Введение

В 1982 году Эдвард Виттен опубликовал свою знаменитую статью [1], где он показал, что некоторые классические задачи дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии — такие как комплекс де Рама и теория Морса — могут быть описаны весьма простым и прозрачным образом на языке суперсимметричной квантовой механики. Однако, насколько я могу судить на основании моих бесед с математиками, язык суперсимметрии не стал для них рабочим языком. Специалисты, изучающие эту область математики, предпочитают работать более традиционными методами.

Об этом можно пожалеть, поскольку суперсимметрия не только довольно просто описывает известные ранее факты, но также позволяет получить много *новых* математических результатов. И это послужило для меня основным побудительным мотивом к написанию данной книги. Я попытаюсь описать суперсимметричный формализм так, чтобы это было понятно как физикам, так и математикам, и вывести на его основе как хорошо известные, так и недавно полученные математические результаты по дифференциальной геометрии многообразий.

Можно сделать следующее общее замечание. Очевидна тесная связь математики с теоретической физикой. Можно вспомнить, что геометрия впервые появилась в Древнем Вавилоне как прикладная дисциплина, обслуживавшая нужды крестьян и сборщиков налогов. Только позднее люди поняли, что геометрия интересна не только с практической, но и с эстетической точки зрения, и стали играть в геометрические игры, не думая о народно-хозяйственных приложениях. А ещё позднее они с удивлением обнаружили, что чисто, как им казалось, абстрактные многомерные геометрические конструкции оказались удобным инструментом для описания окружающего мира.

Диалог между чистой математикой и теоретической физикой полезен для обеих этих дисциплин, нет нужды останавливаться на многочисленных иллюстрирующих это примерах. К сожалению, этому диалогу сильно мешает сегодня различие языков, на котором говорят и думают физики и математики. Такое различие приводит к тому, что физику трудно понять статью, написанную математиком, даже если факты, изложенные в статье, ему хорошо знакомы. Они, однако, изложены в необычной для него форме, с которой он плохо знаком и к которой не привык. Математику не менее трудно разобраться в статье, написанной физиком...

Здесь стоит сделать философско-терминологическое отступление (или, если угодно, отступление в отступлении). Дело в том, что слово «физик» означает сегодня не совсем то, что оно означало во времена Ньютона, и не то, что оно означало ещё полвека назад. Тогда оно имело вполне ясный смысл: «физика» в переводе с греческого значит природоведение, и физик — это учёный, занимающийся физикой и изучающий свойства мира, в котором мы живём. Это относилось как к экспериментаторам, так и к теоретикам. Теоретик мог использовать в своей работе сложный математический аппарат, но суть его работы состояла в объяснении результатов опыта и в генерации предсказаний, которые могли быть проверены на опыте. Высшим судьёй его деятельности был эксперимент. Всё остальное, включая логическую строгость вывода этих предсказаний, имело второстепенное, подчинённое значение.

Сейчас ситуация иная, поскольку мы практически достигли технологического предела в строительстве новых ускорителей и эксперимент в физике высоких энергий перестал развиваться. Новой существенной экспериментальной информации больше, увы, почти не поступает, и живая связь между теорией и экспериментом прервалась. В этих условиях многие теоретики перестали изучать природу, т. е. перестали быть физиками в традиционном понимании, и занялись изучением *воображаемых* миров, используя методы, развитые в прошлом столетии для описания мира реального. При отсутствии эксперимента единственным критерием правильности научной работы стала её логическая непротиворечивость. Фактически родилась новая область математики, но занимаются ей теоретики, получившие образование на физических факультетах университетов и часто (если речь не идёт о самых молодых людях) имеющие опыт работы в роли «физических физиков». И взаимное вавилонское непонимание, о котором говорилось выше, — это в значительной мере непонимание между исследователями, работающими в этой новой области науки (физиками в современном смысле, но правильнее их назвать «физическими математиками») и в традиционных математических областях.

