Введение

Кратко о Санкт-Петербургской олимпиаде

Санкт-Петербургская (Ленинградская) городская олимпиада не является старейшим математическим соревнованием для школьников[1], хотя, судя по всему, она — самая старая *городская* математическая *олимпиада* школьников. Заключительный тур первой ленинградской олимпиады состоялся 18 апреля 1934 г. (см. [52]) — а буквально через несколько месяцев, в июне того же года, была проведена городская математическая олимпиада в Тбилиси (см. [47]).

Борис Делоне, Григорий Фихтенгольц, Владимир Смирнов, Владимир Тартаковский, Дмитрий Фаддеев, Онуфрий Житомирский — «отцы-основатели» Ленинградской математической олимпиады

---

[1] Таковым, видимо, является Венгерский математический конкурс Этвёша—Кюршака, который был впервые проведён в 1894 году.

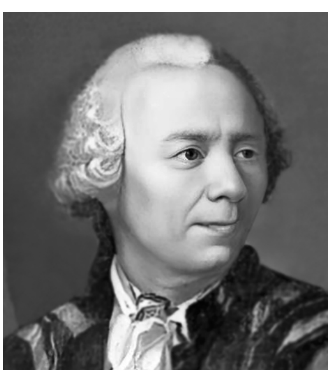
Петербургская академия наук. Гравюра XIX века

Это замечательное соревнование — Ленинградская городская олимпиада по математике — было придумано и организовано усилиями выдающихся ленинградских математиков Б. Н. Делоне и Г. М. Фихтенгольца при поддержке и участии В. И. Смирнова, В. А. Тартаковского, О. К. Житомирского и Д. К. Фаддеева. Идея оказалась настолько успешной и популярной, что в следующем году (при активном участии Б. Н. Делоне, переехавшего в Москву в январе 1935 года) была проведена и первая Московская математическая олимпиада школьников. Стоит упомянуть, что уже через два года и в Ленинграде, и в Москве были опубликованы первые в стране сборники задач для подготовки к математическим олимпиадам [1] и [24].

Здесь нам хотелось бы кратко напомнить читателям о том, какую роль Санкт-Петербург сыграл в становлении российской науки вообще и математики в частности. Началось всё, конечно же, с того, что в 1724 году император Пётр I основал в Санкт-Петербурге первую в России академию наук.

В первые же годы в неё были приглашены такие великолепные математики, как братья Николай и Даниил Бернулли, а также Христиан Гольдбах. Последний вошёл в историю математики в основном благодаря знаменитой проблеме Гольдбаха в теории чисел. Однако он также стал первым в истории России математикомкриптографом и помимо звания академика мог похвалиться тем, что многие годы являлся тайным советником Коллегии иностранных дел и сотрудником так называемого «чёрного кабинета». Братья Бернулли были знамениты, в частности, своими исследованиями в области дифференциальных уравнений, в механике и гидродинамике. Даниил Бернулли стал одним из основателей математической физики, но при этом он увлекался также и вопросами теории вероятностей, посвятив одну из своих работ так называемому Санкт-Петербургскому парадоксу, названному в честь нашего города.

Но, безусловно, никто в XVIII веке не сделал столько для российской и мировой математики, как друг и коллега этих замечательных учёных, один из гигантов математики Леонард Эйлер, который провёл в Петербурге более тридцати лет своей фантастически продуктивной жизни. Достаточно сказать, что Эйлер занимался не только математикой, но и механикой, физикой, астрономией, химией и географией. Он написал два десятка фундаментальных монографий и опубликовал около 850 работ, охвативших такие разнообразные области математики, как математический анализ и теория функций, дифференциальные уравнения, приближённые вычисления, классическая и дифференциальная геометрия, комбинаторика и теория графов. Влияние, оказанное им на математику той эпохи, практически невозможно переоценить.



Леонард Эйлер

Пафнутий Чебышёв

В течение XIX века в северной столице работали такие выдающиеся российские математики, как Михаил Остроградский и Виктор Буняковский, а затем и наиболее выдающийся российский математик своего времени Пафнутий Чебышёв, который вместе со своими многочисленными учениками заложил основы петербургской математической школы. Интересно, что помимо теории чисел (чего стоит одно лишь доказательство постулата Бертрана), теории вероятностей и теории приближённых вычислений (знаменитые многочлены Чебышёва) П. Л. Чебышёв очень много времени посвятил инженерной деятельности, создав массу разнообразных механизмов, включая инвалидную коляску и первый в мире арифмометр непрерывного действия.

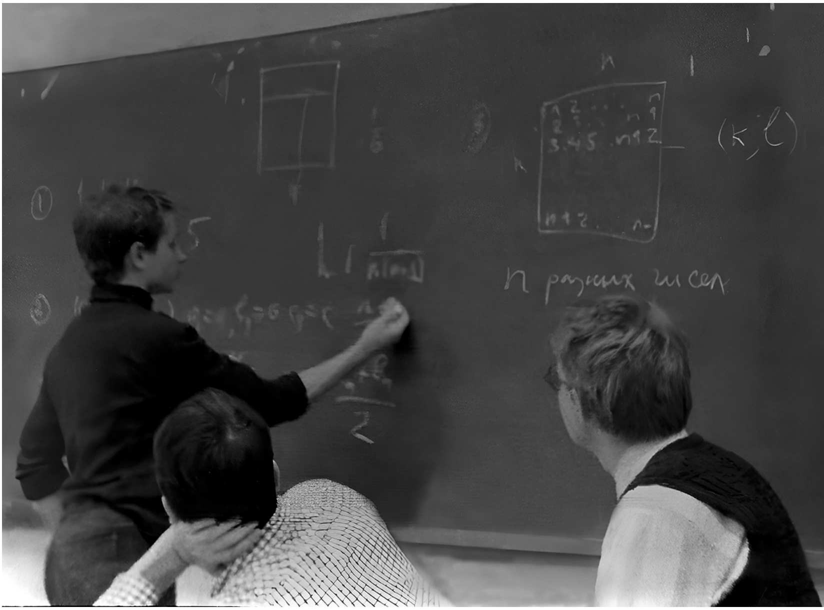
А вот перечислять и оценивать знаменитых петербургских и ленинградских математиков XX века мы не будем — их количество уже столь велико, что нам пришлось бы посвятить их именам и научным достижениям все остальные страницы этой книги.

