знаменатель дроби имеет вид $2^n 5^m$, то числитель и знаменатель дроби можно умножить на $2^{k-n} 5^{k-m}$, где k — это наибольшее из чисел n и m . В результате получим дробь со знаменателем 10^k ; её можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Дробь, знаменатель которой имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, нельзя представить в виде конечной десятичной дроби, но можно представить в виде *бесконечной десятичной дроби*. Например, $\frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,(3)$. Запись (3) означает, что тройка периодически повторяется. Повторяться может и другой набор цифр; этот

набор называют *периодом*. Периодичность дроби может начинаться сразу после запятой, как для дроби $0,(3)$. Тогда дробь называют *чисто периодической*. Если же между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называют *смешанно периодической*. Например, дробь $0,73333\dots = 0,7(3)$ смешанно периодическая.

Любое рациональное число представляется периодической десятичной дробью (задача 1.13).

При вычислении десятичной дроби, представляющей обыкновенную дробь, используется деление с остатком. Подробно оно обсуждается в главе 4. Здесь же вполне достаточно представления о делении уголком, которое основано на делении с остатком.

Процент — это $\frac{1}{100}$ часть данной величины, n процентов от величины a равно $\frac{na}{100}$. Увеличение данной величины на $n\%$ — это умножение её на $1 + \frac{n}{100}$. Уменьшение данной величины на $n\%$ — это умножение её на $1 - \frac{n}{100}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Что больше: $\frac{10001}{10002}$ или $\frac{100001}{100002}$?

Решение. Вместо того чтобы сравнивать дроби $\frac{10001}{10002}$ и $\frac{100001}{100002}$, сравним дроби $1 - \frac{10001}{10002}$ и $1 - \frac{100001}{100002}$:

$$1 - \frac{10001}{10002} = \frac{1}{10002} > \frac{1}{100002} = 1 - \frac{100001}{100002}.$$

Для исходных дробей знак неравенства обратный.

Ответ. $\frac{10001}{10002} < \frac{100001}{100002}$.

Пример 2. Запишите дроби $\frac{1}{37}$, $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{13}$ в виде периодических десятичных дробей.

Решение. Дробь $\frac{1}{37}$ в виде десятичной дроби представляется следующим образом. Сначала сравниваем 10 и 37. Поскольку $10 < 37$, первый десятичный знак — ноль. Затем сравниваем 100 и 37. Теперь уже $100 > 37$, поэтому делим 100 на 37 с остатком: $100 = 2 \cdot 37 + 26$. Второй десятичный знак 2. Затем делим 260 на 37 остатком: $260 = 7 \cdot 37 + 1$. Третий десятичный знак 7. Остаток получился 1, поэтому дальше всё будет повторяться периодически. Для двух других дробей вычисления аналогичные.

Ответ. $0,(027)$, $0,(142857)$ и $0,(076923)$.

Пример 3. В мешке было 100 кг огурцов, на 99 % состоящих из воды. После хранения огурцы усохли, и теперь вода составляет только 98 % их веса. Сколько теперь весят огурцы?

Решение. Сухая часть огурцов весит 1 кг. Если вода составляет 98 % веса огурцов, то вес воды относится к весу огурцов как 98 % относится к 2 %. Поэтому вес воды равен $\frac{98}{2} = 49$ кг, а общий вес равен $49 + 1 = 50$ кг.

Ответ. 50 кг.

Задачи для самостоятельного решения

Дроби

- 1.1. Что больше: $\frac{12345}{54321}$ или $\frac{12346}{54322}$?
- 1.2. Разделите 5 яблок поровну между шестью детьми, не разрезая ни одно из яблок более чем на 3 части.
- 1.3. Как отрезать от шнура в $\frac{2}{3}$ м кусок в $\frac{1}{2}$ м, не имея метра?
- 1.4. На острове $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?
- 1.5. Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей — за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. За сколько времени ванна заполнится при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой?
- 1.6. Школьники одного класса ходили в два туристических похода. В каждом походе мальчиков было меньше $\frac{2}{5}$ общего количества участников похода. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $\frac{4}{7}$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.
- 1.7. Найдите дробь с наименьшим знаменателем, значение которой больше 0,4 и меньше 0,5.
- 1.8. Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель — на 10. Могло ли значение дроби увеличиться?

Десятичные дроби

- 1.9. Запишите периодические десятичные дроби $0,(1)$, $0,(01)$ и $0,(001)$ в виде обыкновенных дробей.

1.10. Представьте периодическую десятичную дробь $0,(237)$ в виде обыкновенной дроби.

1.11. Докажите, что любую периодическую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

1.12. Чистый период дроби $\frac{1}{m}$ состоит из n цифр. Докажите, что число $999\dots99$, состоящее из n девяток, делится на m . Например, $999 : 37 = 27$, $999999 : 7 = 142857$ и $999999 : 13 = 76923$.

1.13. Докажите, что любое рациональное число представляется периодической десятичной дробью.

1.14. Подберите цифру d так, чтобы для некоторого натурального n выполнялось равенство $0,(d25) = \frac{n}{810}$.

Проценты

1.15. Что больше: пять процентов от семи миллионов или семь процентов от пяти миллионов?

1.16. Книга стоила 350 рублей. В первом магазине её сначала уценили на 40%, а затем ещё на 5%, во втором — сначала на 5%, а затем ещё на 40%, а в третьем магазине книгу уценили на 45%. В каком магазине книга дешевле?

1.17. Цена картофеля сначала повысилась на 20%, а затем понизилась на 20%. Повысилась или понизилась в результате цена? На сколько процентов?

1.18. После кризиса все цены поднялись на 25%. На сколько процентов меньше товаров можно купить на ту же зарплату?

1.19. В школьном кружке есть девочки, но мальчиков больше 94% состава. Какое наименьшее число школьников может быть в кружке?

1.20. Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочек в нём меньше 50%, но больше 40%?

1.21. Под какой процент выгоднее положить деньги в банк на год: 6% в год или 0,5% в месяц?

1.22. Сколько кг зерна нужно смолоть, чтобы после оплаты работы (10% от помола) осталось ровно 100 кг муки? Потерь при помоле нет.

1.23. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастёт на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату — на 15%, если же зарплату удвоят папе — на 25%. На сколько процентов возрастёт доход всей семьи, если бабушке удвоят пенсию?