Такой раскол существовал не всегда. 200 лет назад его ещё почти не было. 100 лет назад он уже существовал, но не был таким глубоким. Раскол углубился в середине прошлого века, когда Никола Бурбаки написал влиятельную серию монографий по разным областям математики и сделал это в весьма строгой формальной манере. Нравится это нам, или нет, но расхождение языков — это свершившийся факт, с которым нельзя не считаться.

Что касается предлагаемой читателю книги, она написана на «суржике» — смеси этих двух языков. Я сделал это в надежде, что книга окажется понятной учёным из обоих «лагерей».

Более детально:

1. Изучая геометрию многообразий, мы интересуемся их инвариантными свойствами, не зависящими от выбора координат. Можно сформулировать утверждения римановой геометрии в строгой рафинированной манере без использования координат, и математики часто поступают именно так. Но более, как нам кажется, удобно использовать *какие-то* координаты, параметризующие многообразие (не забывая, конечно, что эти координаты могут быть выбраны многими разными способами). В частности, *векторное поле* на многообразии размерности D будет пониматься просто как набор D функций V^N координат x^M, преобразующихся соответствующим образом при общекоординатных преобразованиях. Под *аффинной связностью* мы будем понимать объект с тремя индексами G^P_{MN}, который входит в определение ковариантной производной. G^P_{MN} может быть симметричным относительно перестановки $M \leftrightarrow N$, если нет кручения, или не обладать такой симметрией, если кручение присутствует.

2. Будучи физиком (в современном смысле, обрисованном выше), автор этой книги говорит на математическом языке с сильным акцентом. Однако книга эта посвящена математическим вопросам, и я попытаюсь организовать её так, как организованы

математические книги, — с определениями, теоремами и леммами. Я буду пытаться так делать (хотя и непоследовательно) даже при описании чисто физических сюжетов, таких как классическая механика.

Все понятия, кроме самых элементарных, будут определены на страницах книги, так что читатель — и физик, и математик — сможет понять, о чём идёт речь. Должен предостеречь: эти определения будут с неизбежностью иметь отчётливый физический привкус. Доказательства теорем не будут неверными, но будут лишены настоящей математической строгости. По двум причинам: во-первых, не будучи математиком, я просто не могу такую строгость обеспечить, и, во-вторых, наша цель — быть понятным обоим сообществам.

Основная идея Виттена состояла в следующем. Рассмотрим гладкое многообразие размерности D, параметризованное координатами x^M. Рассмотрим классический комплекс де Рама, т. е. множество всех p-форм

$$\alpha^{(p)} = \alpha_{M_1\ldots M_p}(x^N)\, dx^{M_1} \wedge \ldots \wedge dx^{M_p}, \tag{0.1}$$

$p=0, \ldots, D$. Определим оператор внешнего дифференциала (или внешней производной) формы d,

$$d\alpha = \partial_N \alpha_{M_1\ldots M_p}\, dx^N \wedge dx^{M_1} \wedge \ldots \wedge dx^{M_p}, \tag{0.2}$$

и сопряжённый оператор $d^\dagger$, который действует на p-форму как $(-1)^{pD+D+1} \star d \star$, где $\star$ — оператор дуальности (читатель найдёт дальнейшие детали в главе 1). Операторы d и $d^\dagger$ нильпотентны, а антикоммутатор $\{d, d^\dagger\}$ есть некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Фактически он представляет обобщение оператора Лапласа—Бельтрами $\triangle$, действующее на дифференциальные формы.

