

Глава 6

Группы и алгебры

В предыдущей части мы обсуждали различные, простые и сложные теории поля, но не определили пока достаточно строго, что такое теория поля. Любая механическая или полевая система характеризуется своим лагранжианом, из которого выводятся все её свойства. Мы пока не писали лагранжианов: чтобы научиться это делать, надо вспомнить методы теоретической механики; мы сделаем это в главе 7. Но нам надо также лучше понять принципы построения таких лагранжианов — как установить, какой из различных возможных кандидатов лучше описывает природу. И основной такой принцип — это принцип *симметрии*.

Область математики, которая позволяет разбираться в вопросах симметрии, называется *теорией групп*. И ей главным образом посвящена данная глава. В конце главы мы обсудим также математическое понятие *грассмановой алгебры*, необходимое для адекватного описания фермионных полей.

6.1. Скаляры. Векторы. Тензоры

Но прежде чем перейти к описанию новых для читателя математических методов, мы вспомним основы векторной и тензорной алгебры, с которыми читатель, вероятно, уже знаком.

6.1.1. Евклидово пространство

Рассмотрим n -мерное евклидово пространство. В нём можно выбрать различные декартовы системы координат. Все они связаны ортогональными преобразованиями:

$$x'_i = \sum_{j=1}^n O_{ij} x_j. \quad (6.1)$$

Ортогональная матрица O удовлетворяет условию

$$OO^T = \mathbb{1} \quad (6.2)$$

(T означает транспонирование и $\mathbb{1}$ есть единичная матрица). Из формулы (6.2) следует, что $\det O = \pm 1$. Если $\det O = 1$, мы имеем дело с *соб-*

ственным вращением. Если $\det O = -1$, это несобственное вращение — комбинация собственного вращения и зеркального отражения.

Есть много интересных величин, которые не зависят от выбора координат: геометрические величины — расстояния и углы — и физические величины, такие как масса и электрический заряд. Такие величины называются *скалярами*. Есть также *псевдоскаляры* [к ним относится спиральность (5.23)]. Псевдоскаляры инвариантны относительно собственных вращений, но меняют знак при зеркальном отражении.

Имеется также много разных векторных физических величин. Вектор — это не просто набор компонент. При переходе в другую координатную систему компоненты вектора преобразуются так же, как координаты:

$$V'_i = \sum_{j=1}^n O_{ij} V_j. \quad (6.3)$$

Более точно, закон преобразований (6.3) выполняется для обычных полярных векторов (таких как скорость). А *аксиальные* векторы (угловой момент или магнитное поле) преобразуются как

$$A'_i = (\det O) \sum_{j=1}^n O_{ij} A_j, \quad (6.4)$$

с дополнительным фактором -1 при несобственных вращениях.

Встречаются также тензоры, объекты с несколькими индексами. Наиболее известный физический пример — это тензор момента инерции, симметричный тензор ранга 2, $I_{ij} = I_{ji}$. При вращениях он преобразуется как

$$I'_{ij} = \sum_{k,l=1}^n O_{ik} O_{jl} I_{kl}. \quad (6.5)$$

Более сложный пример — тензор упругости, связывающий упругие деформации и напряжения. Он имеет ранг 4 (несёт 4 индекса).

Закон преобразований тензора ранга r есть

$$I'_{i_1 \dots i_r} = \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^n O_{i_1 k_1} \dots O_{i_r k_r} I_{k_1 \dots k_r}. \quad (6.6)$$

В выписанных выше законах преобразований фигурировали суммы по индексам и стоял знак суммы. Но больше мы его писать в таких случаях не будем. Не желая лишний раз стучать по клавиатуре и экономя также бумагу, мы будем во всей книге следовать *соглашению Эйнштейна*: если имя индекса в некотором тензорном выражении повторено дважды, по этому индексу следует просуммировать. Уравнение (6.3) записывается тогда как $V'_i = O_{ij} V_j$.

Можно складывать тензоры одинакового ранга и можно перемножать тензоры. В последнем случае можно сохранить все индексы перемножаемых тензоров, а можно «потерять» индексы, проведя свёртку по одной или нескольким их парам. Например, из тензора A_{ijk} ранга 3 и тензора B_{mnlp} ранга 4, можно соорудить

$$C_{imn} = A_{ijk}B_{mnjk}. \quad (6.7)$$

Простое упражнение — показать, что если A и B — тензоры [т. е. если они преобразуются при вращениях согласно (6.6)], то C также тензор. При доказательстве надо использовать условие ортогональности (6.2).

Имеются два особых тензора.

1) Тензор *Кронекера*, единственные ненулевые компоненты которого суть $\delta_{11} = \dots = \delta_{nn} = 1$.

2) Полностью антисимметричный тензор $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$, который определяется требованием антисимметрии (он меняет знак при перестановке любой пары индексов) и нормировкой $\varepsilon_{12 \dots n} = 1$.

Нетрудно показать, что эти тензоры *инвариантны*, т. е. не меняют при вращении свой вид. Отметим полезные трёхмерные соотношения

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \end{vmatrix}, \quad (6.8)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm},$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = 2\delta_{im}, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

В этих обозначениях скалярное и векторное произведения векторов выражаются как $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i$, $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$. Докажите в качестве упражнения соотношение

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

6.1.2. Пространство Минковского

Перейдём теперь в $(3 + 1)$ -мерное пространство Минковского. Разные инерциальные системы отсчёта связаны преобразованиями Лоренца,

$$x'^{\mu} = O^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (6.9)$$

где $x^{\mu} = (t, \mathbf{x})$ и O^{μ}_{ν} — матрица преобразования Лоренца, удовлетворяющая условию

$$\eta_{\mu\rho} O^{\mu}_{\nu} O^{\rho}_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma}, \quad (6.10)$$

где $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрика плоского пространства Минковского. Можно убедиться, что конкретное преобразование (4.3) — лоренцев буст со скоростью v вдоль оси x — представимо как

$$O = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & -\text{sh } \psi & 0 & 0 \\ -\text{sh } \psi & \text{ch } \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

с некоторым ψ и действительно удовлетворяет условию (6.10).

Роль длины вектора $l^2 = x_i x_i$, инвариантной относительно обыкновенных евклидовых вращений, играет теперь интервал

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - \mathbf{x}^2, \quad (6.12)$$

инвариантный относительно (6.9).

Как вы заметили, мы пишем теперь индексы на двух уровнях — сверху и снизу. Таким образом мы различаем *контравариантные* и *ковариантные* индексы. Контравариантный вектор [например, 4-импульс $p^\mu = (E, \mathbf{p})$] несёт верхний индекс и преобразуется по Лоренцу так же, как x^μ : $p'^\mu = O^\mu_\nu p^\nu$. А ковариантные векторы (векторный потенциал A_μ или оператор градиента ∂_μ) преобразуются как $A'_\mu = O^{\nu}_\mu A_\nu$.

Тензор общего вида в пространстве Минковского несёт r контравариантных и q ковариантных индексов и преобразуется как

$$\left(T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_r} \right)' = O^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots O^{\mu_r}_{\alpha_r} O^{\beta_1}_{\nu_1} \dots O^{\beta_q}_{\nu_q} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}. \quad (6.13)$$

С каждым контравариантным вектором связан инвариант $\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ («длина Минковского»)¹. Каждому ковариантному вектору можно поставить в соответствие аналогичный инвариант $\eta^{\mu\nu} V_\mu V_\nu$, где $\eta^{\mu\nu}$ есть обратный метрический тензор Минковского, $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$. Компоненты $\eta^{\mu\nu}$ совпадают с компонентами $\eta_{\mu\nu}$.

Для любого контравариантного вектора V^μ вектор $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$ ковариантен. И наоборот, можно поднять индекс, умножив ковариантный вектор на обратный метрический тензор, $V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$. В евклидовом пространстве, где $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{ik}$, V^i и V_i , очевидно, совпадают.

Различение ко- и контравариантных индексов совершенно необходимо в кривом пространстве-времени — в общей теории относительности, о которой мы будем говорить в главе 15. В плоском

¹ Например, для 4-импульса p^μ это просто масса частицы, $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2$.

пространстве Минковского оно не столь важно. Однако неразличение этих индексов может в некоторых случаях привести к путанице и в плоском случае, и мы будем путаницу избегать и индексы различать. В частности, мы аккуратно расставили по местам ко- и контравариантные индексы в уравнении (5.3) предыдущей главы. С учётом сказанного уравнение КФГ (4.28) может быть выражено в естественных единицах как $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = 0$.

6.2. Конечные группы

Формальное определение группы следующее.

Группа есть множество элементов G , в котором задана бинарная операция (назовём её умножением) «Бинарная операция» есть по сути дела отображение упорядоченных пар (a, b) элементов G на элементы $c \in G$. Назовём c произведением a и b и введём обозначение

$$c = ab. \quad (6.14)$$

Выполняются следующие свойства.

