Глава 4
Динамические системы с обыкновенными и с грассмановыми переменными

Основная мысль этой книги состоит в том, что для изучения геометрических свойств многообразий чрезвычайно полезно рассмотреть связанную с ними *динамику*. Нас будет в особенности интересовать динамика частиц, движущихся вдоль геодезических траекторий на многообразии. Геодезическая траектория — это линия минимальной длины, соединяющая две данные точки. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2x^M}{ds^2} = -\Gamma^M_{NP}\,\frac{dx^N}{ds}\,\frac{dx^P}{ds}. \tag{4.1}$$

Геометрически, s — это просто параметр, различающий точки на линии. Но можно его также интерпретировать как *время*. Тогда уравнение (4.1) приобретает смысл динамического уравнения, описывающего движение частицы по геодезической.

Различные динамические системы обстоятельно изучались физиками со времён Галилея и Ньютона, и был накоплен огромный опыт, которым мы сможем воспользоваться.

Движение по геодезическим — это, однако, не всё. Чтобы получить действительно сильные и интересные результаты, надо рассмотреть не просто движение по многообразию, но движение по *супермногообразию*, связанному с данным многообразием. Такое супермногообразие параметризуется, помимо обычных координат, также *грассмановыми* антикоммутирующими координатами. Эта глава содержит общие замечания, касающиеся классической и квантовой динамики обыкновенных систем и систем, включающих грассмановы динамические переменные.

§ 4.1. *Классическая механика*

В этом и следующем параграфе мы кратко напомним некоторые факты, хорошо известные из университетского курса классической и квантовой механики. Мы делаем это для тех читателей, которые, будучи чистыми математиками, возможно знают геометрию многообразий, о которой мы говорили в первой части, намного лучше автора, но могут нуждаться в том, чтобы освежить свои знания физики.

Под *динамической системой* мы понимаем систему, описываемую набором обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_j). \tag{4.2}$$

Независимая переменная t — это время[1]. Функции $x_i(t)$ называются *динамическими переменными*. Для системы уравнений (4.2) можно определить задачу Коши: зная начальные условия при $t = 0$, мы можем определить значения $x_i(t)$ в более поздние моменты времени.

Нас будет интересовать только ограниченный класс динамических систем — *гамильтоновы системы*.

Определение 4.1. *Гамильтонова система* есть динамическая система, включающая чётное число $2n$ динамических переменных, которые можно разбить на два класса — *канонические координаты* $q_{i=1,\dots,n}$ и *канонические импульсы* $p_{i=1,\dots,n}$ — таким образом, что динамические уравнения (4.2) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &\equiv \dot{q}_i = \frac{\partial H(p_j, q_j)}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &\equiv \dot{p}_i = -\frac{\partial H(p_j, q_j)}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Функция $H(p_j, q_j)$ называется функцией Гамильтона или *гамильтонианом*.

Набор всех переменных $\{p_i, q_i\}$ называется *фазовым пространством*. Очевидно, что[2]

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \tag{4.4}$$

[1]Математики часто обсуждают другой вид динамических систем, где время *дискретно*. В этом случае вместо уравнений (4.2) можно записать $x_i^{(n+1)} = f_i[x_j^{(n)}]$. *Клеточные автоматы*, включающие знаменитую игру «Жизнь» Конвея и машину Тюринга, принадлежат к этому классу. Но в этой книге дискретные системы изучаться не будут.

[2]Мы по-прежнему подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам, хотя ни q_i, ни p_i не являются векторами в смысле (1.3) и (1.4).

Другими словами, $H(p_j, q_j)$ есть *интеграл движения*: величина, сохраняющая своё значение в течение временной эволюции, описываемой уравнениями (4.3). Физический смысл этой величины — энергия.

Могут быть и другие интегралы движения помимо энергии.

Определение 4.2. Структура[3]

$$\{A, B\}_P = \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{4.5}$$

называется *скобкой Пуассона* двух функций на фазовом пространстве (физики говорят: *наблюдаемых*) — $A(p_i, q_i)$ и $B(p_i, q_i)$.

Теорема 4.1. *Для того чтобы наблюдаемая $f(p_i, q_i)$ являлась интегралом движения, необходимо и достаточно, чтобы скобка Пуассона $\{H, f\}_P$ обращалась в ноль.*

Доказательство. Подставляя гамильтоновы уравнения движения (4.3) в

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i,$$

мы получаем

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}_P. \tag{4.6}$$

□

Уравнение (4.6) описывает временную эволюцию произвольной наблюдаемой.

Скобка Пуассона (4.5) обладает следующими алгебраическими свойствами:

$$\begin{gathered} \{A, B\}_P = -\{B, A\}_P, \quad \{AB, C\}_P = A\{B, C\}_P + B\{A, C\}_P, \\ \{A, \{B, C\}_P\}_P + \{B, \{C, A\}_P\}_P + \{C, \{A, B\}_P\}_P = 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Полагая в последнем тождестве (*тождестве Якоби*) $C(p_i, q_i) = H(p_i, q_i)$, мы выводим важную теорему.

Теорема 4.2. *Если $A(p_i, q_i)$ и $B(p_i, q_i)$ — два интеграла движения, их скобка Пуассона либо тождественно равна нулю, либо, если это не так, также является интегралом движения.*

---

[3] В разных учебниках знак скобки Пуассона определяется по-разному. Мы следуем конвенции курса Ландау [39].

Рассмотрим теперь функцию

$$L(q_i, \dot{q}_i) = p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i), \tag{4.8}$$

где вместо импульсов p_i в правой части следует подставить их выражения через q_i и $\dot{q}_i$, следующие из уравнений Гамильтона[4], $\dot{q}_i = \partial H(p_j, q_j)/\partial p_i$. Функция L называется *лагранжианом*. А преобразование (4.8) называется *преобразованием Лежандра*. Это преобразование, очевидно, действует в обе стороны: можно начать с лагранжиана и вывести гамильтониан.