* * *

Вернёмся к теме нашего сборника — к математическим соревнованиям. Успехи ленинградских и петербургских школьников на математических олимпиадах самого высокого уровня вызвали естественный интерес; поэтому мы попробуем здесь кратко проанализировать причины этого феномена.

Наиболее очевидная и определяющая причина — система внеклассного математического образования, фундамент которой был заложен в Ленинграде в 1930-е годы. Эта система с некоторыми изменениями функционирует в нашем городе до сих пор; именно ей питерские школьники и обязаны своими успехами в многочисленных всероссийских и международных соревнованиях. Она состоит из нескольких компонент, которые мы попробуем сейчас перечислить.

Первая и, пожалуй, первичная компонента — это ставшие впоследствии чрезвычайно распространёнными и популярными *математические кружки*. Их вели молодые преподаватели, аспиранты и студенты математико-механического факультета (матмеха) ленинградского университета. Исходная идея состояла в проведении еженедельных семинаров по внешкольной математике для одарённых ребят, которые хотели начать изучение высшей математики ещё до поступления в университет или в другие учебные заведения. Сначала семинары были организованы в стиле университетских лекций, где преподаватели рассказывали о какой-то области элементарной математики или разбирали решение интересной задачи. Вскоре, од-

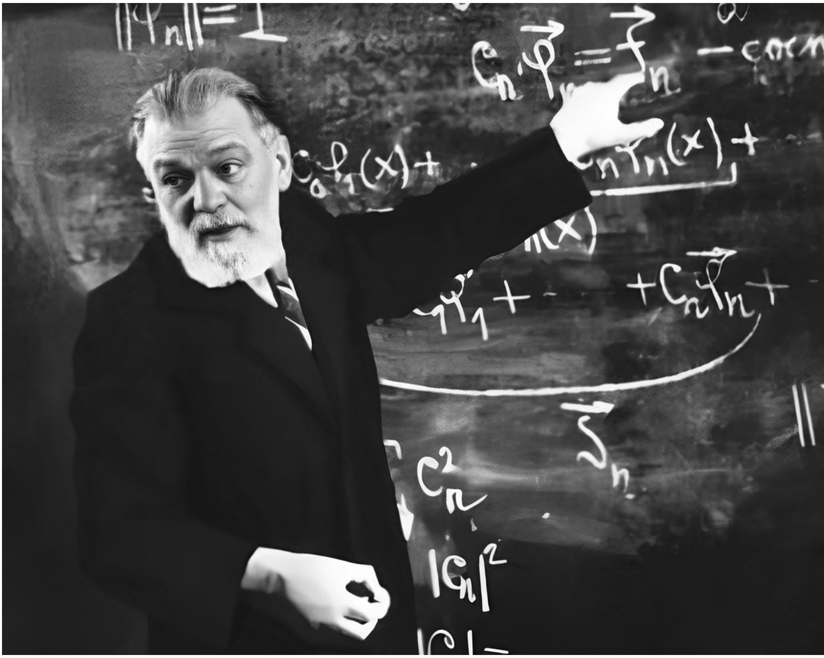


Занятие кружка Юношеской математической школы при ЛГУ (1986)

нако, стало ясно, что лекции надо прерывать на вопросы, ответы, обсуждение альтернативных идей, ошибок и т. д. В результате занятия кружков постепенно приняли ту интерактивную форму, которая и по сей день является наиболее эффективной и популярной для подобных занятий.

После окончания Великой Отечественной войны кружки постепенно восстановили свою работу. За последовавшие сорок лет они последовательно разрослись до такой степени, что практически любой городской школьник от пятого класса и старше, заинтересованный в расширении своего математического кругозора, мог найти нужный ему кружок — зачастую даже в пределах своего района.

Примерно до середины 1960-х годов занятиям кружков сопутствовали лекции так называемого математического лектория. Их читали профессора и доценты матмеха, и каждая лекция была посвящена какой-то конкретной небольшой области математики, которая была достаточно элементарна для понимания старшеклассниками, но при этом могла быть исследована в направлении высшей абстрактной математики.



Лекцию читает профессор Г. М. Фихтенгольц (1950-е гг.)

Второй компонентой стали многочисленные учителя-энтузиасты, которые организовывали в своих школах так называемые факультативы. Обычно они были посвящены темам стандартного школьного курса алгебры или геометрии или решению конкурсных задач. В любом случае, такие факультативы давали сообразительным ребятам возможность увидеть, что математика есть нечто большее, чем решение однообразных уравнений или затверживание никак не связанных между собой определений и фактов про тригонометрические функции, геометрические фигуры или многочлены.