1) Имеется такой выделенный элемент $e \in G$, называемый *единичным* элементом, что для любого $a \in G$ выполняется равенство

$$ae = ea = a. \quad (6.15)$$

2) Для каждого элемента a имеется *обратный* элемент a^{-1} , такой что

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e \quad (6.16)$$

(если $a = e$, то a и a^{-1} совпадают).

3) Умножение ассоциативно:

$$(ab)c = a(bc). \quad (6.17)$$

Простейшая нетривиальная группа (называемая Z_2) содержит всего два элемента: единичный элемент e и $a = a^{-1}$. Действует следующая таблица умножения:

Таблица 3. Таблица умножения для группы Z_2

	e	a
e	e	a
a	a	e

Таблица симметрична, что означает, что группа коммутативна¹. Арифметическая реализация этой абстрактной группы состоит из чисел $e = 1$, $a = -1$. Но возможны и другие интерпретации. Например, можно проассоциировать элементы группы Z_2 с преобразованиями несимметричных геометрических объектов наподобие штопоров и перчаток: e — тождественное преобразование (правая перчатка остаётся правой, а левая перчатка — левой) и a — зеркальное отражение, после которого левая и правая перчатки переходят друг в друга.

Не все группы коммутативны. Рассмотрим группу перестановок трёх различных объектов² S_3 . Эта группа состоит из 6 элементов: единичный элемент e , не меняющий порядка элементов, его можно обозначить (123) , и ещё 5 нетривиальных элементов — (132) , (213) , (321) , (231) , (312) . [Кодировка здесь ясна: перестановка характеризуется результатом действия на стандартно упорядоченную тройку (123) .] Тогда $(132)(213) = (231)$, что не совпадает с $(213)(132) = (312)$.

Введём чрезвычайно важное понятие *подгруппы*. Подгруппа группы G есть такое подмножество F множества G , что операция умножения, определённая в G , может быть «спроектирована» на F . Другими словами: если два элемента a, b принадлежат F , то их произведение тоже принадлежит F ; единичный элемент группы G также принадлежит F ; если $a \in F$, то верно также, что $a^{-1} \in F$.

Например, группа S_3 имеет коммутативную подгруппу, состоящую только из циклических перестановок: $e = (123)$, $a = (231)$ и $a^{-1} = a^2 = (312)$. Эта группа называется Z_3 .

6.3. Группы Ли

Простые конечные группы весьма просты, но сложные конечные группы очень сложны. существуют группы, неизмеримо более сложные, чем, например, конечная группа, описывающая повороты кубика Рубика.

К счастью, сложная математическая теория сложных конечных групп не нашла себе применения в физике.

Но есть группы с бесконечным континуальным числом элементов. Эти группы (они называются *группами Ли* в честь Софуса Ли,

¹ Коммутативные группы называются также *абелевыми*.

² Объекты могут иметь разную природу. Можно представить, например, волка, козу и капусту. Или просто три числа 1, 2, 3.

норвежского математика, который разработал их теорию в конце XIX века) *применяются* в физике, и эти применения многообразны. В частности, некоторые такие группы представляют группы симметрии КХД и электрослабой теории.

6.3.1. Ортогональные группы

Простейший пример группы Ли — это группа плоских вращений. Она называется $SO(2)$ и может быть представлена как группа ортогональных матриц размера 2×2 с единичным детерминантом

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Композиция двух вращений на углы φ и ψ представляется произведением этих матриц:

$$g_\varphi g_\psi = g_\psi g_\varphi = g_{\varphi+\psi}. \quad (6.19)$$

Если добавить зеркальные отражения, получится группа, называемая $O(2)$. Как $SO(2)$, так и $O(2)$ коммутативны (абелевы). Элемент группы $SO(2)$ характеризуется параметром $\varphi \in [0, 2\pi)$. Топологически $SO(2)$ есть окружность. А $O(2)$ — две несвязанные окружности.

Простейшая некоммутативная группа Ли — это $SO(3)$, группа трёхмерных вращений. Каждый элемент этой группы представим как композиция трёх «элементарных» вращений вокруг первой, второй и третьей пространственных осей:

$$g = g_1 g_2 g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 & 0 \\ -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Элемент этой группы характеризуется, таким образом, тремя непрерывно изменяющимися параметрами¹, и группа представляет собой трёхмерное *многообразие*².

¹ В физике более обычный, чем в формуле (6.20), выбор таких параметров — это углы Эйлера. А авиационеры и ракетчики описывают полёт своих изделий через углы *тангажа*, *рыскания* и *вращения*.

² Математики называют этим странным словом достаточно гладкие многомерные поверхности. Группа $SO(3)$ представляет собой многообразие, топо-

Некоммутативность группы $SO(3)$ можно увидеть непосредственно. Сделаем это для *малых* вращений¹, $\varphi^a \ll 1$. Групповой элемент (6.20) может быть тогда представлен как²

$$g = \mathbb{1} + i\varphi^a t^a + o(\varphi^a), \quad (6.21)$$

где $\mathbb{1}$ — единичная матрица, а три эрмитовы матрицы

$$t^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

называются *генераторами* группы. Генераторы бесследовы и удовлетворяют условию

$$\text{Tr}\{t^a t^b\} = 2\delta^{ab}. \quad (6.23)$$

Рассмотрим *групповой коммутатор*

$$g(\varphi)g(\psi)g^{-1}(\varphi)g^{-1}(\psi) \approx \mathbb{1} - \varphi^a \psi^b [t^a, t^b]. \quad (6.24)$$

Генераторы не коммутируют,

$$[t^a, t^b] = i\varepsilon^{abc} t^c, \quad (6.25)$$

следовательно, групповой коммутатор (6.24) отличен от единицы, и, значит, $g(\varphi)g(\psi) \neq g(\psi)g(\varphi)$. Группа неабелева.

Заметим, что инфинитезимальные вращения координат \mathbf{x} , связанные с действием генераторов (6.22), могут быть также интерпретированы как действие операторов углового момента

$$\hat{J}^a = \varepsilon^{abc} x^b \hat{p}^c = -i\varepsilon^{abc} x^b \frac{\partial}{\partial x^c} \quad (6.26)$$

на функции $f(\mathbf{x})$. Фактически *алгебра Ли* (6.25) есть не что иное, как алгебра операторов углового момента, известная из курса квантовой механики.

логически эквивалентное трёхмерной сфере S^3 с отождествлёнными противоположными точками. Это многообразие компактно (имеет конечный объём). Компактны не все группы. Группа Лоренца, например, некомпактна.

¹ Замечательное наблюдение Ли состояло в том, что можно почти всё узнать о структуре непрерывной группы [любой группы, не только $SO(3)$], изучая то, что происходит в малой окрестности единичного элемента.

² Здесь верхнее положение индексов имеет чисто эстетическое, а не математическое значение.

Группа вращений в евклидовом пространстве произвольной размерности характеризуется $n(n-1)/2$ параметрами. «Элементарное» вращение происходит в плоскости $(\mu\nu)$. Генератор такого вращения есть эрмитова матрица с элементами

$$(t_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}). \quad (6.27)$$

Генераторы (6.27) удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[t_{\mu\nu}, t_{\alpha\beta}] = i(\delta_{\nu\beta}t_{\mu\alpha} + \delta_{\mu\alpha}t_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}t_{\nu\alpha} - \delta_{\nu\alpha}t_{\mu\beta}). \quad (6.28)$$

В общем случае у группы Ли, представляющей собой D -мерное компактное многообразие, имеется D генераторов, представимых эрмитовыми матрицами $t^{a=1,\dots,D}$. Для них справедлива алгебра

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (6.29)$$

с вещественными полностью антисимметричными f^{abc} . Объекты f^{abc} называются *структурными константами* группы.

Знание групповых генераторов позволяет выразить элемент группы не только в окрестности единицы, как в формуле (6.21). Можно показать, что произвольный групповой элемент представим в виде

$$g = \exp\{i\varphi^a t^a\}. \quad (6.30)$$

Это выражение может озадачить читателя. Он знает, как складывать и умножать матрицы, но, быть может, никогда не видел раньше формулу, где матрица стоит в экспоненте. Но в этой формуле нет ничего загадочного. Любая гладкая функция матричного аргумента может быть разложена в ряд Тейлора, и именно так её следует понимать. В частности,

$$\exp\{i\varphi^a t^a\} = \mathbb{1} + i\varphi^a t^a + \frac{1}{2}(i\varphi^a t^a)^2 + \frac{1}{6}(i\varphi^a t^a)^3 + \dots \quad (6.31)$$

При $\varphi^a \ll 1$ можно оставить в этом разложении только первые два члена, и мы получим формулу (6.21).

Упражнение. Покажите, что трёхмерная матрица (6.30) с генераторами (6.22) ортогональна. (*Указание:* достаточно увидеть, что $g^T = \exp\{-i\varphi^a t^a\}$.)

6.3.2. Группа Лоренца

Эта столь важная для физики группа заслуживает особого подраздела.