Для простейшего одномерного гамильтониана

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q) \tag{4.9}$$

мы получаем

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q). \tag{4.10}$$

Теорема 4.3. *Система уравнений Гамильтона* (4.3) *эквивалентна следующей системе* уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциал

$$dL = \dot{q}_i \, dp_i + p_i \, d\dot{q}_i - dH. \tag{4.12}$$

Используя уравнения (4.3), мы получаем

$$dL = p_i \, d\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \, dq_i. \tag{4.13}$$

Отсюда следует[5], что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{4.14}$$

[4]Мы предполагаем, что эта система уравнений невырождена и имеет единственное решение для $p_i(q_j, \dot{q}_j)$.

[5]Отметим тонкость. Частные производные в левых частях уравнений (4.14) берутся, предполагая фиксацию q_i или $\dot{q}_i$, в то время как частные производные $\partial H/\partial q_i$ в правых частях берутся в предположении фиксированных p_i.

Дифференцируя по времени левые соотношения в (4.14), выражающие канонические импульсы через лагранжиан, подставляя вместо $\dot{p}_i$ правые части соотвествующих уравнений Гамильтона и принимая во внимание правые соотношения в (4.14), мы приходим к (4.11). □

Введём теперь *функционал действия*,

$$S[q_i(t), t_1 - t_0] = \int_{t_0}^{t_1} L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]\, dt. \tag{4.15}$$

Тот факт, что он зависит, помимо $q_i(t)$, только от разности $t_1 - t_0$, но не от t_0 и t_1 по отдельности, следует из отсутствия в лагранжиане *явной* временной зависимости. Зафиксируем граничные условия:

$$q_i(t_0) = q_i^{(0)}, \quad q_i(t_1) = q_i^{(1)}, \tag{4.16}$$

где $q_i^{(0,1)}$ — набор констант. Докажем следующую важную теорему.

Теорема 4.4. *Набор функций $q_i(t)$, реализующих экстремум функционала* (4.15) *с граничными условиями* (4.16)*, удовлетворяет уравнениям Лагранжа* (4.11) *и определяет классическую траекторию системы.*

Доказательство. Вариация функционала действия есть

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) + \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) \right] dt. \tag{4.17}$$

Проинтегрируем первый член по частям, принимая во внимание $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. Мы получаем

$$\delta S = -\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \right] \delta q_i(t)\, dt. \tag{4.18}$$

В экстремуме эта вариация должна исчезнуть, и это должно выполняться для любой вариации $\delta q_i(t)$. А это возможно, только если выражение в квадратных скобках обращается в ноль. □

Замечание. Для не слишком дикой невырожденной функции L система уравнений (4.11) с граничными условиями (4.16) имеет единственное решение. Это означает, что функционал действия имеет только один экстремум. Принято выбирать его знак

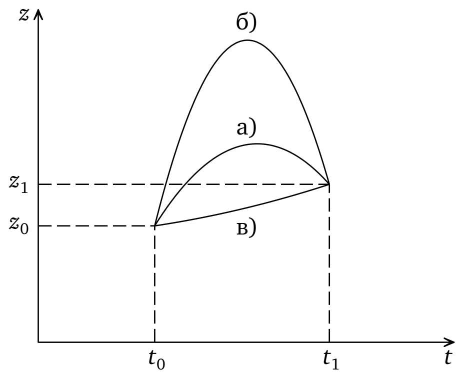

Рис. 4.1. Траектории камня: а) траектория с минимальным действием; б) слишком большая кинетическая энергия; в) слишком маленькая потенциальная энергия

(знак L) так, чтобы действие было *минимальным*. *Принцип наименьшего действия* — один из фундаментальных принципов физики.

Проиллюстрируем этот общий результат на простом примере (см. рис. 4.1). Возьмём лагранжиан

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz \equiv T - U.$$

Он описывает вертикальное движение камня массы m в поле тяжести. Зададимся вопросом: как камень должен поступить, чтобы минимизовать функционал (4.15)? С одной стороны, чтобы интеграл $\int (T-U)dt$ был как можно меньше, камню надо увеличить свою потенциальную энергию $U(z) = mgz$ и забраться повыше. Но принимая во внимание назначенное свидание в точке z_1 в фиксированный момент времени t_1, если забраться слишком высоко, это увеличит скорость камня и даст большой положительный вклад в интеграл (4.15) от члена с кинетической энергией, $T = m\dot{z}^2/2$. Наименьшая кинетическая энергия имеет место для прямолинейной траектории. Фактическая траектория представляет «переговорный компромисс» между этими двумя требованиями.

Последняя тема, которая будет обсуждаться в этом параграфе, — это знаменитая *теорема Нётер* [40]. Она утверждает, что каждой непрерывной симметрии лагранжиана отвечает определённый закон сохранения, определённый интеграл движения. Удобно вначале доказать ослабленную версию этой теоремы и потом её усилить.