Третья компонента появилась в начале 1960-х годов, когда были созданы специализированные физико-математические школы. Спрос на квалифицированных математиков, физиков, химиков к тому моменту был настолько велик, что необходимость расширения и улучшения школьного преподавания всех естественных наук стала очевидна. Такие школы создавались по всей стране, и конечно же, Ленинград не остался в стороне. Почти десяток городских школ были переведены на такое специализированное обучение, и ещё одна новая школа (физико-математический интернат №45) была организована преподавателями матмеха ЛГУ. Наиболее успешными стали школы так называемой «большой тройки» — школы №30, №45 и №239, в которые поступали наиболее подготовленные и заинтересованные школьники.

Четвёртой компонентой стали разнообразные математические соревнования — наиболее интересным и престижным из них была, конечно, Ленинградская (впоследствии Санкт-Петербургская) городская олимпиада.

За три десятилетия, прошедших с того дня, когда наш город опять стал Санкт-Петербургом, жюри городской олимпиады по математике возглавляли два известных российских математика — А. С. Меркурьев (1992–2001) и Ю. А. Матиясевич (2002–2021).


Александр Меркурьев и Юрий Матиясевич — председатели жюри Санкт-Петербургской математической олимпиады

Ответственными секретарями жюри СПбМО в эти годы были Д. В. Фомин (1992–1994), К. П. Кохась (1994–2010) и Д. А. Ростовский (2010–2022).

Затем появились многочисленные конкурсы, проводившиеся и вузами, и физико-математическими школами, и даже некоторыми городскими газетами. Были и другие факторы, внёсшие свой важный вклад в систему внеклассного научного образования, но в рамках данного предисловия мы не будем погружаться в столь детализированное изучение этого вопроса[1].

Результатом всего этого стал настоящий «просветительский взрыв», произошедший в физико-математическом сообществе Ле-

[1] Некоторые из этих факторов описаны в предисловии к книге [33].



Дмитрий Фомин, Константин Кохась, Дмитрий Ростовский — секретари жюри Санкт-Петербургской математической олимпиады

нинграда. Порождённая им волна захватила и увлекла десятки тысяч школьников Ленинграда, которые с энтузиазмом погрузились в исследование захватывающих тайн современной науки. На данный момент практически все работающие профессиональные математики, получившие школьное образование в Ленинграде (Петербурге), были «инициированы» в высокую науку через кружки и олимпиады нашего города[1].

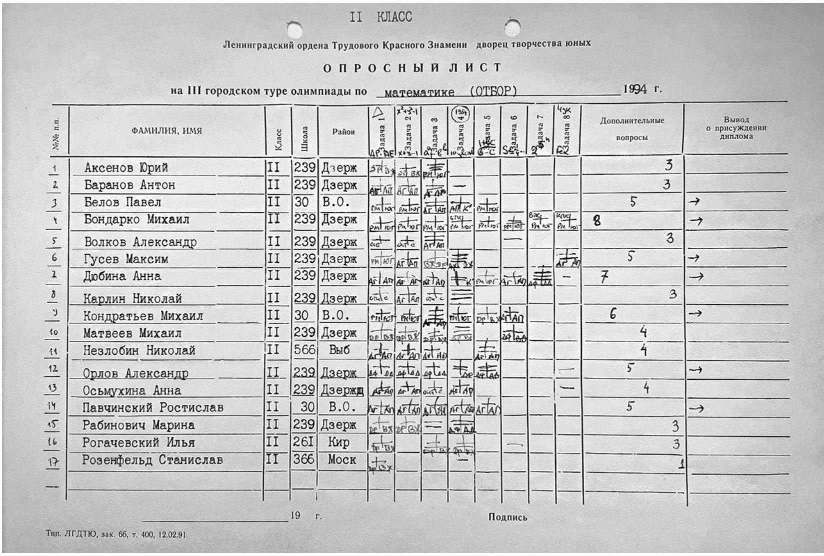
Чтобы продемонстрировать конкретные достижения ленинградских и петербургских школьников в официальных математических соревнованиях, мы приведём здесь несколько любопытных цифр, касающихся их участия в Международных математических олимпиадах (ММО) в 1962–2021 годах (т. е. на протяжении шестидесяти лет).

1) Во всех командах СССР или России, за исключением лишь двух годов (1977 и 1981), был хотя бы один школьник из Ленинграда (Петербурга).

2) Семнадцать раз — включая феноменальный интервал длиной в *одиннадцать* лет с 1987 по 1997 год — *по крайней мере половина* команды СССР (России) на ММО состояла из школьников северной столицы; в 1995 году был установлен своеобразный рекорд: пятеро из шести (!) российских участников ММО были петербуржцами.

3) Первым советским школьником, принявшим участие в трёх ММО (результат: три золотые медали), стал ученик ленинградской

[1] Вполне возможно, что очень редкие исключения и существуют, но авторам о них не известно.



II КЛАСС

Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени дворец творчества юных

ОПРОСНЫЙ ЛИСТ

на III городском туре олимпиады по математике (ОТБОР) 1994 г.

№№ п.п.	Фамилия, имя	Класс	Школа	Район	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Дополнительные вопросы	Вывод о присуждении диплома
1	Аксенов Юрий	II	239	Дзерж									3	
2	Баранов Антон	II	239	Дзерж				—					3	
3	Белов Павел	II	30	В.О.									5	→
4	Бондарко Михаил	II	239	Дзерж									8	→
5	Волков Александр	II	239	Дзерж						—			3	
6	Гусев Максим	II	239	Дзерж									5	→
7	Дюбина Анна	II	239	Дзерж								—	7	→
8	Карлин Николай	II	239	Дзерж									3	
9	Кондратьев Михаил	II	30	В.О.									6	→
10	Матвеев Михаил	II	239	Дзерж									4	
11	Незлобин Николай	II	566	Выб									4	
12	Орлов Александр	II	239	Дзерж								—	5	→
13	Осьмухина Анна	II	239	Дзерж								—	4	
14	Павчинский Ростислав	II	30	В.О.									5	→
15	Рабинович Марина	II	239	Дзерж									3	
16	Рогачевский Илья	II	261	Кир						—			3	
17	Розенфельд Станислав	II	366	Моск				—					1	

19 г. Подпись

Тип. ЛГДТЮ, зак. 66, т. 400, 12.02.91

Протокол отбора-1994

школы № 239 *Сергей Иванов*; через два года это достижение было повторено ученицей той же школы *Женей Малинниковой*, которая стала первой девушкой, трижды поехавшей на ММО[1].