Как отмечалось, группа преобразований Лоренца изоморфна группе вещественных матриц размера 4×4 , удовлетворяющих условию (6.10). Эта группа родственна группе четырёхмерных враще-

ний, и с учётом того, что инвариантный интервал (6.12) есть квадратичная форма с одним положительным и тремя отрицательными собственными значениями, она обозначается $O(3, 1) \equiv O(1, 3)$. Вводя дополнительное условие $\det O = 1$, получаем *специальную* группу Лоренца $SO(3, 1)$.

В окрестности единицы элемент группы $SO(3, 1)$ имеет вид

$$O = \mathbb{1} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{K} + o(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}), \quad (6.32)$$

где \mathbf{J} — генераторы обычных пространственных вращений (они получаются из формулы (6.22), где нужно добавить одну строчку, состоящую из нулей, сверху и один такой столбец слева) и \mathbf{K} — генераторы «гиперболических» вращений, лоренцевых бустов:

$$K^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Как мы видим, матрицы \mathbf{K} антиэрмитовы. Наличие как эрмитовых, так и неэрмитовых генераторов связано с присутствием разных знаков в инварианте (6.12). Другое следствие чередования знаков — некомпактность многообразия, описывающего группу Лоренца; её объём бесконечен.

Шесть генераторов J^a, K^a удовлетворяют условиям

$$[J^a, J^b] = i\epsilon^{abc}J^c, \quad [K^a, K^b] = -i\epsilon^{abc}J^c, \quad [J^a, K^b] = i\epsilon^{abc}K^c. \quad (6.34)$$

Определим теперь эрмитовы матрицы

$$M^a = \frac{J^a + iK^a}{2}, \quad N^a = \frac{J^a - iK^a}{2} \quad (6.35)$$

и заметим, что алгебра (6.34) переписывается в терминах M и N как

$$[M^a, M^b] = i\epsilon^{abc}M^c, \quad [N^a, N^b] = i\epsilon^{abc}N^c, \quad [M^a, N^b] = 0. \quad (6.36)$$

Другими словами, алгебра группы Лоренца эквивалентна двум независимым алгебрам¹ $\mathfrak{so}(3)$, она распадается, как говорят математики, в их *прямую сумму*.

¹ Алгебры Ли обычно обозначаются так же, как соответствующие группы, но не с заглавными, а со строчными буквами.

Будучи выраженным через M и N , групповой элемент (6.32) приобретает вид

$$O = \mathbb{1} + i[M^a(i\theta^a + v^a) + N^a(i\theta^a - v^a)] + \dots \quad (6.37)$$

6.3.3. Унитарные группы

Ортогональная группа включает преобразования координат вещественного векторного пространства, которые не меняют расстояния и скалярные произведения. Аналогично унитарная группа содержит преобразования координат комплексного векторного пространства, которые не меняют норму $z^{*j}z_j$ [мы определяем $z^{*j} = (z_j)^*$] и комплексные скалярные произведения. Унитарные матрицы удовлетворяют условию [ср. (6.2)]

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}, \quad (6.38)$$

где U^\dagger — эрмитово-сопряжённая матрица.

Для комплексного пространства размерности n матричное условие (6.38) даёт n^2 вещественных связей, наложенных на n^2 комплексных или $2n^2$ вещественных параметров, определяющих общую комплексную матрицу порядка n . Таким образом, унитарная матрица зависит от n^2 независимых вещественных параметров. Унитарные матрицы образуют группу [называемую $U(n)$]. Действительно, легко проверить, что произведение двух унитарных матриц унитарно и т. д. Группа $U(1)$ абелева. Группы $U(n > 1)$ неабелевы.

Из соотношения (6.38) следует, что $\det U = e^{i\theta}$ с некоторым вещественным θ . Если мы наложим дополнительное условие $\det U = 1$, то получим *специальные* унитарные матрицы, характеризуемые $n^2 - 1$ вещественными параметрами. Они образуют подгруппу группы $U(n)$, обозначаемую $SU(n)$. Помимо нормы $z^{*j}z_j$ специальные унитарные преобразования оставляют инвариантной структуру

$$e^{j_1 \dots j_n} z_{j_1} \dots z_{j_n}. \quad (6.39)$$

Рассмотрим простейшую нетривиальную унитарную группу $SU(2)$. Она зависит от трёх параметров и имеет, соответственно, три генератора. В окрестности единицы элемент группы $SU(2)$ представим в виде (6.21), где генераторы t^a — эрмитовы матрицы размера 2×2 .

Их можно выбрать в виде $t^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ где σ^a — матрицы Паули. Тогда

$$t^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Генераторы t^a удовлетворяют тому же условию ортогональности, что и (6.23), но с другим коэффициентом,

$$\text{Tr}\{t^a t^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (6.41)$$

Можно убедиться, что генераторы (6.40) между собой не коммутируют и что их коммутаторы удовлетворяют в точности *тому же* соотношению (6.25), что и генераторы (6.22) группы¹ SO(3). Увидев это, математик скажет, что алгебры Ли матриц (6.22) матриц (6.40) эквивалентны.

Это совпадение не может быть случайным, и оно не случайно². Можно показать, что для любой матрицы U из SU(2) матрица

$$O^{ab} = 2\text{Tr}\{U t^a U^\dagger t^b\} \quad (6.42)$$

ортогональна. Кажется, что Ли был прав: так как алгебра (6.25) (описывающая поведение группы в окрестности единицы) здесь такая же, мы фактически имеем дело с той же группой, т. е. группа SU(2) эквивалентна SO(3), не так ли?

Почти так, но есть нюанс. Действительно, соотношение (6.42) описывает отображение SU(2) → SO(3). Но это отображение не взаимно однозначно; две различные матрицы U и $-U$ дают при таком отображении одну и ту же ортогональную матрицу. Можно сказать, что SU(2) в два раза больше, чем SO(3)!

Мы скоро обсудим очень важные следствия наблюдаемого нами соответствия для физики, но вначале познакомимся с другой интересной и важной для физики унитарной группой — группой SU(3). Эта группа зависит от $3^2 - 1 = 8$ параметров и имеет 8 генераторов.

¹ Мы понимаем теперь происхождение множителя 1/2 в формуле (6.40). Если бы мы определили t^a без этого множителя, то коэффициент в условии нормировки (6.41) был бы таким же, как в формуле (6.23), но в условии коммутации появилась бы дополнительная двойка в правой части. Люди предпочитают определять генераторы так, чтобы этой двойки не было.

² Просто так никто жужжать не будет!

Последние можно выбрать в виде

$$\begin{aligned}
 t^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & t^8 &= \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Все эти матрицы эрмитовы и удовлетворяют условию ортогональности (6.41). Их коммутаторы даются общим выражением (6.29) со следующими структурными константами:

$$\begin{aligned}
 f^{123} &= 1, \\
 f^{147} &= -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2}, \\
 f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2},
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

и все остальные компоненты восстанавливаются по антисимметрии.

6.3.4. Представления

Рассмотрим вначале группу $SO(3)$. Она состоит из трёхмерных матриц, которые вращают вещественные трёхмерные векторы. Но мы видели, что каждому такому вращению соответствует некая двумерная унитарная матрица U (и также $-U$), вращающая комплексные двумерные векторы. Каков физико-математический смысл этого комплексного векторного пространства?

Я думаю, читатель уже знает ответ на этот вопрос. Эти комплексные двумерные векторы — не что иное, как *спиноры*. Спиноры, изучаемые в курсе квантовой механики, — это 2-компонентные волновые функции частиц со спином $1/2$. Они нетривиально преобразуются при вращениях: умножаются слева на унитарную матрицу,

которая связана с ортогональной матрицей, вращающей пространственные координаты, соотношением (6.42)¹. Таким образом, изучив группу $SU(2)$, мы одновременно построили *спинорное представление* группы трёхмерных вращений.

Что касается ортогональных матриц размера 3×3 , то они реализуют векторное представление этой группы. Заметьте, что эти матрицы действуют не только на обыкновенные классические векторы, но и на имеющие векторную природу волновые функции квантовых частиц с единичным спином. Действительно, такая частица может иметь три различные проекции спина на выделенную пространственную ось (скажем, на ось z), $S_z = 1, 0, -1$. Волновая функция включает, таким образом, три компоненты, которые можно выразить как²

$$\Psi_{S=1} = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_0 \\ \Psi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(V_x + iV_y)/\sqrt{2} \\ V_z \\ (V_x - iV_y)/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Можно убедиться, что объект (V_x, V_y, V_z) преобразуется при вращениях как вектор.

Но бывают также частицы со спином $3/2$ (например, Ω^- -гиперон, «Нептун» кварковой модели, о котором мы говорили в § 5.3) и с четырьмя возможными проекциями спина: $S_z = \pm 3/2, \pm 1/2$. Волновая функция такой частицы включает, таким образом, 4 компоненты и вращается матрицами 4×4 . Имеются также частицы спина 2 с пятью проекциями спина (их волновые функции представимы как бесследовые симметричные тензоры ранга 2) и т. д. Мы получаем цепочку представлений, характеризуемых спином S , который может быть либо целым, либо полуцелым.