Теорема 4.5. *Предположим, что лагранжиан $L(q_i, \dot{q}_i)$ инвариантен относительно инфинитезимального преобразования переменных:*

$$q_i \to q_i + \delta q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, \dot{q}_j), \quad \epsilon \ll 1. \tag{4.19}$$

Тогда нётеровский заряд $Q = (\partial L / \partial \dot{q}_i) f_i$ *есть интеграл движения.*

Доказательство. Вариация лагранжиана δL обращается в ноль, и то же относится к вариации действия δS. Последняя выражается уравнением (4.17). Проведём интегрирование по частям, не пренебрегая на этот раз граничным вкладом. Мы получаем

$$\delta S = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] f_i \, dt + \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i \bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{4.20}$$

Это должно обращаться в ноль при любых $q_i(t)$. В частности — для классических траекторий, удовлетворяющих лагранжевым уравнениям движения. Для таких траекторий обращение в ноль δS означает также обращение в ноль граничного члена в (4.20). Это приводит к равенству $Q(t_1) = Q(t_0)$. Таким образом, $Q(t)$ — действительно интеграл движения. □

Теорема 4.6. *Пусть теперь лагранжиан не полностью инвариантен относительно преобразования* (4.19), *но сдвигается на полную производную по времени,* $\delta L = \epsilon (d/dt) \Lambda(q_i, \dot{q}_i)$. *В этом случае интеграл движения тоже существует и равен*

$$Q(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i - \Lambda. \tag{4.21}$$

Доказательство. Вариация действия (4.20) больше не исчезает, а равна $\epsilon[\Lambda(t_1) - \Lambda(t_0)]$. Для классической траектории мы выводим

$$\Lambda(t_1) - \Lambda(t_0) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i \bigg|_{t_0}^{t_1},$$

откуда следует сохранение величины (4.21). □

Примеры. 1. Рассмотрим вариацию $\delta q_i = \epsilon \dot{q}_i$, отвечающую инфинитезимальному временному сдвигу, $t \to t + \epsilon$. При этом $\delta L = \epsilon \dot{L}$, что есть полная производная и выполняются условия теоремы 4.6. Соответствующий сохраняющийся нётеровский заряд есть просто энергия,

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

2. Рассмотрим лагранжиан

$$L = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - U(x^2 + y^2). \tag{4.22}$$

Он инвариантен относительно поворотов. Инфинитезимально:

$$\delta x = \epsilon y, \quad \delta y = -\epsilon x. \tag{4.23}$$

Сохраняющийся нётеровский заряд,

$$Q = m(\dot{x} y - \dot{y} x) = p_x y - p_y x, \tag{4.24}$$

есть не что иное как момент количества движения J_z (взятый с противоположным знаком).

Чтобы избежать возможных недоумённых вопросов наших читателей-физиков, необходимо сделать следующее замечание.

В большинстве учебников по классической механике (см. например [41]) под теоремой Нётер понимается несколько иное, хотя и связанное утверждение. В условии теоремы требуется *точная* инвариантность лагранжиана относительно преобразований $\delta q_i = \epsilon f_i(q_j, t)$ (нет зависимости от обобщённых скоростей $\dot{q}_j$, но разрешена явная зависимость от времени), дополненных возможным преобразованием времени, $\delta t = \epsilon f_0(q_j, t)$. Такая формулировка вполне достаточна для обычных механических приложений (например, сохранение энергии следует в этом случае из инвариантности лагранжиана относительно сдвига времени, *не связанного* со сдвигом динамических переменных q_j).

Но чтобы применять теорему Нётер к суперсимметричным системам, что мы собираемся делать в последующих главах, нам будет нужна именно теорема 4.6: преобразования суперсимметрии включают зависимость от скоростей и лагранжиан не полностью инвариантен относительно таких преобразований, но сдвигается на полную временную производную.

В суперсимметричных теориях поля преобразования суперсимметрии сдвигают пространственную плотность лагранжиана на градиент $\partial_\mu \Lambda$ некоторой функции. Часто говорится, что такое преобразование оставляет инвариантным интеграл *действия*, но это предполагает, что мы интегрируем по всему пространству-времени и что поля обращаются в ноль на пространственной бесконечности и при $t = \pm\infty$. Действие механической системы, представляющее интеграл с конечными пределами, $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$, может при этом измениться.

Заметим, однако, что хотя действие и может измениться при добавлении полной производной к лагранжиану, динамические уравнения движения остаются неизменными! Интуитивно ясно, почему это так: возможная модификация относится к граничным членам, в то время как уравнения движения определяют поведение системы *внутри* временного интервала (t_1, t_2). Но можно доказать и простую строгую теорему.

Теорема 4.7. *Пусть*

$$L' = L + \dot{\Lambda}(q_i) = L + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\dot{q}_i.$$

Тогда лагранжевы уравнения движения, следующие из L' и L, совпадают.

Доказательство. Запишем уравнения

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{\Lambda}}{\partial q_i}$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\right].$$

Ясно, что сдвиги в лагранжевых уравнениях (4.11), пропорциональные Λ, сокращаются. □

То же верно, если Λ зависит также от скоростей $\dot{q}_i$ или от временных производных $q_i(t)$ более высокого порядка. Надо только иметь в виду, что для лагранжианов, включающих высшие производные (а если Λ зависит от скоростей, то сдвинутый лагранжиан L' зависит от ускорений), уравнения движения модифицируются. Например, для $L'(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i)$ они принимают вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L'}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0. \tag{4.25}$$

Именно *эти* уравнения совпадают в этом случае с уравнениями (4.11) для лагранжиана L.

4.1.1. Алгебра симметрий

Предположим теперь, что в пренебрежении граничными членами действие инвариантно относительно двух различных преобразований,

$$\delta_f q_i = \epsilon_1 f_i(q_j, \dot{q}_j) \quad \text{и} \quad \delta_g q_i = \epsilon_2 g_i(q_j, \dot{q}_j). \tag{4.26}$$

Определение 4.3. Вариация

$$\delta_{[f,g]} q_i = (\delta_f \delta_g - \delta_g \delta_f) q_i$$

называется *скобкой Ли*[6] двух преобразований (4.26).

Рассмотрим вначале случай, когда f_i и g_i не зависят от скоростей. Тогда

$$\delta_{[f,g]} q_i = \epsilon_1 \epsilon_2 \left[f_j \frac{\partial g_i}{\partial q_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right] \equiv \epsilon_1 \epsilon_2 h_i(q_k). \tag{4.27}$$

Если действие инвариантно относительно преобразований (4.26), оно также инвариантно относительно (4.27).