4) В итоге за эти годы на 58 международных олимпиадах питерские школьники заняли 128 из 386 мест в советской (российской) национальной сборной.

Чтобы читателям было немного проще представить себе масштабность этих «спортивных» достижений, укажем, что в 1992–2021 годах в Санкт-Петербурге жило примерно 4 % населения Российской Федерации; при этом наш город занимал почти 40 % мест в командах России на ММО. Соответственно в советскую эпоху (1962–1991) население Ленинграда равнялось примерно 1,8 % населения Советского Союза, а доля ленинградских школьников в командах СССР составила 28 %.

За прошедшие с тех пор годы очень многое менялось в структуре олимпиады, равно как и в системе её проведения, не говоря уже о характере самих задач. Неизменным оставалось только одно,

[1] Отметим, что и Сергей Иванов, и Евгения Малинникова впоследствии стали профессиональными математиками высочайшего уровня.

Команда России на ММО-1995; пять (!) участников из Петербурга — Дмитрий Запорожец (2), Сергей Норин (3), Вероника Есаулова (4), Илья Кацев (5), Дмитрий Челкак (6) (нумерация слева направо)

определяющее для Ленинградской (Санкт-Петербургской) математической городской олимпиады, свойство: она всегда была *устной*.

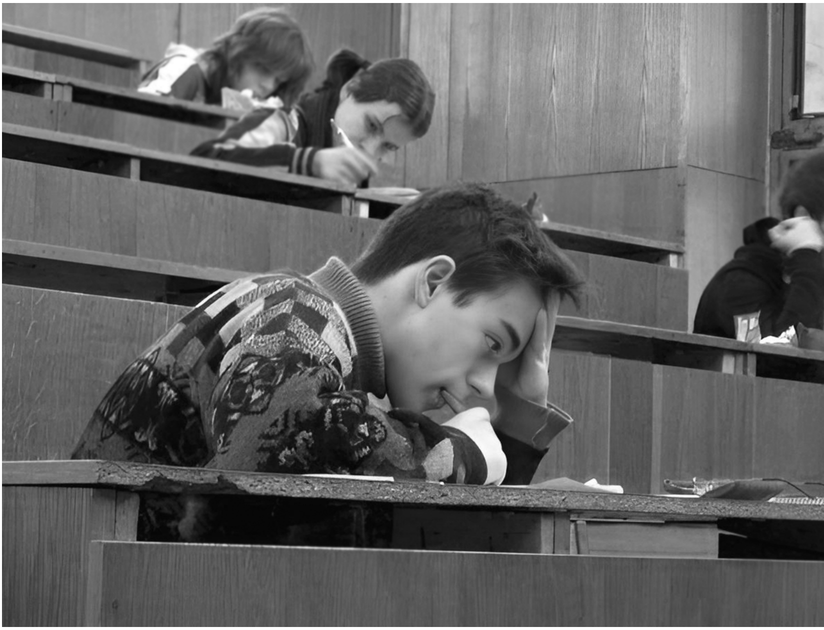
Традиция устной олимпиады — сугубо ленинградско-петербургский феномен. Произошло это в силу того, что уже существовавшая к тому времени система работы в математических кружках (которая, в свою очередь, была основана на университетской традиции устных экзаменов) была естественным образом перенесена на олимпиаду. Занятия в кружках проводились, конечно, устно (лекции, доклады, решение задач, активное обсуждение и обмен мнениями), что и привело к идее проведения олимпиады в аналогичной форме. Надо сказать, что созданная ещё до войны и затем постепенно расширявшаяся сеть кружков и школьных факультативов оказала огромное влияние на всё математическое образование в Ленинграде (Санкт-Петербурге) и, в частности, на олимпиаду школьников.

Другой отличительной чертой Санкт-Петербургской олимпиады по математике является новизна предлагаемых на ней задач. Эти задачи не извлекаются из старых и хорошо забытых книг или вариантов олимпиад двадцатилетней давности. Для каждого тура жюри старается подобрать новые, нигде ранее не встречавшиеся задачи. И обычно это удаётся. Члены жюри придумывают задачи специально для олимпиады и «обкатывают» их на своих коллегах. Задача, которая, по мнению хотя бы одного члена жюри, известна или встречалась где-либо в книгах или на каких-либо математических соревнованиях, безжалостно вычёркивается из списков. Многие провинциальные олимпиады нашей страны, турниры и фестивали юных математиков и другие соревнования используют в своей работе материалы Санкт-Петербургской олимпиады по математике. Причина проста: организаторы этих олимпиад видят в материалах нашей олимпиады не только коллекцию оригинальных задач, но и объективный показатель уровня современной математической олимпиады. В этом смысле Санкт-Петербургская олимпиада является одним из «законодателей мод» в олимпиадном движении нашей страны.