Частица спина S может быть сделана из $2S$ частиц со спином $S = 1/2$, быть их связанным состоянием. Соответственно, представление спина S может быть сконструировано из $2S$ «элементарных» спинорных представлений. Возьмём для примера Ω^- -гиперон. Его

¹ Заметьте, что, когда угол вращения плавно меняется от 0 до 2π , соответствующая унитарная матрица меняется от $\mathbb{1}$ до $-\mathbb{1}$ (унитарная матрица есть как бы «квадратный корень» из ортогональной, и мы как бы прибываем при таком обходе на другой лист римановой поверхности). Другими словами, спинорная волновая функция меняет знак при повороте на 2π . Это известное квантовомеханическое явление, оно подтверждено экспериментом.

² Отрицательный знак в верхней компоненте столбца справа — это не ошибка. Он присутствует, если принята стандартная конвенция $\Psi_+ = \hat{J}^+ \Psi_0 / \sqrt{2} = (\hat{J}^+)^2 \Psi_{-1} / 2$.

волновая функция представляет собой антисимметризованное произведение фермионных кварковых волновых функций — это требуется принципом Паули. Кварковые волновые функции (или кварковые поля — выбирайте, что вам больше нравится) несут цветовые и спиновые индексы. Волновая функция Ω^- должна быть антисимметризована по цвету (в этом случае Ω^- несёт нулевой цветной заряд, он белый, как крутящийся диск на обложке). Значит, она должна быть симметризована по спиновым индексам,

$$(\Psi^{3/2})_{ijk} = \psi_i \chi_j \varphi_k. \quad (6.46)$$

Функция $\Psi^{3/2}$ имеет, как положено, четыре независимые компоненты: Ψ_{111} , Ψ_{112} , Ψ_{122} , Ψ_{222} .

Отметим также существование тривиального однокомпонентного представления, отвечающего частицам спина 0.

Здесь следует сделать терминологическое замечание. Физики и математики говорят на родственных, но различных языках, и часто требуется перевод. Во многих случаях одни и те же математические объекты носят на этих разных языках разные имена. И с другой стороны, иногда одно и то же слово («ложный друг переводчика») обладает в этих двух языках разным смыслом.

Когда математик говорит «представление», он имеет в виду элемент группы, представленный в виде матрицы того или иного размера. А столбцы, на которые эти матрицы слева действуют, принадлежат для него «пространству представления». Когда же физик говорит «представление», он думает прежде всего об *объектах*, на которые действуют преобразования симметрии. Мы говорим: «...поля в спинорном представлении, в векторном представлении» и т. д., не произнося при этом слово «пространство».

Обратимся к произвольным группам $SU(n)$. Унитарные матрицы размера $n \times n$ действуют на произвольные n -мерные комплексные векторы, как на столбцы,

$$\psi'_j = U_j^k \psi_k. \quad (6.47)$$

Эти векторы принадлежат к *фундаментальному представлению* $SU(n)$. Имеется также *антифундаментальное* представление, строки ψ^{*j} , которые преобразуются как

$$(\psi^{*k})' = \psi^{*j} (U^\dagger)_j^k. \quad (6.48)$$

В более компактной форме имеем $\psi \rightarrow U\psi$, $\psi^* \rightarrow \psi^* U^\dagger$, так что норма $\psi^* \psi$ инвариантна ввиду соотношения (6.38).

Антифундаментальное представление связано с фундаментальным комплексным сопряжением. При $n \geq 3$ это два разных представления. Но для $SU(2)$ они эквивалентны. Эквивалентность устанавливается линейной связью $\psi^{*j} = \varepsilon^{jk} \chi_k$, где ε^{jk} — инвариантный тензор $SU(2)$ [см. формулу (6.39)]. Мы уже обсуждали (анти)фундаментальное представление $SU(2)$, называя его спинорным представлением.

У $SU(n)$ есть много других представлений. Важную роль играет *присоединённое представление*. Оно может быть сконструировано из фундаментального и антифундаментального представлений:

$$A_j^k = \psi_j \chi^{*k} - \frac{1}{3} \delta_j^k \psi_l \chi^{*l}, \quad (6.49)$$

так что выполняется свойство $A_j^j = 0$. Матрицы (6.49) принадлежат алгебре Ли $su(n)$ группы $SU(n)$ — и могут быть представлены как

$$A_j^k = A^a (t^a)_j^k, \quad (6.50)$$

где $(t^a)_j^k$ — генераторы¹ $SU(n)$. Матрицы (6.50) преобразуются по $SU(n)$ как

$$\hat{A} \rightarrow U \hat{A} U^\dagger. \quad (6.51)$$

Для произвольного $n \geq 2$ можно думать о присоединённом представлении как о наборе $n^2 - 1$ действительных чисел A^a . Действие группы (6.51) может тогда быть реализовано вещественной матрицей порядка $n^2 - 1$, выраженной знакомой формулой (6.42). Таким образом, при $n = 2$ присоединённое представление совпадает с векторным представлением.

Фундаментальное и присоединённое представления $SU(n)$ — это почти всё, что нам понадобится в дальнейшем. Но в главе 11, когда мы будем обсуждать феноменологию адронного спектра, мы встретимся также с декуплетным представлением $SU(3)$. Оно может быть сделано из трёх фундаментальных и описывается *симметричным* трёхиндексным тензором Ψ_{ijk} . Этот тензор имеет 10 независимых компонент:

$$\Psi_{111}, \Psi_{222}, \Psi_{333}, \Psi_{112}, \Psi_{113}, \Psi_{221}, \Psi_{223}, \Psi_{331}, \Psi_{332}, \Psi_{123}. \quad (6.52)$$

Обсудим, наконец, представления группы Лоренца. Мы установили [см. формулу (6.36)], что алгебра $so(3, 1)$ представляет собой

¹Группа $SU(n)$ «присоединяет» в качестве представления свою собственную алгебру. Присоединённое представление существует, очевидно, у любой группы Ли, не только у $SU(n)$.

прямую сумму двух алгебр $\mathfrak{so}(3) \equiv \mathfrak{su}(2)$. Математическое следствие этого есть тот факт, что группа $SO(3, 1)$ представляет собой в некотором смысле произведение двух групп $SU(2)$.

Чтобы понять в каком именно смысле это есть произведение (и что в точности такое произведение двух групп), заметим, что произвольный элемент $SO(3, 1)$ может быть записан как произведение двух факторов,

$$O = \exp\{iM^a u^a\} \exp\{iN^a u^{*a}\}, \quad (6.53)$$

где u^a — комплексные параметры. Это следует из:

- (а) выражения (6.37) для инфинитезимального элемента;
- (б) общей формулы (6.30);
- (в) коммутации $[M^a, N^b] = 0$.

Имея в виду, что как M^a , так и N^a образуют стандартную алгебру $\mathfrak{su}(2)$, можно интерпретировать каждый множитель в формуле (6.53) как элемент комплексифицированной¹ группы $SU(2)$. Важно, что эти параметры для группы, порождённой M^a , и для группы, порождённой N^a , комплексно-сопряжены друг к другу².

Формула (6.53) позволяет нам построить представления группы Лоренца — описать объекты, на которые эта группа может действовать. Так как произвольный элемент $SO(3, 1)$ есть произведение двух коммутирующих факторов [назовём их левой $SU(2)$ и правой $SU(2)$], общее представление $SO(3, 1)$ есть тензорное произведение двух независимых представлений $SU(2)$. Возьмём, например, объект $\xi_{\alpha=1,2}$, который преобразуется как спинор под действием левой группы $SU(2)$ и совсем не преобразуется под действием правой. Точно так же можно рассмотреть объект $\eta_{\dot{\alpha}=1,2}$, который преобразуется как спинор под действием правой группы $SU(2)$ и совсем не преобразуется под действием левой.

В главе 9 мы увидим, что «неточечные» и «точечные» фермионные спинорные поля описывают состояния с определённой спиральностью, такие как левое нейтрино и правое антинейтрино. Таким образом, названия «левый» и «правый» для двух групповых факторов $SU(2)$ в формуле (6.53) связаны не только с тем типографским

¹Комплексифицированная группа — это группа с комплексными параметрами преобразований.

²Наличие комплексных параметров преобразований — это осложнение, связанное с некомпактностью группы Лоренца. В аналогичной конструкции для компактной группы $SO(4)$ все параметры были бы вещественными.

фактом, что один из них в этой формуле стоит слева, а другой — справа, но имеют более глубокое физическое обоснование.

Но в этой математической главе мы только отмечаем, что общее представление группы Лоренца есть тензорное произведение некоторых представлений левой и правой групп. Оно характеризуется двумя числами (j_L, j_R) . Каждое из них может быть либо целым, либо полуцелым. Спинорное представление ξ_α можно обозначить как $(\frac{1}{2}, 0)$, а представление $\eta_{\dot{\alpha}}$ — как $(0, \frac{1}{2})$. Имея в виду комплексную сопряжённость параметров двух групп $SU(2)$, заключаем, что представления $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$ также комплексно-сопряжены друг другу: спинор $(\xi_\alpha)^*$ преобразуется так же, как $\eta_{\dot{\alpha}}$.