При преобразованиях f и g лагранжиан может сдвигаться на полные производные. Предположим, что это производные функций, которые зависят только от q_i, но не от $\dot{q}_i$:

$$\delta_f L = \epsilon_1 \frac{d}{dt} \Lambda_f(q_i), \quad \delta_g L = \epsilon_1 \frac{d}{dt} \Lambda_g(q_i). \tag{4.28}$$

Тогда

$$\delta_{[f,g]} L = \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{d}{dt} \Lambda_h(q_i), \tag{4.29}$$

где

$$\Lambda_h = f_i \frac{\partial \Lambda_g}{\partial q_i} - g_i \frac{\partial \Lambda_f}{\partial q_i}. \tag{4.30}$$

Рассмотрим теперь нётеровские интегралы движения, отвечающие преобразованиям f, g, h:

$$Q_f = p_i f_i - \Lambda_f, \quad Q_g = p_i g_i - \Lambda_g, \quad Q_{[f,g]} = p_i h_i - \Lambda_h. \tag{4.31}$$

---

[6] Мы определили «физическую» скобку Ли. «Математическая» скобка Ли определяется как коммутатор абстрактных векторных полей.

Теорема 4.8. *Выполняется равенство* $Q_{[f,g]} = \{Q_f, Q_g\}_P$.

Проверяется простым явным вычислением.

Скобка Ли преобразований f и h (и, соответственно, скобка Пуассона $\{Q_f, Q_h\}_P$) могут дать ещё одну симметрию системы (ещё один интеграл движения) и так до тех пор, пока алгебра скобок Ли (скобок Пуассона) не замкнётся.

Простейшая нетривиальная алгебра включает три симметрии. Рассмотрим лагранжиан, зависящий от трёх координат x, y, z и инвариантный относительно вращений вокруг первой и второй оси:

$$R_1\colon \begin{cases} \delta_1 y = \epsilon_1 z, \\ \delta_1 z = -\epsilon_1 y; \end{cases} \qquad R_2\colon \begin{cases} \delta_2 z = \epsilon_2 x, \\ \delta_2 x = -\epsilon_2 z. \end{cases} \tag{4.32}$$

Скобка Ли $[R_1, R_2]$ даёт, очевидно, вращение R_3 относительно третьей оси. Интегралы Нётер суть

$$L_1 = p_y z - p_z y, \quad L_2 = p_z x - p_x z, \quad L_3 = p_x y - p_y x, \tag{4.33}$$

и выполняется алгебра $so(3)$: $\{L_i, L_j\}_P = \varepsilon_{ijk} L_k$.

Возникает вопрос: что происходит в случае, когда f_i, g_i, Λ_f, Λ_g зависят не только от q_j, но также от $\dot{q}_j$. Как мы отмечали, таковы преобразования суперсимметрии, представляющие для нас главный интерес в этой книге. Можно предположить, что теорема 4.8 остаётся справедливой и в этом более общем случае.

Аргумент следующий. Теорема Нётер гарантирует существование интегралов движения Q_f и Q_g. Тогда теорема 4.1 говорит нам, что $\{H, Q_f\}_P = \{H, Q_g\}_P = 0$. Но тогда $\{H, \{Q_f, Q_g\}_P\}_P$ также обращается в ноль — это следствие тождества Якоби. Таким образом, $Q_h = \{Q_f, Q_g\}_P$ есть также интеграл движения. Единственное, что остаётся недоказанным — это тот факт, что Q_h есть нётеровский заряд, отвечающий скобке Ли $[f, g]$.

Встретившись с подобной трудностью, автор хочет вспомнить, что он не математик, ценящий превыше всего строгие доказательства, а полагающийся прежде всего на интуицию физик, задать риторический вопрос: «Чем ещё Q_h может быть?» и закрыть обсуждение. Конечно, строгое доказательство не помешало бы, но я не смог ни найти его в литературе, ни сконструировать сам. Одна из трудностей доказательства состоит в том, что в общем случае скобка Ли функций f и g зависит не только от скоростей, но и от ускорений. Вероятно, при доказательстве недоказанной здесь теоремы следует наложить условие, что такая зависимость в $[f, g]$ отсутствует.

Следует, однако, успокоить читателя в том, что касается преобразований суперсимметрии, представляющих для нас главный интерес. Во всех случаях, рассматриваемых в книге, свойство $Q_{[f,g]} = \{Q_f, Q_g\}_P$ выполняется. В этом можно убедиться явно.

§ 4.2. *Стандартная квантовая механика*

Мы не будем подробно обсуждать физические аспекты квантовой механики, сконцентрировавшись на её математической структуре.

В квантовом мире классические траектории смысла не имеют, и главный описывающий систему объект — это её *волновая функция* $\Psi(q_i)$. Чтобы найти волновые функции $\Psi_n(q_i)$ стационарных состояний, надо решить спектральную задачу,

$$\hat{H}\,\Psi_n(q_i) = E_n\,\Psi_n(q_i), \tag{4.34}$$

с соответствующими граничными условиями. Квантовый гамильтониан $\hat{H}$ есть эллиптический дифференциальный оператор, действующий на гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2$, включающем квадратично интегрируемые функции $\Psi(q_i)$. Помимо квадратичной интегрируемости, мы требуем существование скалярного произведения:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \int_Q d\mu\,\overline{\Psi(q_i)}\,\Phi(q_i), \tag{4.35}$$

где $d\mu$ — мера на пространстве Q, где живут динамические переменные q_i.