И мы замечаем, что алгебра

$$d^2 = (d^\dagger)^2 = 0, \quad \{d, d^\dagger\} = -\triangle \tag{0.3}$$

изоморфна простейшей алгебре суперсимметрии

$$\hat{Q}^2 = (\hat{Q}^\dagger)^2 = 0, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = \hat{H}, \tag{0.4}$$

где $\hat{Q}$ и $\hat{Q}^\dagger$ — эрмитово сопряжённые суперзаряды и $\hat{H}$ — гамильтониан. Отсюда следует, что $[\hat{Q}, \hat{H}] = [\hat{Q}^\dagger, \hat{H}] = 0$, так что система имеет один комплексный или два вещественных интеграла движения. На этом языке p-форма (0.1) интерпретируется как *волновая функция*, лежащая в гильбертовом пространстве, где действуют операторы суперзарядов и гамильтониан. Эта волновая функция зависит от обычных динамических переменных x^M и также от *грассмановых* антикоммутирующих переменных ψ^M. Волновую функцию

$$\Psi(x^M, \psi^M) \tag{0.5}$$

можно разложить в ряд по ψ^M. Замечательно то, что такой ряд *конечен*, поскольку в произведении $D + 1$ нильпотентных антикоммутирующих факторов $\prod_{i=1}^{D+1} \psi^{M_i}$ по крайней мере один фактор повторяется дважды и выражение обращается в ноль. В этой гамильтоновой картине p-форма (0.1) отображается в волновую функцию, включающую произведение p грассмановых факторов.

Такая интерпретация комплекса де Рама весьма полезна, поскольку:

1. Она позволяет использовать всё многообразие физических методов, которые были развиты для изучения динамических систем со времён Ньютона и Шрёдингера.

2. Все важные для геометрических приложений динамические системы суперсимметричны. И это позволяет использовать мощные методы — в частности, методы, основанные на понятиях *суперпространства* и *суперполя*, — которые были развиты физиками за полвека, истекшие с 1971 года, года рождения суперсимметрии [2].

Следует отметить следующее. Суперсимметрия была открыта и затем изучалась физиками главным образом как новая интересная симметрия *полевых* систем. Однако для геометрических приложений нам будут интересны только суперсимметричные *квантово-механические* (СКМ) системы, в которых динамические переменные не зависят от пространственных координат, как это имеет место в теориях поля, а только от времени. По этой причине пространственные координаты в роли независимых переменных [не путать с динамическими переменными $x^M(t)$] не появятся на страницах нашей книги практически никогда.

В уравнениях (0.4) записана простейшая алгебра СКМ с одним комплексным или двумя вещественными суперзарядами. Позже мы увидим, что эта алгебра релевантна для описания геометрии произвольных вещественных многообразий, где определены внешняя производная d комплекса де Рама и сопряжённый к ней оператор, и также геометрии комплексных многообразий, где определены внешняя производная комплекса Дольбо и сопряжённый оператор.

Но алгебра суперсимметрии может быть богаче и включать несколько пар сопряжённых суперзарядов. Мы увидим, что такая *расширенная* суперсимметрия релевантна для описания многообразий специального типа, в частности *кэлеровых* и *гиперкэлеровых* многообразий, а также так называемых многообразий НКТ[1]. Все эти и некоторые другие многообразия будут подробно обсуждаться дальше.

План книги следующий.

Часть *Геометрия* содержит предварительную математическую информацию — некоторые известные факты теории гладких многообразий. Она адресована главным образом физикам. Мы начинаем с краткого описания римановой геометрии (физик, изучавший общую теорию относительности, может это описание пропустить). Затем мы описываем комплекс де Рама, комплекс Дольбо для комплексных многообразий, геометрию кэлеровых и гиперкэлеровых многообразий и в заключение подробно разбираем геометрию многообразий НКТ (этот сюжет не так хорошо известен и может представлять интерес и для математиков).

В части *Физика*, адресованной в основном математикам, мы даём необходимую информацию об обычных и суперсимметричных механических системах. Мы начинаем с краткого ликбеза по лагранжеву и гамильтонову формализму в обычной классической механике и описываем также квантовую механику. В принципе, эти вопросы изучаются не только на физических, но и на математических факультетах хороших университетов, однако мой опыт обсуждений с коллегами-математиками говорит, что многие из них не знакомы с ними достаточно хорошо.

[1]НКТ — это сокращение от «hyper-Kähler with torsion».

Что в университетах определённо не изучается — это классические и квантовые динамические системы с *грассмановыми* динамическими переменными. Им посвящена вторая часть четвёртой главы.