Заметим, что неточечные и точечные индексы можно поднимать и опускать инвариантными тензорами $SU(2)$: $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Тогда

$$\xi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta, \quad \xi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi^{\dot{\beta}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}. \quad (6.54)$$

Читатель может задать резонный вопрос: матрица O в уравнении (6.53) и оба составляющих её множителя четырёхмерны, и неочевидно, как именно преобразуются 2-компонентные спиноры ξ_α и $\eta_{\dot{\alpha}}$.

Чтобы определить действие обычных вращений на обычные спиноры, надо было заменить ортогональную трёхмерную матрицу O унитарной двумерной матрицей U , связанной с O формулой (6.42). Аналогично чтобы определить действие преобразования Лоренца на спиноры ξ_α и $\eta_{\dot{\alpha}}$, надо заменить матрицу O в формуле (6.53) двумерной комплексной матрицей

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

с единичным детерминантом,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (6.56)$$

Без наложения последнего условия группа матриц (6.55) имела бы $4 \cdot 2 = 8$ вещественных параметров. Одна комплексная или две вещественные связи (6.56) ограничивают их число до 6, как и должно быть для группы Лоренца. Можно вывести формулу, аналогичную (6.42), которая связывает g и O , но мы этого здесь делать не будем. В конце концов, наша книга полупопулярна, и мы не обязаны (скорее — обязаны не) вдаваться в технические детали.

В терминах g действие группы Лоренца на спиноры выражается очень просто:

$$\xi \rightarrow g\xi, \quad \eta \rightarrow \eta g^\dagger. \quad (6.57)$$

Рассмотрим теперь представление $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Поле, принадлежащее этому представлению, несёт два индекса — точечный и неточечный. Обозначим его $V_{\alpha\dot{\alpha}}$. Оно преобразуется по Лоренцу как

$$V \rightarrow gVg^\dagger. \quad (6.58)$$

Общая комплексная матрица V зависит от восьми параметров, но это, как говорят математики, *приводимое* представление. «Приводимое» означает, что число независимых параметров, характеризующих представление, может быть уменьшено при наложении некоторых связей. В нашем случае на V можно наложить требование эрмитовости — эрмитова матрица, преобразованная согласно закону (6.58), остаётся эрмитовой. Эрмитова матрица V имеет 4 независимых параметра. Это попросту четырёхмерный вектор! Явное выражение компонент матрицы (6.58) через компоненты 4-вектора V_μ есть

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} V_0 - V_3 & -V_1 + iV_2 \\ -V_1 - iV_2 & V_0 + V_3 \end{pmatrix} = V_0 - V_j \sigma_j = \sigma^\mu V_\mu, \quad (6.59)$$

где мы ввели матричный 4-вектор

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (6.60)$$

[см. формулу (2.11)].

6.4. Грассманова алгебра

Поговорим теперь совсем на другую тему. Мы могли бы перенести объяснение того, что такое грассмановы числа и грассманова алгебра, в главу 9 — туда, где они нам реально понадобятся, но мне показалось более логичным свести все необходимые математические сведения в одну главу.

Грассмановы числа — это *антикоммутирующие* числа. Читателя не должно сильно удивить это понятие. Он знает, что в математике есть объекты, которые не коммутируют при умножении (например, матрицы не коммутируют, а различные матрицы Паули вдобавок антикоммутируют). Грассмановы числа — это просто специальный класс таких объектов.

Основные определения следующие.

- Пусть $\{a_i\}$ — набор n антикоммутирующих переменных: $a_i a_j + a_j a_i = 0$. Произвольный элемент основанной на них грассмановой алгебры даётся функцией $f(a_i) = c_0 + c_i a_i + c_{ij} a_i a_j + \dots$, где коэффициенты c_0, c_i, \dots — обыкновенные числа (действительные или комплексные). Этот ряд с необходимостью заканчивается на $(n+1)$ -м члене: $(n+2)$ -й член ряда содержал бы квадрат какой-нибудь антикоммутирующей переменной (например, a_1^2), что есть нуль. Заметим, что даже если грассманово число типа $a_1 a_2$ коммутирует с остальными, его всё равно нельзя рассматривать как обыкновенное число, это *чётный элемент* нашей грассмановой алгебры. Есть также, конечно, нечётные антикоммутирующие элементы. Переменные $\{a_i\}$ называются *генераторами* алгебры.

- Грассмановы числа можно складывать,

$$f(a_i) + g(a_i) = c_0 + d_0 + (c_i + d_i)a_i + \dots,$$

и перемножать. Например,

$$(1 + a_1 + a_2)(1 + a_1 - a_2) = 1 + 2a_1 - 2a_1 a_2$$

(использовались свойства антикоммутиации a_i).

- Можно также дифференцировать функции $f(a_i)$ по отношению к грассмановым переменным: $\partial/\partial a_i(1) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $\partial/\partial a_i(a_j) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij}$; производная суммы есть сумма производных, и производная произведения вычисляется по правилу Лейбница с той модификацией, что оператор $\partial/\partial a_i$ следует понимать как грассманову переменную, что иногда приводит к смене знака, когда мы тянем $\partial/\partial a_i$ направо, чтобы подвести к соответствующей переменной a_i , которую этот оператор уничтожает. Например, $\partial/\partial a_1(a_2 a_3 a_1) = a_2 a_3$, но $\partial/\partial a_1(a_2 a_1 a_3) = -a_2 a_3$.
- По грассмановым переменным можно также интегрировать. Это, конечно, не обычный интеграл, его нельзя получить как предел интегральных сумм, нельзя посчитать численно «в конечных пределах» (это не имеет смысла для грассмановых чисел) методом Симпсона и т. д. Можно, однако, взять интеграл по грассмановой переменной «по всей области» (если угодно, «от $-\infty$ до ∞ », хотя это тоже не имеет смысла). Смысл имеет определение, предложенное Феликсом Березиным: $\int da_j f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \partial/\partial a_j f(a)$.
- Если грассманова алгебра включает чётное число $2n$ генераторов, то можно их разделить на две равные части, $\{a_{j=1, \dots, 2n}\} \rightarrow$

$\rightarrow \{a_{j=1, \dots, n}, a_{j=1, \dots, n}^\dagger\}$, и ввести оператор инволюции $a_j \leftrightarrow a_j^\dagger$, который мы будем отождествлять с комплексным сопряжением. Мы, в частности, будем полагать, что одновременно с инволюцией генераторов происходит комплексное сопряжение обычных чисел:

$$f(a) = c_0 + c_i a_i + d_i a_i^\dagger + \dots \quad \rightarrow \quad f^\dagger(a) = c_0^* + c_i^* a_i^\dagger + d_i^* a_i + \dots$$

Удобно также предположить, что для любых двух элементов f, g грассмановой алгебры выполняется такое же свойство, как для эрмитова сопряжения: $(fg)^\dagger = g^\dagger f^\dagger$ (и поэтому мы используем для этой операции такое же обозначение †).

Глава 7

Ликбез по теоремеху

Читатель, возможно, слушал лекции по теоретической механике в университете. Если нет, то существует много хороших книг, где ясно объяснены её принципы. Я рекомендую две из них. Чтобы ознакомиться с коротким и очень педагогичным введением в предмет, откройте главу 19 второго тома лекций Фейнмана. А серьёзное (и в то же время сжатое) изложение этой науки дано в «Механике» Ландау и Лифшица — в первом томе их знаменитого курса.

Или просто оставайтесь с нами. Чтобы сделать книгу самодостаточной, мы даём в первой части этой главы краткий конспект лагранжева и гамильтонова описания обычной механики. Во второй части главы мы применяем эти методы к описанию релятивистских и полевых систем.

7.1. Нерелятивистская механика

В предыдущих главах мы уже побродили немного по залам и коридорам кубического здания физики, схематически изображённого на рис. 4.5. Но теперь мы возвращаемся в самый первый, входной зал. Не обращая внимания на картины и инсталляции, мы подходим к книжной полке, берём книги Фейнмана и Ландау и углубляемся в чтение.

Начнём с простейшего нетривиального примера: движения вертикально брошенного в небо камня. Рассмотрим все возможные траектории $z(t)$, такие что в начальный момент времени t_0 камень находится на высоте z_0 , а в некоторый более поздний момент времени $t_1 > t_0$ его высота равна z_1 . Значения $t_{0,1}$ и $z_{0,1}$ будем предполагать фиксированными.