Определение 4.4. Интеграл

$$\int_Q d\mu\,\overline{\Psi(q_i)}\,\hat{A}\Phi(q_i) \tag{4.36}$$

мы будем называть *матричным элементом* оператора $\hat{A}$ между состояниями Ψ и Φ и обозначать через $\langle\Psi|\hat{A}|\Phi\rangle$.

Мы использовали здесь дираковское обозначение $|\varphi\rangle$ для элементов нашего гильбертова пространства (*кет-вектора*) и обозначение $\langle\varphi|$ для дуальных *бра-векторов*.

Фундаментальное уравнение квантовой механики не есть (4.34), а зависящее от времени уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(q_i,t)}{\partial t}=\hat{H}\Psi(q_i,t), \tag{4.37}$$

$\hbar$ — постоянная Планка. Уравнение (4.34) выводится из (4.37), если подставить в него стационарный анзац

$$\Psi_n(q_i,t)=\Psi_n(q_i)\exp\left\{-\frac{iE_nt}{\hbar}\right\}. \tag{4.38}$$

Квантовый гамильтониан получается из классического гамильтониана $H(p_i,q_i)$ заменой классических импульсов p_i на операторы $\hat{p}_i=-i\hbar\,\partial/\partial q_i$. Так, квантовая версия классического гамильтониана (4.9) — это

$$\hat{H}(\hat{p},q)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}+U(q). \tag{4.39}$$

Для более сложных гамильтонианов, которые мы встретим позже в нашей книге, переход от классического гамильтониана к квантовому не столь тривиален. Не сразу ясно, например, какому квантовому гамильтониану соответствует классический гамильтониан $H^{\mathrm{cl}}=p^2q^2$. Это

$$\hat{H}=\hat{p}^2q^2,\quad \hat{H}=q^2\hat{p}^2 \tag{4.40}$$

или что-то другое? (Два выражения в (4.40) не совпадают, поскольку $\hat{p}$ и q не коммутируют, $[\hat{p},q]=-i\hbar$.)

Проблема выбора между разными квантовыми операторами, которые соответствуют одному и тому же классическому выражению, называется проблемой *неоднозначности упорядочения*. Чтобы разрешить эту неоднозначность, необходимо наложить на операторы дополнительные требования. Одно из таких требований весьма естественно: квантовый гамильтониан должен быть эрмитовым, иначе энергии собственных состояний — решений уравнения Шрёдингера (4.34) — становятся комплексными. Это недопустимо с точки зрения физики и приводит также к трудностям в математическом описании. Таким образом, упорядочения, выбранные в (4.40) — это не то, что нам необходимо. Требование эрмитовости не фиксирует, однако, упорядочение однозначно: эрмитовы операторы $\hat{H} = \hat{p}q^2\hat{p}$ и $\hat{H} = q\hat{p}^2 q$ не совпадают.

Мы будем подробно обсуждать неоднозначности упорядочения позже, в главах 5, 6, 8, 9, но мы хотим отметить уже сейчас, что среди различных рецептов упорядочения есть один выделенный — *вейлевский рецепт*. Мы дадим здесь определение, а смысл и преимущества вейлевской процедуры будут прояснены позже.

Определение 4.5. Пусть дана наблюдаемая $A(p_i, q_i)$. Представим её как интеграл Фурье,

$$A(p_i, q_i) = \int \prod_i d\alpha_i \, d\beta_i \, h(\alpha_i, \beta_i) e^{i(\alpha_i p_i + \beta_i q_i)}. \tag{4.41}$$

Тогда оператор

$$\hat{A}(\hat{p}_i, q_i) = \int \prod_i d\alpha_i \, d\beta_i \, h(\alpha_i, \beta_i) e^{i(\alpha_i \hat{p}_i + \beta_i q_i)} \tag{4.42}$$

называется *вейлевски упорядоченным* оператором, соответствующим классической функции $A(p_i, q_i)$. Функция $A(p_i, q_i)$ называется *вейлевским символом* оператора $\hat{A}$.

Для мономов типа p^2q^2 этот рецепт даёт симметричное упорядочение:

$$p^2q^2 \to \frac{1}{6}(\hat{p}^2q^2 + q^2\hat{p}^2 + \hat{p}q^2\hat{p} + q\hat{p}^2q + \hat{p}q\hat{p}q + q\hat{p}q\hat{p}).$$

Это следует из того простого факта, что каждый член разложения экспоненты в (4.42) включает подобные симметричные произведения.

Чтобы найти вейлевский символ произвольного полиномиального оператора, нужно вначале представить последний как сумму симметричных комбинаций, используя канонические коммутаторы $[\hat{p}_j, q_k] = -i\hbar\delta_{jk}$. Например, вейлевский символ оператора $\hat{p}q$ есть $pq - i\hbar/2$, а вейлевский символ оператора $q\hat{p}$ есть $pq + i\hbar/2$.

Отметим, что вейлевский символ произведения двух операторов не совпадает с произведением их вейлевских символов.

Вместо этого имеем

$$(\hat{A}\hat{B})_W = \exp\left[-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial Q_i} - \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial q_i}\right)\right] A_W(p_i, q_i) B_W(P_i, Q_i)\Big|_{\substack{p=P\\ q=Q}}. \tag{4.43}$$

(так называемое *произведение Груневолда—Мояля* [42]).

Отсюда вейлевский символ коммутатора двух операторов есть

$$[\hat{A}, \hat{B}]_W = -2i \sin\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial Q_i} - \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial q_i}\right)\right] A_W(p_i, q_i) B_W(P_i, Q_i)\Big|_{\substack{p=P\\ q=Q}} = \\ \stackrel{\text{def}}{=} -i\hbar\{A_W, B_W\}_{GM}. \tag{4.44}$$

Скобка Груневолда—Мояля $\{A, B\}_{GM}$ сводится к скобке Пуассона (4.5) в классическом пределе $\hbar \to 0$. Для большинства простых операторов, встречающихся в физических приложениях, члены высших порядков по $\hbar$ в (4.44) исчезают, так что скобка Пуассона переходит при квантовании в коммутатор.