Хотя математические олимпиады и стали очень распространённым явлением, но как модели лучших кутюрье, показываемые на демонстрациях мод, мало подходят для повседневной носки, так и задачи последних туров нашей олимпиады далеки от уровня школьной контрольной работы. При работе с этой книгой обязательно следует учитывать, что задачи второго и отборочного туров рассчитаны на самых одарённых школьников сильнейшего в олимпиадном отношении города России, а уровень олимпиады 239-й школы (см. раздел «Дополнительные задачи») ещё выше.

* * *

До 2008 года Санкт-Петербургская олимпиада по математике состояла из трёх туров. Первый (*районный*) тур проводится одновременно во всех районах города по задачам, составленным жюри городской олимпиады. Организацией этого тура занимаются работники районных методических кабинетов. Это, даже по меркам многомиллионного города, массовая олимпиада — в ней участвует 10–15 тысяч школьников 6–11 классов. По результатам первого тура определяется состав участников следующего, второго (*городского*) тура, в котором участвуют примерно 100 школьников от каждого класса. Этот этап, проходящий в Российском государственном педагогическом университете им. А. И. Герцена (6–8 классы) и в Санкт-Петер-



Не так-то это просто… «Выводная» аудитория 11 класса на СПбМО-2008; на переднем ряду — Вячеслав Соколов, победитель олимпиады 10 класса

бургском государственном университете (9–11 классы), определяет победителей Санкт-Петербургской городской олимпиады.

Третий (*отборочный*) тур служит только для формирования команды города на Всероссийскую олимпиаду. На него приглашаются школьники 9–11 классов, хорошо выступившие на втором туре — обычно от пятнадцати до тридцати участников по каждому классу.

Первый тур Санкт-Петербургской олимпиады письменный, и длится он три часа. Задачи этого этапа подбираются так, чтобы их могло решить много участников, для решения было достаточно знаний школьной программы, а сами решения можно было бы сравнительно просто записать.

Второй и отборочный туры Санкт-Петербургской олимпиады по математике — УСТНЫЕ. Слово *устная* не означает, что школьники должны решать задачи в уме. «Устность» олимпиады состоит лишь в способе изложения решения. Если участник решает задачу, то он должен рассказать решение одному из многочисленных членов жюри. Таким образом, школьники могут, не затрачивая времени на тщательную запись решений, поговорить с квалифицированным математиком, понять, что такое доказательство или контрпример, использовать в своих решениях сложные, труднообъяснимые построения, получить возможность исправить своё решение прямо во время изложения — тут, конечно, тоже бывают промахи. Обычно, если ошибка не очень существенна, то отвечающий успевает закрыть брешь в решении в течение небольшого промежутка времени (порядка одной минуты). Если же ошибку исправить не удалось, в протокол ставится минус, но право рассказывать решение какой-либо задачи школьник теряет только тогда, когда у него появится третий минус по этой задаче. Количество минусов у участника не учитывается при подведении итогов. В отличие от письменных олимпиад, возможны только два вида результатов по каждой задаче: «решена» или «не решена». Полезные соображения, неполные решения и т. п. не засчитываются.

В начале второго тура участники получают условия четырёх задач варианта (из семи; в шестом классе — из шести). Тех, кто в течение трёх часов сумел решить три задачи, переводят в другую аудиторию (так называемый *вывод*), где им дают условия остальных задач и ещё один час времени.

На отборочном туре участники получают сразу все 8 задач варианта. Длительность олимпиады — 5 часов.

* * *

К сожалению, в 2008 году система Всероссийской олимпиады (составной частью которой является Санкт-Петербургская олимпиада школьников) была реорганизована[1]. Поэтому, начиная с 2009 года, команда Санкт-Петербурга на Всероссийскую олимпиаду стала определяться по результатам так называемого регионального тура. Задачи этого этапа подготавливаются центральной комиссией и представляют собой единый вариант, предлагаемый школьникам одновременно во всех регионах Российской Федерации. Участие в региональном туре определяется по итогам первого тура местной олимпиады.

После такой реорганизации и второй (городской), и третий (отборочный) туры СПбМО превратились в «тупиковые» соревнования. С тяжёлым сердцем оргкомитет Санкт-Петербургской

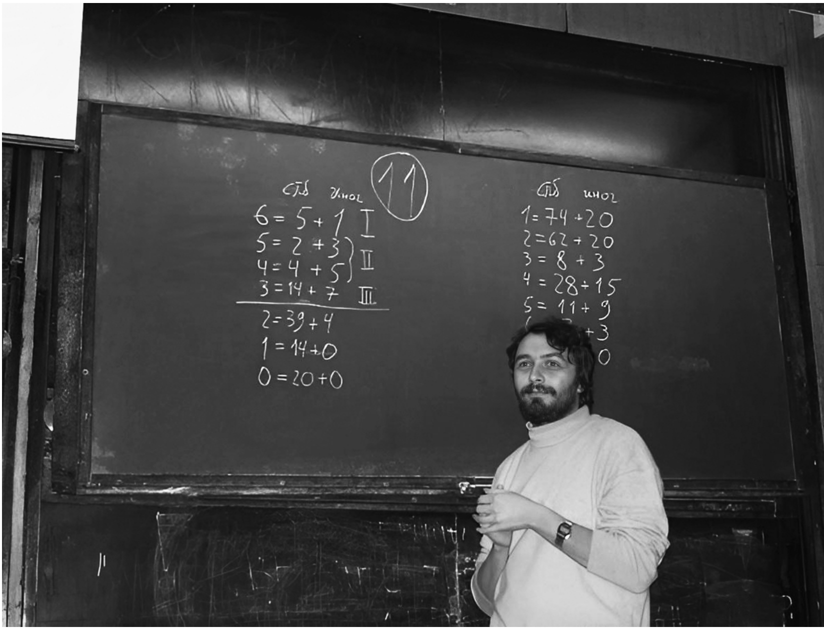
[1] Мы пишем здесь «к сожалению» по той простой причине, что на наш взгляд никаких положительных изменений ни для Санкт-Петербурга, ни для России в целом эта реформа не принесла.