Вычислим интеграл действия

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt(T - U) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz \right], \quad (7.1)$$

где T — кинетическая, а U — потенциальная энергии. Утверждение (*принцип наименьшего действия*) состоит в том, что для истинной

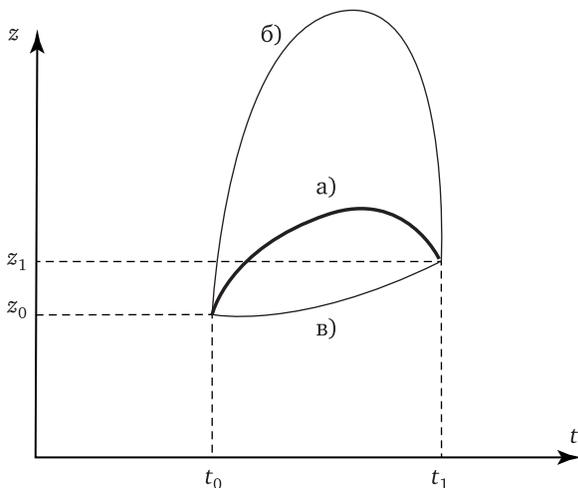


Рис. 7.1. Траектории камня: а) с минимальным действием; б) слишком большое T ; в) слишком маленькое U

физической траектории $z^{\text{физ}}(t)$ этот интеграл принимает минимальное значение. Это проиллюстрировано на рис. 7.1. Чтобы достичь минимального значения действия (7.1), камню хотелось бы увеличить свою потенциальную энергию и забраться как можно выше. Но поскольку у него назначено свидание — в фиксированный момент времени t_1 он должен оказаться в точке z_1 , — он не может забираться слишком высоко. Тогда он пролетел бы большое расстояние, для чего он должен был бы лететь с большой скоростью, а тогда интеграл действия (7.1) получил бы большой положительный вклад от члена с кинетической энергией.

Истинная траектория, кривая а) на рис. 7.1, — это результат переговорного компромисса между T и U .

Рассмотрим теперь общую механическую систему с n динамическими переменными q_i . Выберем функционал¹ действия $S[q_i(t)]$ в виде

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\dot{q}_i, q_i). \quad (7.2)$$

Это не самая общая возможная форма действия, она включает два ограничения.

¹ Функционал — это функция от функционального аргумента.

- Мы предположили, что *лагранжиан* L не зависит от времени явно [а только через посредство $q_i(t)$]. Если бы такая явная зависимость имела место, система не была бы *консервативной*; её энергия зависела бы от времени. А в нашей книге мы имели и будем иметь дело только с консервативными системами.
- Мы предположили, что лагранжиан зависит только от *обобщённых координат* q_i и *обобщённых скоростей* \dot{q}_i , но не от \ddot{q}_i , $\ddot{\ddot{q}}_i$ и т. д. Системы, включающие высшие временные производные, имеют специфическую динамику — ваш автор немного интересовался ими, и мы обсудим такие системы¹ в главе 16. Но в этой книге наша главная задача — построить и объяснить лагранжиан Стандартной модели, который зависит только от полей и их первых производных.

Задача состоит в том, чтобы найти траектории, удовлетворяющие граничным условиям

$$q_i(t_0) = q_i^{(0)}, \quad q_i(t_1) = q_i^{(1)}, \quad (7.3)$$

так чтобы интеграл (7.2) принимал минимальное возможное значение.

Необходимое условие для экстремума гладкой функции f — это обращение в нуль всех её частных производных и, как следствие, дифференциала df . А необходимое условие экстремума функционала — это обращение в нуль его *вариации*. Вариация действия (7.2) даётся выражением²

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right]. \quad (7.4)$$

Удобно проинтегрировать по частям второй член. Граничный член исчезает ввиду фиксированных граничных условий (7.3) — мы варьируем только по траекториям, которые им удовлетворяют, так что

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0. \quad (7.5)$$

¹ Имеются некоторые основания полагать, что Единая теория всего — гипотетическая фундаментальная теория всех взаимодействий, включающая также гравитацию, — содержит высшие производные.

² Оно записано с использованием эйнштейновского соглашения о суммировании, несмотря на то что набор q_i не есть вектор в обычном смысле.

Мы получаем

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i(t). \quad (7.6)$$

Это выражение должно обращаться в нуль для *любой* вариации $\delta q_i(t)$, удовлетворяющей условию (7.5). Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.7)$$

Мы вывели *уравнения Лагранжа*. Уравнения (7.7) представляют собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В простом случае (7.1) мы получаем второй закон Ньютона $m\ddot{z} = -mg$.

Лагранжиан, не зависящий от времени явно, инвариантен относительно временных сдвигов $t \rightarrow t + \Delta t$. По теореме Нётер¹ каждая инвариантность (симметрия) лагранжиана влечёт за собой особый закон сохранения. Инвариантность относительно временных сдвигов влечёт сохранение энергии. Действительно, вы можете проверить, что энергия, определяемая как

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (7.8)$$

есть *интеграл движения* — на траектории $q_i(t)$, удовлетворяющей уравнениям движения (7.7), временная производная энергии обращается в нуль.

Определим теперь *обобщённые импульсы*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (7.9)$$

выразим через них обобщённые скорости \dot{q}_i и подставим их в таком виде в формулу (7.8). Мы получим *гамильтониан* — энергию, выраженную в терминах канонических координат и импульсов. Координаты и импульсы параметризуют *фазовое пространство* системы.

¹Эмми Нётер была замечательным математиком. Возможно, наиболее значительной женщиной в истории математики. Она работала в Германии в начале XX века. В 1919 г. она получила профессорскую позицию в университете Гёттингена. Но это было для неё непросто. В то время в университетах не было женщин, и её коллеги не очень хотели создавать прецедент. Один из профессоров запротестовал: «О чем подумают наши вернувшиеся с фронта в университет солдаты, когда они узнают, что им придётся учиться у ног женщины?» Судьба Нётер была решена вмешательством Давида Гильберта, крупнейшего и наиболее уважаемого немецкого математика того времени. «Aber, meine Herren, — сказал Гильберт, — университет — это всё-таки не мужская баня!»

Уравнения движения в фазовом пространстве (уравнения Гамильтона) имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (7.10)$$

Уравнения (7.10) представляют собой систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка. Они эквивалентны уравнениям Лагранжа (7.7). Чтобы это увидеть, вычислим дифференциал гамильтониана. Имея в виду уравнения (7.7) и определение (7.9), можно записать

$$dH = d(p_i \dot{q}_i - L) = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \quad (7.11)$$

откуда следуют уравнения (7.10).

Пусть $f(q_i, p_i)$ — функция на фазовом пространстве. С учётом того, что эволюция системы $q_i(t)$, $p_i(t)$ описывается уравнениями Гамильтона (7.10), полная временная производная этой функции есть

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (7.12)$$

Сумма в правой части называется *скобкой Пуассона* $\{H, f\} = -\{f, H\}$.

Таким образом, необходимое и достаточное условие того, что функция f — это интеграл движения, есть обращение в нуль скобки Пуассона $\{H, f\}$.

Это «классическая» глава, но невозможно не упомянуть здесь известный большинству читателей факт, что в квантовой механике функциям на классическом фазовом пространстве соответствуют операторы. Явные выражения для этих квантовых операторов получаются из $f(q_i, p_i)$ заменой $p_i \rightarrow -i\hbar \partial / \partial q_i$. В простых случаях, как для гамильтониана

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}), \quad (7.13)$$

описывающего движение частицы во внешнем потенциальном поле, это правило соответствия приводит к известному квантовому гамильтониану (4.9). В более экзотических случаях, как, например, для гамильтониана $H = p^2 q^2$, необходимо разрешить *неоднозначности упорядочения* и решить, где следует помещать производные — слева от q^2 , справа или посередине. Но мы в такие тонкости в нашей книге вдаваться не будем.

Заметим также, что квантовый аналог классической скобки Пуассона — это коммутатор двух операторов. Квантовый оператор описывает сохраняющуюся физическую величину, если он коммутирует с гамильтонианом.

7.2. Сила Лоренца

Чтобы показать, как работают описанные выше методы, мы выведем с их помощью уравнение движения для релятивистской заряженной частицы во внешних электрическом и магнитном полях. Для электрона, несущего заряд $e = -|e|$, это уравнение имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\right). \quad (7.14)$$

Вы знаете это выражение из университетского курса электромагнетизма, но, вероятно, выражение (7.14) для силы было там просто постулировано, но не выведено¹. А мы сейчас выведем его, используя методы из предыдущего параграфа и вспоминая одновременно некоторые основные положения специальной теории относительности.

Рассмотрим вначале случай, когда внешние поля отсутствуют и мы имеем дело с обычной свободной релятивистской частицей. Запишем действие. Оно должно быть лоренцевым скаляром (инвариантом преобразований Лоренца). Что ж, один такой скаляр мы хорошо знаем — это инвариантный интервал (6.12) между начальной и конечной точками траектории. В случае свободной частицы никакого другого такого инварианта не видно и действие должно быть пропорционально (6.12), что мы можем представить в виде

$$S = Cmc \int_0^1 ds, \quad (7.15)$$

где ds определяется формулой (4.21), а пределы 0, 1 не обозначают начального и конечного значений s (это не имело бы смысла), но просто указывают, что интеграл берётся вдоль некоторой траектории, соединяющей начальную и конечную точки 0 и 1 в пространстве Минковского. Выражение (7.15) имеет правильную размерность. Численная константа C — это чистая условность (она не

¹ Даже Фейнман не сделал этого в своих лекциях. К сожалению, обычные университетские курсы теоретической механики и электромагнетизма, как правило, «не коммутируют».