Из последнего утверждения и теоремы 4.1 выводим важное следствие: квантовый оператор $\hat{A}$, отвечающий классическому интегралу движения $A(p_i, q_i)$, коммутирует с квантовым гамильтонианом[7], $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$.

Последнее замечание этого параграфа состоит в следующем. Когда математик пишет уравнение (4.34), он предполагает, что спектр точечен (*дискретен* на физическом языке) и что все собственные состояния Ψ_n нормируемы. Физики, однако, часто обсуждают задачи, где спектр непрерывен. Можно, например, взять гамильтониан (4.39) с нулевой потенциальной энергией $U(q)$, который описывает свободное движение. В этом случае собственные функции представляют плоские волны $\sim e^{ipq}$, которые не нормируемы. Чтобы придать этой задаче математический смысл, надо провести *регуляризацию* — ввести параметр, который модифицирует задачу так, что спектр становится дискретным, и

[7]Точное утверждение такое: если $A(p_i, q_i)$ интеграл движения, так что $\{H, A\}_P = 0$, *всегда можно указать способ упорядочения* операторов $\hat{H}$ и $\hat{A}$, при котором $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$. Я не могу доказать это как строгую теорему, но это верно во всех известных мне случаях. В применении к суперсимметрии см. работу [43] и обсуждение на с. 139.

исследовать потом предел, в котором регуляризация снимается. Для свободного гамильтониана $-\partial^2/\partial q^2$ удобно «сколотить», а потом разобрать *конечный ящик* — позволить частице двигаться только в конечном интервале $|q|<L$, наложив граничные условия $\Psi(-L)=\Psi(L)$, и устремить потом L к бесконечности.

В нашей книге мы будем в основном изучать компактные многообразия. В соответствующей динамической системе движение финитно и спектр дискретен. Если же многообразие некомпактно (как, например, многообразия Taub-NUT и Эгучи—Хансона, изучавшиеся в главе 3), мы всегда будем иметь в виду такую регуляризационную процедуру.

§ 4.3. *Грассмановы переменные*

Стандартное фазовое пространство, обсуждавшееся в предыдущем параграфе, параметризуется координатами и импульсами, являющимися обычными вещественными числами. Можно, однако, обобщить это понятие и предположить, что, помимо обыкновенных коммутирующих координат и импульсов, фазовое пространство содержит также антикоммутирующие *грассмановы* переменные. Грассмановы переменные были введены в физику более полувека назад Феликсом Березиным [44]. Они необходимы для корректного описания физических фермионных полей (электронно-позитронного поля, поля нейтрино и других). В нашей книге мы не будем касаться этого полевого аспекта, но грассмановы динамические переменные можно ввести также для классических и квантовых *механических* систем. Об этом мы и будем говорить в двух заключительных параграфах этой главы.

Прежде всего, введём математические понятия грассмановых чисел и грассмановой алгебры. Основные определения следующие:

• Пусть $\{a_i\}$ — набор n антикоммутирующих переменных: $a_i a_j + a_j a_i = 0$. Элементы грассмановой алгебры являются функциями $f(a_i) = c_0 + c_i a_i + c_{ij} a_i a_j + \ldots$, где коэффициенты $c_0, c_i, \ldots$ — обыкновенные (действительные или комплексные) числа. Ряды обрываются на $(n+1)$-м члене, $(n+2)$-й член содержал бы квадрат какой-нибудь антикоммутирующей переменной (скажем, a_1^2), что есть ноль. Заметим, что хотя грассманово число типа a_1a_2 коммутирует с остальными, это всё же не обыкновенное число. Оно является *чётным элементом* грассмановой алгебры. Имеются, конечно, также нечётные антикоммутирующие элементы. Базисные переменные $\{a_i\}$ называются *генераторами* алгебры.

• Грассмановы числа можно складывать,

$$f(a_i) + g(a_i) = c_0 + d_0 + (c_i + d_i)a_i + \ldots,$$

и перемножать. Например,

$$(1 + a_1 + a_2)(1 + a_1 - a_2) = 1 + 2a_1 - 2a_1a_2$$

(использовалось свойство антикоммутации a_i).

• Можно также дифференцировать функции $f(a_i)$ по грассмановым переменным: $\partial/\partial a_i(1) \overset{\text{def}}{=} 0$, $\partial/\partial a_i(a_j) \overset{\text{def}}{=} \delta_{ij}$. Производная суммы есть сумма производных, а производная произведения двух функций удовлетворяет правилу Лейбница с той модификацией, что оператор $\partial/\partial a_i$ следует понимать как нечётную грассманову переменную. Это иногда приводит к смене знака, когда мы «тянем» $\partial/\partial a_i$ направо, чтобы подвести к соответствующей базисной переменной, которую этот оператор уничтожает. Например, $\partial/\partial a_1(a_2a_3a_1) = a_2a_3$, но $\partial/\partial a_1(a_2a_1a_3) = -a_2a_3$.

• По грассмановым переменным можно также интегрировать. Это, конечно, не обычный интеграл, его нельзя получить как предел интегральных сумм, нельзя посчитать численно в «конечных пределах» (это не имеет смысла для грассмановых чисел) методом Симпсона и т. д. Можно, однако, взять интеграл по грассмановой переменной «по всей области» (если угодно, «от $-\infty$ до ∞», хотя это тоже не имеет смысла).