Команда Санкт-Петербурга на Межреспубликанскую (СНГ) олимпиаду школьников по математике 1992 года

олимпиады принял решение полностью отменить отборочный тур (за его полной ненадобностью в рамках новой системы), сохраняя при этом второй тур — теперь именно по его итогам школьникам вручаются дипломы победителей СПбМО. Другая причина именно такого решения состояла в желании спасти важнейшую историческую традицию Санкт-Петербурга, **устную** городскую олимпиаду по математике.

Отметим, что не все предлагаемые в этой книге решения задач удовлетворяют требованиям членов жюри, проверяющих работы первого тура. Если бы авторы этого сборника написали такие решения в настоящей олимпиадной работе, им, возможно, не удалось бы пройти на следующий тур — см., например, решение задачи 00.2. Мы надеемся, однако, что для человека, читающего эту книгу, главная цель — не «вывести авторов на чистую воду», а познакомиться с новыми идеями и приёмами, удовлетворить любопытство, чему-нибудь научиться или, в крайнем случае, получить сеанс шоковой терапии.

Различные пропуски и/или умолчания, встречающиеся в решениях, рассчитаны на вдумчивого читателя. Авторы данного издания вправе рассчитывать на присутствие у читателя некоторого интел-



Олимпиада 2008 года, заседание жюри. Докладывает старший по 11 классу А. И. Храбров

лекта и естественного желания самому заполнить не так уж и редко встречающиеся «дырки» в решениях. Кроме того, опущенные детали часто неинтересны, а идея решения при таком сокращении становится более понятной.

Надо сказать, что умение решать задачи и способность записывать решение — это совершенно разные вещи. Многие школьники, вероятно, почувствовали это уже на первом туре. Очень часто жюри, хотя и с большой неохотой, вынуждено установить критерий прохода на второй тур по схеме «более двух задач», что означает «две задачи и полезные соображения по одной из оставшихся». «Полезными соображениями» могут быть правильный (но без необходимых пояснений) ответ, разбор одного из нескольких случаев, очень неряшливо написанное решение — математически неряшливое, а не в смысле почерка. (Неразборчиво или небрежно написанную работу члены жюри стараются оценить объективно, потому что по себе знают, что способности к математике и хороший почерк — качества вполне независимые.) Какое из соображений следует считать полезным, а какое нет — жюри обсуждает это на заседании по подведению итогов олимпиады, и окончательная формулировка может быть, опять-таки, довольно расплывчатой. Таким образом, необходимость чётко излагать свои мысли на бумаге является характерной особенностью письменной олимпиады и, как нам кажется, одним из основных недостатков письменных олимпиад вообще, особенно в младших классах.

Читателям, которых интересует более подробная история Ленинградской городской олимпиады школьников по математике, мы очень рекомендуем прочесть главу «Исторический очерк» из книги [19]. Эту книжку (или её электронную версию) можно купить в магазине издательства МЦНМО.

Несколько советов тем, кто учится решать задачи

Сделанное и дурак поймёт.
Гомер

Как известно, чтобы хорошо понять решение задачи, лучше всего решить её самому или хотя бы попытаться это сделать. Придумав решение, его, разумеется, нужно проверить. Как же узнать, является ли решение правильным? (Можно добавить «с точки зрения жюри олимпиады», хотя само жюри, конечно, считает свои критерии единственно возможными.)

Кажется естественным, что для проверки решения олимпиадной задачи нужно просто «сверить» его с изложенным в сборнике (если оно, конечно, там вообще имеется). Однако это далеко не лучший способ, особенно для сложных задач.

Во-первых, часто оказывается, что в книге[1] напечатано *совсем другое решение*. Олимпиадные задачи обычно имеют несколько решений, и даже одно и то же по существу решение может быть изложено очень разными способами. Если решение отличается от написанного в книге, это совсем не значит, что оно неправильно.

Во-вторых, решение может быть похожим на решение в книге и даже давать тот же ответ, но тем не менее быть неверным. Главное в решении — *логическая основа*, а такие вещи, как ответ или наличие той или иной формулы, сами по себе ничего не означают. (Например, на массовой олимпиаде всегда находятся участники, которые, придумав ответ, записывают в решении почти произвольную приводящую к нему комбинацию арифметических действий, не заботясь о том, имеют ли эти действия какое-нибудь отношение к задаче. Такие «решения» не засчитываются независимо от того, правилен ответ или нет. Важно не столько уметь без ошибок производить вычисления, — в олимпиадных задачах сложные вычисления встречаются сравнительно редко, — сколько понимать, *зачем* эти вычисления делаются.)

[1] А в наше время сто́ит добавить — «или в сети».

Псевдорешение описанного выше вида обычно выглядит как попытка запутать читателя (или проверяющего на олимпиаде) при помощи чистого жонглирования условиями и выводами, которое не содержит никаких нетривиальных логических связок или вычислительных переходов.

Наконец, решения, изложенные в книге, тоже нужно проверять! Не только для того, чтобы искать в них ошибки, а для того, чтобы лучше в них разобраться. Многие промежуточные утверждения в решениях оставляются без комментариев как сами собой разумеющиеся или снабжаются лишь краткими пояснениями. *Такие утверждения не следует принимать на веру*. Нужно понять, почему каждое из них верно и откуда оно следует (а для этого иногда приходится решить ещё одну маленькую задачу). Решение можно считать проверенным только тогда, когда понятны все его детали и оно, при необходимости, может быть объяснено сколь угодно подробно. Кстати, именно таковы критерии на устных олимпиадах — отвечающий решение не обязан заранее знать, какие детали решения должны объясняться подробно, но должен быть готов ответить на соответствующие вопросы.