влияет на динамику), но наиболее удобно выбрать $C = -1$. Мы очень скоро увидим, что в нерелятивистском пределе выражение

$$S = -mc \int_0^1 ds \quad (7.16)$$

переходит (с точностью до некоторой несущественной аддитивной константы) в известное нерелятивистское выражение для свободно-го действия.

Чтобы записать лагранжиан, необходимо переписать интеграл по инвариантному интервалу (7.16) как интеграл по времени. Мы знаем, что

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.17)$$

Отсюда следует

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.18)$$

Для малых скоростей это сводится, как было обещано, к уравнению $L = -mc^2 + mv^2/2 + \dots$

Обобщённый импульс для релятивистского лагранжиана (7.18) есть

$$\mathbf{p} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.19)$$

— хорошо известное выражение для релятивистского импульса. Лагранжево уравнение движение есть

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (7.20)$$

Релятивистская энергия имеет вид

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.21)$$

Она выражается через обобщённый импульс (7.19) как

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (7.22)$$

Это гамильтониан свободной релятивистской частицы.

Включим теперь электромагнитное поле. Оно характеризуется четырёхмерным векторным потенциалом $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ [и $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = (\varphi, -\mathbf{A})$] и антисимметричным тензором напряжённо-

сти:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля. В трёхмерных обозначениях

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (7.24)$$

В присутствии поля можно написать помимо (7.16) *другой* лоренцев инвариант $\propto \int A_\mu dx^\mu$. Добавление его в действие искривляет траекторию частицы. Ясно, что коэффициент, с которым он входит, пропорционален электрическому заряду. В стандартной конвенции

$$S = -mc \int_0^1 ds - \frac{e}{c} \int_0^1 A_\mu dx^\mu, \quad (7.25)$$

Переписав это как интеграл по времени, мы получаем

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (7.26)$$

Члены, пропорциональные заряду и описывающие взаимодействие частицы с полем, могут быть представлены как [ср. формулу (5.3)!]

$$L^{\text{int}} = -e \int A_\mu j^\mu d^3x, \quad (7.27)$$

где

$$j^\mu(\mathbf{x}) = \left(j^0, \frac{\mathbf{j}}{c} \right) = \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)] \quad (7.28)$$

— плотность тока, соответствующая точечной частице, движущейся по траектории $\mathbf{x}_0(t)$. Отметим свойство¹

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) = 0. \quad (7.29)$$

¹ Оно легко выводится с учётом соотношения $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}_0$.

Это важнейший закон сохранения тока (он сводится здесь к сохранению числа электронов и, следовательно, к сохранению электрического заряда).

Обобщённый импульс, отвечающий лагранжиану (7.26), есть

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \quad (7.30)$$

Замётим, что в присутствии векторного потенциала и связанного с ним магнитного поля обобщённый импульс \mathbf{P} не совпадает с кинетическим импульсом \mathbf{p} , даваемым выражением (7.19).

Лагранжевы уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left[p_i + \frac{e}{c}A_i\right] = -e\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}v_j. \quad (7.31)$$

Заметим теперь, что полная временная производная векторного потенциала есть сумма двух членов:

$$\frac{dA_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j}v_j. \quad (7.32)$$

Здесь первый член, частная производная $\partial A/\partial t$, описывает изменение векторного потенциала со временем в данной пространственной точке. А всё вместе описывает временное изменение потенциала в точке, которая движется вместе с частицей. В конечном итоге мы получаем

$$\frac{dp_i}{dt} = e\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)v_j, \quad (7.33)$$

что совпадает с (7.14).

Напишем также выражение для канонического гамильтониана этой системы:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \quad (7.34)$$

7.3. Полевые теории

Наша книга посвящена квантовой теории поля. Чтобы разобраться в этой непростой области науки, надо хорошо понимать, что такое классическая полевая теория. Какие-то знания об этом у нашего читателя уже есть. Он изучал теорию Максвелла в университете; он прочитал четвёртую главу этой книги, где мы рассказывали о разных полевых системах и писали полевые уравнения движения.

Но эти уравнения там не выводились, а только постулировались. В данном параграфе мы выведем уравнения КФГ, а также уравнения Максвелла из фундаментального принципа наименьшего действия. Мы запишем также выражения для соответствующих полевых гамильтонианов.

Начнём с теории комплексного скалярного поля, которая проще теории Максвелла. Для полевых теорий функционал действия представляет собой не просто временной интеграл, но четырёхмерный интеграл по пространственным и временной координатам:

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}. \quad (7.35)$$

Подынтегральное выражение есть пространственная плотность лагранжиана. А сам лагранжиан даётся интегралом

$$L = \int dx \mathcal{L}. \quad (7.36)$$

Однако ленивые теоретики часто опускают в разговоре слова «пространственная плотность» и называют лагранжианом величину \mathcal{L} . В дальнейшем (но по большей части не в этой главе) мы также последуем их примеру.

Мы хотим, чтобы действие было инвариантным относительно преобразований Лоренца. Для этого и \mathcal{L} должно быть лоренцевым скаляром.

Отметим следующее. В классической механике мы пишем для действия интеграл по времени, взятый в конечных пределах — от t_0 до t_1 , и фиксируем на этих пределах значения динамических переменных. При этом интеграл (7.2) имеет смысл действия на траектории, описывающей переход от $q^{(0)}$ при t_0 до $q^{(1)}$ при t_1 . То же можно в принципе сделать и в случае полевых теорий¹. Но выбирать конечные пределы во временном интеграле и не делать этого в интегралах пространственных не очень «эстетично», это не есть лоренц-инвариантная процедура. Мы предпочитаем интегрировать по всему пространству-времени, $-\infty < t, \mathbf{x} < \infty$, и требовать при этом, чтобы поле $\varphi(t, \mathbf{x})$ обращалось в нуль на пространственной бесконечности, в отдалённом прошлом и в отдалённом будущем.

Основываясь на нашем опыте для механических систем, мы предположим, что плотность лагранжиана \mathcal{L} зависит от полей φ , φ^* и их

¹ Так и поступают для строгого вывода амплитуд рассеяния в квантовой теории поля. Но такой уровень строгости — за пределами нашей книги.

первых производных $\partial_\mu \varphi, \partial_\mu \varphi^*$. Рассмотрим вариацию действия. Мы можем написать

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi(x) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi(x)) \right] + \left(\begin{array}{l} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array} \right) \quad (7.37)$$

[использовалось равенство $\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta \varphi)$]. В этом выражении $\delta \mathcal{L}/\delta \varphi$ и $\delta \mathcal{L}/\delta(\partial_\mu \varphi)$ представляют собой частные производные функции $\mathcal{L}(\varphi, \varphi^*; \partial_\mu \varphi, \partial_\mu \varphi^*)$ по отношению к её аргументам. Мы используем здесь символ δ вместо ∂ , чтобы не путать эти частные производные с обыкновенными пространственно-временными производными $\partial_\mu \varphi = \partial \varphi / \partial x^\mu$.

Точно так же, как мы это делали для механических систем, мы интегрируем теперь по частям второй член в формуле (7.37) и получаем

$$\delta S = \int d^4x \delta \varphi(x) \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right) \right] + \left(\begin{array}{l} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array} \right). \quad (7.38)$$

Граничный член здесь исчезает ввиду наложенного нами граничного условия — зануления полей на бесконечности.

Интеграл (7.38) должен обращаться в нуль при *любой* вариации $\delta \varphi(t, \mathbf{x})$. Это возможно, только если

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = 0. \quad (7.39)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных есть лагранжево уравнение движения для нашей системы. Оно представляет собой довольно прозрачное обобщение обыкновенных уравнений Лагранжа (7.7)¹.

Выберем \mathcal{L} в следующей простой форме (мы возвращаемся к естественным единицам):

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (7.40)$$

Уравнение (7.39) совпадает в этом случае (с точностью до комплексного сопряжения) с уравнением КФГ (4.28)! Таким образом, плотность лагранжиана (7.40) описывает свободное комплексное скалярное поле.

¹Имея в виду дальнейшие применения к физике высоких энергий, мы записали это уравнение в релятивистских обозначениях с 4-вектором ∂_μ . Но можно записать уравнения движения и для нерелятивистской полевой системы, заменив

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Phi}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla \Phi_i)} \right),$$

где Φ_i — имеющийся в теории набор нерелятивистских полей. Таким образом можно вывести, например, уравнение (4.27) для звуковых волн.

Нетрудно записать также \mathcal{L} для свободного вещественного скалярного поля. Нужно только убрать в формуле (7.40) звёздочки и ввести для удобства общий фактор $1/2$.