Смысл имеет определение, предложенное Березиным:

$$\int da_j\, f(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial a_j} f(a). \tag{4.45}$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\int da_i\, a_j = \delta_{ij}. \tag{4.46}$$

Очевидное (и важное для дальнейшего) следствие определения (4.45) есть

$$\int da_j \, \frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \tag{4.47}$$

(по j здесь нет суммирования).

• Если грассманова алгебра включает чётное число $2n$ генераторов, то их можно разделить на две равные части,

$$\{a_{j=1,\dots,2n}\} \to \{a_{j=1,\dots,n}, \bar{a}_{j=1,\dots,n}\},$$

и ввести оператор инволюции, $a_j \longleftrightarrow \bar{a}_j$, который мы будем отождествлять с комплексным сопряжением. Мы, в частности, будем полагать, что одновременно с инволюцией происходит комплексное сопряжение обычных чисел:

$$f(a) = c_0 + c_i a_i + d_i \bar{a}_i + \dots \ \to \ \overline{f(a)} = \bar{c}_0 + \bar{c}_i \bar{a}_i + \bar{d}_i a_i + \dots \tag{4.48}$$

Удобно также предположить, что для любых двух элементов f, g грассмановой алгебры выполняется такое же свойство

$$\overline{(fg)} = \bar{g}\bar{f}, \tag{4.49}$$

как для эрмитова сопряжения (а в уравнении (4.48) порядок факторов, конечно, роли не играет).

Отметим важное тождество:

$$\int \prod_{i=1}^{n} da_i \, d\bar{a}_i \, \exp\{M_{jk} \bar{a}_j a_k\} = \det(M). \tag{4.50}$$

§ 4.4. *Грассманова динамика*

Тот факт, что грассмановы переменные можно трактовать так же, как обычные переменные, что можно изучать их классическую динамику и описывать её, используя методы аналитической механики, очерченные в § 4.1, и изучать также квантовую динамику, решая соответствующее уравнение Шрёдингера, был осознан сравнительно недавно [45, 46], уже *после* открытия суперсимметрии. Но в нашей книге мы не будем следовать исторической последовательности событий. Мы начнём с того, что обсудим несуперсимметричные динамические грассмановы системы, а суперсимметрия будет введена в следующей главе.

В качестве простейшего примера рассмотрим классический лагранжиан

$$L = -i\dot{\psi}\bar{\psi} + \omega\bar{\psi}\psi, \tag{4.51}$$

где ψ и $\bar{\psi}$ — комплексно сопряжённые антикоммутирующие переменные,

$$(\psi)^2 = (\bar{\psi})^2 = 0, \quad \psi\bar{\psi} + \bar{\psi}\psi = 0, \tag{4.52}$$

а ω — вещественная константа. Этот лагранжиан вещественен в том смысле, что при комплексном сопряжении он переходит в себя с добавкой, представляющей полную временную производную. Вещественность второго члена в лагранжиане (4.51) сразу следует из (4.49), а сопряжение первого члена даст

$$i\psi\dot{\bar{\psi}} = i\frac{d(\psi\bar{\psi})}{dt} - i\dot{\psi}\bar{\psi}.$$

Как мы отмечали, добавка полной производной не меняет уравнений движения. Это верно и для обычных лагранжианов, и для лагранжианов, включающих грассмановы переменные.

Уравнения Лагранжа записываются так же, как и в обычном случае:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}} = 0. \tag{4.53}$$

Это даст два комплексно сопряжённых уравнения:

$$i\dot{\psi} + \omega\psi = 0, \quad i\dot{\bar{\psi}} - \omega\bar{\psi} = 0. \tag{4.54}$$

Переменные ψ и $\bar{\psi}$ «параметризуют» (что бы это слово в данном случае ни значило) фазовое пространство.

Лагранжиан, записанный в виде (4.51), включает временную производную ψ, но не производную $\bar{\psi}$. Естественно в таком случае назвать ψ грассмановой координатой. Тогда канонический импульс есть $\Pi_\psi = \partial L/\partial\dot{\psi} = -i\bar{\psi}$. Классический гамильтониан получается из (4.51) преобразованием Лежандра[8],

$$H = \dot{\psi}\Pi_\psi - L = \omega\psi\bar{\psi}. \tag{4.55}$$

[8]Читатель-физик наверняка обратил внимание на сходство гамильтониана (4.55) и выражения $H = \omega a\bar{a}$ для гамильтониана обыкновенного гармонического осциллятора, выраженного через голоморфные переменные. Это сходство не случайно. Фактически, система, которую мы здесь изучаем, и есть осциллятор, только *грассманов*.

Гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\dot{\Pi}_\psi \tag{4.56}$$

плюс комплексно сопряжённое. Они совпадают с (4.54).

Скобка Пуассона двух «наблюдаемых» $f(\psi, \bar{\psi})$ и $g(\psi, \bar{\psi})$ определяется как

$$\{f, g\}_P = -i\left(\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\bar{\Psi}} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{\psi}\partial\Psi}\right) f(\psi, \bar{\psi})\, g(\Psi, \bar{\Psi})\Big|_{\psi=\Psi,\, \bar{\psi}=\bar{\Psi}}. \tag{4.57}$$

В частности, мы выводим

$$\begin{aligned} \{\psi, \bar{\psi}\}_P &= \{\bar{\psi}, \psi\}_P = i, \\ \{\psi\bar{\psi}, \psi\}_P &= -\{\psi, \psi\bar{\psi}\}_P = i\psi, \\ \{\psi\bar{\psi}, \bar{\psi}\}_P &= -\{\bar{\psi}, \psi\bar{\psi}\}_P = -i\bar{\psi}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Общее выражение для скобки Пуассона в фазовом пространстве, включающем несколько вещественных коммутирующих переменных (q_j, p_j) и несколько комплексных антикоммутирующих переменных $(\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \{f, g\}_P = \Bigg[\frac{\partial^2}{\partial p_j \partial Q_j} - \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial P_j} - i\left(\frac{\partial^2}{\partial\psi_\alpha\partial\bar{\psi}_\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{\psi}_\alpha\partial\psi_\alpha}\right)\Bigg] \\ f(p, q;\ \psi, \bar{\psi})\, g(P, Q;\ \Psi, \bar{\Psi})\Big|_{p=P,\, q=Q,\, \psi=\Psi,\, \bar{\psi}=\bar{\Psi}}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

С таким определением временная эволюция произвольной функции $A(p_j, q_j, \psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$ на фазовом пространстве определяется, как и прежде, уравнением (4.6). Если скобка Пуассона $\{H, A\}_P$ обращается в ноль, $A(p_j, q_j, \psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$ есть интеграл движения.