После этого мы переходим к суперсимметричным системам. В пятой главе мы определяем суперсимметричную систему как систему, где действует алгебра (0.4) (математическое определение), или как систему, где все возбуждённые состояния спектра двукратно вырождены (физическое определение). Мы обсуждаем простейший физический пример такой системы (движение электрона в однородном магнитном поле — задача, решённая Ландау 90 лет назад) и некоторые другие простые примеры.

Математическая структура этих моделей прояснена в седьмой главе, где мы вводим понятия *суперпространства* (для квантово-механических систем правильнее говорить о «супервремени») и одномерных *суперполей* (или «суперпеременных»). В заключение мы определяем одномерное *гармоническое* суперпространство, которое мы используем в дальнейшем для описания многообразий НКТ.

В предыдущей, шестой главе мы описываем формализм континуального интеграла для обычных и суперсимметричных систем и вводим важное понятие *индекса Виттена*.

Главная часть книги — это *Синтез*. Мы возвращаемся к геометрическим структурам, обсуждавшимся в первой части, но описываем теперь известные и не столь хорошо известные новые результаты на языке суперсимметрии. Восьмая глава посвящена комплексу де Рама (мы также касаемся теории Морса, смысл которой очень просто раскрывается на суперсимметричном языке). Глава 9 посвящена комплексу Дольбо. В числе прочего мы даём суперсимметричное доказательство теоремы Ньюландера—Ниренберга и показываем, что комплекс Дольбо можно определить не только для комплексных, но и для некоторых некомплексных чётномерных многообразий, таких как S^4.

В главе 10 мы рассматриваем системы СКМ с *расширенной* суперсимметрией, включающие несколько пар эрмитово-сопряжённых суперзарядов $(Q_j, Q_j^\dagger)$. Эти модели описывают кэлеровы, гиперкэлеровы многообразия, многообразия НКТ и некоторые другие типы многообразий (квазикомплексные, спинорные, биспинорные, бикэлеровы и би-НКТ многообразия), которые не привлекли пока внимания математиков.

В главе 11 мы устанавливаем общую связь между разными типами моделей (и, значит, между разными типами многообразий). В частности, мы показываем, что все суперсимметричные модели, описанные в главах 8–10, могут быть получены из тривиальных плоских невзаимодействующих моделей применением двух операций: (i) преобразования подобия для суперзарядов и (ii) гамильтоновой редукции.

Двенадцатая глава посвящена гиперкэлеровым многообразиям и многообразиям НКТ, описываемым на языке гармонического суперпространства. Мы показываем, что по аналогии с тем, что любая кэлерова метрика может быть получена из кэлерова потенциала, $h_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} \mathcal{K}(z^n, \bar{z}^n)$, произвольная гиперкэлерова метрика может быть выведена из гармонического препотенциала $\mathcal{L}^{+4}$. Аналогично, данные, включающие *два* гармонических препотенциала — $\mathcal{L}^{+3}$ и $\mathcal{L}$, позволяют в конце концов получить[2] метрику НКТ общего вида.

В главе 13 мы обсуждаем суперсимметричные модели, описывающие калибровочные поля на многообразиях. В переводе на математический язык калибровочное поле — это связность главного расслоения. Такое расслоение характеризуется целым топологическим зарядом — классом Чженя. Модели с нецелым классом Чженя (в частности, плоскую модель с нецелым магнитным потоком) можно также рассматривать — их гамильтониан может быть хорошо определён, но такие модели не обладают суперсимметрией.

Последняя, четырнадцатая глава посвящена теореме Атьи—Зингера, которая связывает индекс некоторых эллиптических операторов с топологическими характеристиками многообразий, где эти операторы действуют. Мы показываем, что этот индекс можно интерпретировать как индекс Виттена соответствующих систем СКМ, и вычисляем его в некоторых нетривиальных случаях.

---

[2]Процедура здесь значительно сложнее, чем в кэлеровом случае, где метрика выводится из кэлерова потенциала простым дифференцированием.