Впрочем, объяснение деталей редко вызывает затруднения, а на первом туре особой подробности в изложении и не требуется — было бы решение! Гораздо больше неприятностей происходит из-за разнообразных *логических ошибок*. Часто проявляется, к сожалению, и непонимание са́мого главного — что значит «решить задачу» (задачу вообще, а не задачу того или иного стандартного типа). Поэтому, прежде чем приступать к решению, нужно понять, что именно в данной задаче требуется.

Практически любая задача по математике — это задача «на доказательство». Это означает, что любое утверждение, встречающееся в решении, будь то ответ задачи или вспомогательный факт, должно быть *обосновано* (*доказано*). Само решение задачи представляет собой не что иное, как доказательство некоторого утверждения — либо утверждения, явно сформулированного в условии («*Докажите, что*...»), либо утверждения, которое отвечает на вопрос задачи. Именно такое доказательство, собственно говоря, и понимается под словом «решение». (В некоторых задачах, впрочем, достаточно привести какой-нибудь пример. К таким задачам относятся задачи-головоломки для младших классов и задачи с вопросом типа «*Существует ли…*» — но, конечно, только если ответ положителен. При этом не всегда очевидно, что пример действительно подходит; зачастую его пригодность нуждается в пояснениях, а возможно даже и в некотором содержательном рассуждении.)

Большинство задач включает описание «условий», которые предполагаются выполненными (например: «*Число x таково, что…*», «*Известно, что…*» и т. п.). В таких задачах, по существу, требуется доказать утверждение типа «*Во всех возможных случаях, когда выполняются данные условия, верно, что…*». Разбор одного конкретного примера, удовлетворяющего условиям задачи, никогда не является решением. Даже если такой пример на самом деле только один, этот факт (единственность) тоже нуждается в доказательстве. Распространённой разновидностью этой ошибки является *рассмотрение только одного случая*, который почему-то объявляется *наихудшим*[1].

Если в формулировке задачи требуется что-нибудь найти, то решение, кроме собственно ответа, должно содержать доказательство того, что *другого ответа быть не может*. Конечно, последовательный логический вывод ответа из условия, обычный для школьных задач, является таким доказательством. Но совсем не обязательно решать задачу именно так. Не важно, как именно ответ был найден — логически выведен из условия, придуман с помощью «правдоподобных рассуждений» или просто угадан, но если доказано, что этот ответ — единственно возможный, то задача решена. При этом доказательство может не иметь ничего общего с процессом «поиска» ответа, и придумать его бывает сложнее, чем найти (угадать) ответ. Нужно помнить, что задача может иметь и несколько ответов — такое бывает, хотя и редко, — и тогда нужно найти их все. Короче говоря, если в задаче нужен ответ, то в решении требуется *привести все возможные ответы и доказать, что других нет*. (Старшеклассники могут провести здесь аналогию с тем, что значит «*решить уравнение*».) Если ответов оказалось несколько, нужно убедиться, что все они действительно подходят; впрочем, это полезно и при единственном ответе.

Если в условии задачи введено обозначение для какой-нибудь величины, скажем n, то ответ может зависеть от этой величины — например, быть несложным алгебраическим выражением от n.

[1] Наихудшим для кого? Для участника олимпиады? Но раз для этого случая придумано решение, значит, не так уж этот случай и плох для решающего задачу.

Соответствие условию — первое, что отличает правильное решение от неправильного (точнее, решение от *не-решения*). Проверяя решение, нужно в первую очередь убедиться, что в нём доказывается именно *то, что нужно*. Второе и последнее требование к решению состоит в том, чтобы оно действительно являлось *корректным* доказательством, т. е. *логически полным рассуждением, не содержащим ошибок*. Проблема неполноты доказательства или «*недостаточности обоснования*» (это вежливый синоним для более точной фразы «*полное отсутствие решения*») существует обычно только на письменных олимпиадах. Типичное «*недостаточно обоснованное решение*» выглядит примерно так:

«Известно, что ⟨переписывается условие задачи⟩*. Значит,* ⟨текст утверждения задачи⟩*. Ведь если неверно, что* ⟨утверждение задачи⟩*, то тогда не может быть так, что* ⟨текст условия⟩*. Потому что из того, что* ⟨текст условия⟩*, следует, что* ⟨утверждение задачи⟩*. Что и требовалось доказать».*

Ясно, что такой текст — совсем не решение, несмотря на то что в нём нет никаких «ошибок» (неверных утверждений). И первое, и второе, и третье предложение по сути дела попросту повторяют утверждение исходной задачи, при этом не приводится никаких деталей и разъяснений. Решения как не было, так и нет.

Бывают и более сложные примеры, но в них, как правило, за недостаточностью обоснования прячутся логические несоответствия или *подмена посылки*, когда, скажем, доказав вспомогательное утверждение A, автор затем пользуется утверждением A', похожим на утверждение A, но по сути содержательно отличающимся от него. Обычно решение задачи состоит в том, что её утверждение выводится из совсем простых фактов, очевидных или общеизвестных. Если же оказывается, что полное доказательство какого-нибудь «очевидного» утверждения ничуть не проще, чем всё решение задачи, то это как раз случай «недостаточного обоснования».