Мы можем сделать теперь несколько замечаний.

- Скобка Пуассона (4.59) удовлетворяет обобщённому тождеству Якоби, аналогичному тождеству (4.7), но со знаками, зависящими от чётности A, B и C. По-прежнему справедлива теорема 4.2.

- Если по крайней мере одна из функций f, g есть чётный элемент грассмановой алгебры, построенной на генераторах ψ_α, $\bar{\psi}_\alpha$, выражение (4.59) антисимметрично относительно перестановки $f \leftrightarrow g$. При переходе от классической к квантовой механике, скобка Пуассона [более точно — грассманово обобщение (5.54) скобки Груневолда—Мояля (4.44), но это уточнение релевантно только для достаточно сложных функций f, g] переходит тогда в коммутатор двух соответствующих операторов[9],

$$\{f, g\}_P \to i[\hat{f}, \hat{g}]. \tag{4.60}$$

• Если f и g нечётны, выражение (4.59) симметрично относительно перестановки $f \longleftrightarrow g$ и переходит при квантовании в *антикоммутатор*[10]:

$$\{f, g\}_P \to i\{\hat{f}, \hat{g}\}. \tag{4.61}$$

В частности, мы получаем

$$\{\hat{\psi}_\alpha, \hat{\bar{\psi}}_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta\} = 0, \quad \{\hat{\bar{\psi}}_\alpha, \hat{\bar{\psi}}_\beta\} = 0. \tag{4.62}$$

Нетривиальный антикоммутатор $\{\hat{\psi}_\alpha, \hat{\bar{\psi}}_\beta\}$ означает, что квантовые операторы, отвечающие классическим грассмановым переменным, удовлетворяют *алгебре Клиффорда*: «Грассман» становится «Клиффордом» после квантования.

В простой модели (4.51), (4.55) единственный нетривиальный антикоммутатор — это $\{\hat{\bar{\psi}}, \hat{\psi}\} = 1$. Естественное представление такой квантовой алгебры есть $\hat{\psi} = \psi$ и $\hat{\bar{\psi}} = \partial/\partial\psi$. Оператор $\hat{\Pi}_\psi = -i\partial/\partial\psi$ играет роль канонического квантового импульса, сопряжённого координате ψ.

Квантовый гамильтониан, соответствующий классическому гамильтониану (4.55) имеет вид

$$\hat{H} = \omega\psi \frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{4.63}$$

Гильбертово пространство, где он действует, элементарно. Оно включает волновые функции $\Psi(\psi)$ вида

$$\Psi(\psi) = b + a\psi. \tag{4.64}$$

Члены высшего порядка в разложении по ψ отсутствуют, ввиду нильпотентности, $\psi^2 = 0$. Гамильтониан (4.63) имеет всего две

---

[9]Мы положили здесь $\hbar = 1$ и будем в дальнейшем в основном придерживаться этой конвенции.

[10]Вот почему грассмановы переменные так интересны физикам. Хорошо известно из старых работ Фирца и Паули [47], что фермионные полевые операторы антикоммутируют.

собственных функции:

$$\begin{aligned} &\Psi(\psi) = 1 \quad \text{с собственным значением } E = 0, \\ &\Psi(\psi) = \psi \quad \text{с собственным значением } E = \omega. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Таким образом, наш грассманов осциллятор намного проще обыкновенного гармонического осциллятора: вместо бесконечной башни эквидистантных уровней его спектр включает всего два состояния.

Гамильтониан (4.63) допускает простое матричное представление. Вместо волновых функций (4.64), зависящих от голоморфной грассмановой переменной ψ, можно рассмотреть двухкомпонентные векторы[11]

$$\Psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

Тогда операторы $\hat{\psi}$, $\hat{\bar{\psi}}$ и гамильтониан $\hat{H}$ представляются матрицами,

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_+, \quad \hat{\bar{\psi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_-, \quad \hat{H} = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \omega \frac{1 + \sigma_3}{2}. \tag{4.67}$$

Матричные гамильтонианы известны физикам. Такой гамильтониан описывает, например, движение электрона в магнитном поле (см. следующую главу), но матричное представление неудобно для описывания систем, включающих много обычных и грассмановых динамических переменных. В более удобном грассмановом описании гильбертово пространство таких систем включает волновые функции

$$\Psi(q_j, \psi_\alpha) = \Psi^{(0)}(q_j) + \Psi^{(1)}_\alpha(q_j)\psi_\alpha + \ldots \tag{4.68}$$

Высший член в этом разложении включает произведение всех грассмановых переменных ψ_α. В менее удобном и редко используемом матричном описании волновые функции представляли бы тензорные произведения большого числа спиноров.

[11]Физики предпочитают называть объекты (4.66) *спинорами*. На это есть определённые причины, но фактически, если мы ограничиваемся рассмотрением квантовой системы (4.63), они не преобразуются при вращениях в каком-либо пространстве и не являются в этом смысле ни векторами, ни спинорами. Это просто столбцы.