Ещё один характерный признак отсутствия решения — *слишком общие рассуждения*. Если рассуждения в одинаковой степени применимы и к самой задаче, и к какой-нибудь похожей, но неверной формулировке, то они, конечно же, ничего не доказывают. В частности, если решение не использует одно из условий, без которого задача заведомо неверна, то это верный признак наличия логических ошибок или *неполноты решения*. Поэтому всегда полезно выяснить, являются ли существенными для задачи те или иные её условия, и если являются, то как именно они используются в решении.

Что касается логических ошибок в рассуждениях, то примеры их столь многочисленны и разнообразны, что перечислять их бесполезно. Лучший способ избежать их — это следить за тем, чтобы все утверждения в решении имели чёткий и однозначный смысл.

Ни в коем случае не следует основывать решение на «известных» теоремах, формулировки которых вам не до конца понятны, или использовать математические понятия, не зная их точных определений. *Запутанность или туманность рассуждений* или использование «крутых» фактов, которые при ближайшем рассмотрении оказываются ненужными или неприменимыми, — верный признак серьёзной логической ошибки в решении.

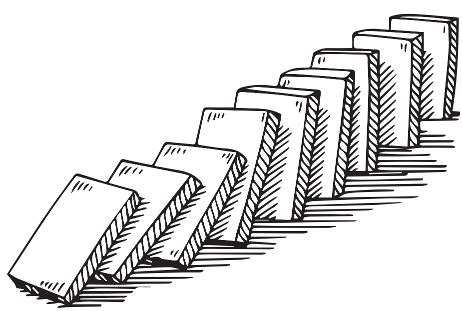
То же самое относится к стандартным обозначениям и правилам обращения с выражениями — если решение появилось «из ничего» в результате комбинирования формул из нескольких справочников, то оно, скорее всего, является полной бессмыслицей. (Кроме того, при таком подходе к решению всегда есть опасность сократить на x в дроби $\frac{\sin x}{x}$, прочитать одну из формул вверх ногами или нечаянно потерять один из многочисленных множителей или слагаемых.)

И последнее замечание. При чтении решений часто возникает недоумение: «*Как до такого можно догадаться?*». Не расстраивайтесь — это недоумение в большинстве случаев вполне правомерно. Дело в том, что *изложение решения обычно не соответствует процессу его поиска*. Решение всё-таки должно отвечать на вопрос «*Почему верно утверждение задачи?*» а не на вопрос «*Какие мысли приходили мне в голову, когда я её решал?*» (хотя и второй вопрос зачастую тоже бывает небезынтересен).

Чтобы лучше понять, почему это совсем разные вещи, представьте себе процесс доказательства какого-нибудь типового тождества или неравенства. Обычно это происходит так: берётся доказываемое выражение и с помощью известных правил преобразования сводится к чему-то заведомо истинному. В этом есть некоторая странность — действия производятся с утверждением, которое ещё не доказано и поэтому не может приниматься за истинное. (Этот метод называется *анализом с конца* и при его невнимательном использовании действительно можно перепутать причины и следствия.) «Логически безупречным» было бы и читать такое решение с конца —

тогда оно начинается с заведомо верных утверждений, из которых последовательно выводятся другие, а последним выводится то, что нужно доказать. Но придумать такое решение обычно гораздо сложнее. Например, если в процессе решения нужно раскрыть скобки, а затем, скажем, сократить что-то в правой и левой части, то при движении от конца к началу это выглядит так: прибавить «что-то» к обеим частям, после чего разложить на множители. Попробуй догадайся! Точно так же и самые «загадочные» решения олимпиадных задач могут на самом деле придумываться совершенно естественно. В этом ещё одна причина того, что решать задачи самостоятельно гораздо важнее и полезнее, чем читать и проверять чужие решения.

Если доказательство проводится не с конца, а с начала, то его логику можно уподобить *цепочке падающих домино*. Из условия выводится факт № 1, затем факт № 2, из них — факт № 3 и так далее. Вспомогательные леммы и следствия падают как домино, «роняя» друг друга, и после нескольких таких переходов наконец рушится и последняя преграда.



Повторим — создание такого решения зачастую гораздо труднее, чем его понимание читателем. В этом процессе каждый шаг (выбор очередной гипотезы, леммы или следствия) можно уподобить блужданию по болоту, накрытому густым туманом. В каком направлении двигаться, на какую кочку перескочить? Видимость ограничена несколькими метрами, а желанную цель, твёрдый берег, в тумане не разглядеть. А если что-то и видно, то на пути лежит ненадёжная трясина, которая быстро поглотит зазевавшегося путника.

Чаще всего — когда речь идёт о трудной задаче — приходится сочетать оба направления движения, нащупывая путь и с начала, и с конца. Таким образом, пытаясь доказать, что из P следует Q, вы, с одной стороны, находите разнообразные следствия условий P, а с другой стороны — ищете факты, из которых вытекало бы утверждение Q. Так сказать, роете туннель сразу с обоих концов. И тут хорошо бы не оказаться в ситуации, описанной в старинном анекдоте о двух братьях, подряжавшихся рыть туннель под проливом Ла-Манш.

Их план был таков: старший брат будет рыть из Англии, а младший из Франции. А под Ла-Маншем они соединятся.

«А если вы промахнётесь?» — спросили их заказчики.

«Тогда у вас будет два туннеля за те же деньги!» — не моргнув глазом, заявили братья.

Шутка шуткой, но имейте в виду, что, ломая голову над нетривиальной проблемой, не сто́ит «промахиваться»: сил на оба туннеля может и не хватить.

И тут, как всегда, помогут только *постоянная практика, формальная логика и математическая интуиция*. Иными словами — «труд и гений». Успеха вам!