В естественных единицах действие (7.35) безразмерно, а плотность \mathcal{L} имеет размерность m^4 . Взглянув на выражение (7.40), мы заключаем, что φ несёт размерность массы, такую же как электромагнитный потенциал A_μ .

Рассмотрим теперь теорию¹

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi)^2. \quad (7.41)$$

с положительным λ (см. ниже). Её уравнение движения

$$(\square + m^2)\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\varphi^* = 0 \quad (7.42)$$

нелинейно и нетривиально. Мы имеем дело с непростой теорией взаимодействующего скалярного поля.

Построим теперь канонический гамильтониан. Заметим, что, в отличие от плотности лагранжиана, плотность гамильтониана — не лоренцев скаляр, а компонента T^{00} так называемого тензора энергии-импульса² (сам же гамильтониан представляет нулевую компоненту 4-вектора). Поэтому не удивительно, что каноническая процедура построения полевого гамильтониана не лоренц-ковариантна.

На первом этапе мы определяем обобщённые импульсы

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi^*, \quad \Pi^* = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \varphi^*)} = \partial_0 \varphi. \quad (7.43)$$

Тогда плотность гамильтониана есть

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi^* \partial_0 \varphi^* + \Pi \partial_0 \varphi - \mathcal{L} = \\ &= \Pi^* \Pi + (\partial_i \varphi^*)(\partial_i \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi)^2. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Она положительно определена. Это объясняет выбор знака для m^2 в формуле (7.40) и также знак λ в формуле (7.41). При отрицательном λ гамильтониан (7.44) и, значит, энергия системы, не были бы

¹ Мы встречаемся с ней не в первый раз — см. уравнение (4.47) и последующее обсуждение.

² Мы встретимся с ним в главе 15.

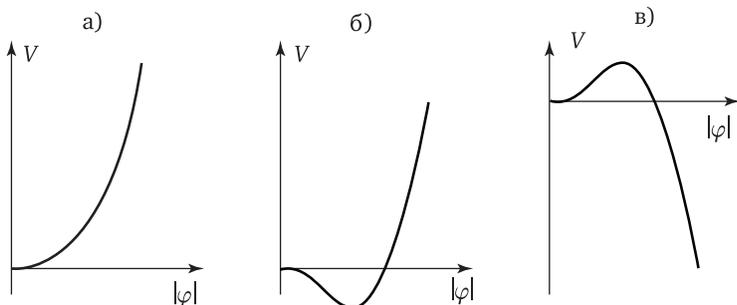


Рис. 7.2. Скалярные потенциалы (7.44) при различном выборе параметров: а) $m^2, \lambda > 0$: стабильный классический вакуум при $\varphi = 0$; б) $\lambda > 0, m^2 < 0$: стабильный классический вакуум при $|\varphi|^2 = 2|m^2|/\lambda$; в) $\lambda < 0$: стабильного вакуума нет

ограничены снизу. Что ещё хуже¹, классические уравнения движения (7.42) не имели бы в этом случае решения — поле φ выросло бы до бесконечности за конечное время. Такие теории плохи и не становятся лучше при попытках их проквантовать.

С другой стороны, в теории (7.41) при $\lambda > 0$ и $m^2 < 0$ нет абсолютно никаких проблем. Потенциальная часть гамильтониана есть

$$V(\varphi^*, \varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2 - |m^2|\varphi^*\varphi. \quad (7.45)$$

Конечно, минимум потенциальной энергии теперь не в нуле, как это было в случае $\lambda, m^2 > 0$, а при

$$\varphi^*\varphi = \frac{2|m^2|}{\lambda}. \quad (7.46)$$

Это необычно, но не приводит к разрушающим теорию противоречиям. Напротив, теория с потенциалом (7.45) включает весьма интересный и нетривиальный эффект Голдстоуна, связанный с эффектом Хиггса, упомянутым в главе 5, — деликатесным *фуа-гра* в нашем наборе «Закусок». Мы будем детально обсуждать эти эффекты в главах 11 и 12.

¹ В свободной теории с потенциалом $V = -m^2\varphi^*\varphi$ гамильтониан тоже не имеет дна. В этом экзотическом тахионном случае поле φ не осциллирует, а экспоненциально растёт со временем. Однако в свободной тахионной теории (при наличии взаимодействия это не так) оно остаётся конечным и не врезается в сингулярность при конечном t ; коллапса не происходит, и теория не содержит явных противоречий...

В сущности, это примечание адресовано не нашей «целевой аудитории», не Соне, но скорее эксперту, который может случайно раскрыть нашу книгу. В последней главе мы вернёмся к обсуждению этих нетривиальных вопросов.

Мы построили классический гамильтониан $H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$. Но его нетрудно проквантовать — для этого, согласно общим правилам, надо заменить классические обобщённые импульсы $\Pi(x)$ и $\Pi^*(x)$ на функциональные дифференциальные операторы¹

$$\Pi(x) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \varphi(x)}, \quad \Pi^*(x) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \varphi^*(x)}. \quad (7.47)$$

Мы можем выполнить теперь наше старое обещание и *вывести* написанные нами ранее выражения (4.36) и (4.37) для квантового полевого гамильтониана свободного скалярного поля. Для этого мы вычёркиваем член с взаимодействием в формуле (7.44), помещаем систему в конечный ящик размера L и заменяем континуальное множество динамических переменных $\{\varphi(x)\}$ на дискретный набор коэффициентов Фурье, как в формуле (4.35). Мы получаем²

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(x)} = \frac{1}{V} \sum_n \exp\left\{-\frac{2\pi i n \cdot x}{L}\right\} \frac{\delta}{\delta c_n}. \quad (7.49)$$

Подставляя это выражение в формулу (7.44) и интегрируя по d^3x , мы приходим к соотношению (4.36).

Гамильтониан (4.36) коммутирует с оператором

$$P = \frac{2\pi i}{L} \sum_n n (c_n^* \Pi_n^\dagger - c_n \Pi_n) \quad (7.50)$$

($\Pi_n = -i\partial/\partial c_n$, $\Pi_n^\dagger = -i\partial/\partial c_n^*$). Этот интеграл движения есть не что иное, как трёхмерный импульс поля. Мы можем теперь понять происхождение знаков в формулах (4.43) и (4.44). Собственное значение P в состоянии (4.43) есть действительно $2\pi n_0/L$, в то время как импульс состояния (4.44) есть $-2\pi n_0/L$. Импульс вакуумного состояния (4.45) равен, разумеется, нулю.

В квантовой теории поля $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ становятся операторами. Матричные элементы этих операторов и их фурье-компонент c_n ,

¹ При действии на лагранжеву плотность $\mathcal{L}[\varphi(x), \varphi^*(x); \partial\varphi(x), \partial\varphi^*(x)]$ оператор $\delta/\delta\varphi(x)$ был обыкновенной частной производной. Но в квантовой теории поля операторы в правой части (7.47) имеют смысл функциональных производных, действующих на волновой функционал (4.34).

² Читатель может проверить, что

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \varphi(y) = \delta(x-y), \quad (7.48)$$

заменяя сумму по модам на интеграл по импульсам:

$$\sum_n \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p.$$

c_n^* в фоковском пространстве (нам встретятся подобные матричные элементы в главе 10 и в главе 12) нетривиальны. Чтобы понять, как они выглядят, вспомним, что происходит для обычного гармонического осциллятора (4.38). Как вы знаете, для него можно определить повышающие и понижающие операторы (или операторы рождения и уничтожения):

$$\hat{a}^\dagger = \frac{m\omega x - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}}, \quad \hat{a} = \frac{m\omega x + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}}. \quad (7.51)$$

Оператор \hat{a}^\dagger , действуя на состояние осциллятора с квантовым числом k , рождает состояние $|k+1\rangle$, в то время как действие оператора \hat{a} даёт состояние $|k-1\rangle$ (и $\hat{a}|0\rangle = 0$). Оператор координаты x пропорционален сумме $\hat{a}^\dagger + \hat{a}$ и имеет матричные элементы двух типов,

$$\langle k+1|x|k\rangle = \langle k|x|k+1\rangle = \sqrt{\frac{k+1}{2m\omega}}. \quad (7.52)$$

Аналогично с этим, оператор c_n , действующий на фоковское состояние $|\Psi\rangle$, даёт суперпозицию двух состояний: (а) состояние, где рождена дополнительная античастица с импульсом $-2\pi\mathbf{n}/L$, и (б) состояние, где больше нет частицы с импульсом $2\pi\mathbf{n}/L$ (если, конечно, такая частица присутствовала в исходном состоянии $|\Psi\rangle$).

А оператор c_n^* может родить частицу с импульсом $2\pi\mathbf{n}/L$ или уничтожить античастицу с импульсом $-2\pi\mathbf{n}/L$.

Перейдём теперь к электромагнитному полю. В предыдущем параграфе мы уже вывели лагранжиан (7.27), описывающий взаимодействие электромагнитного поля с током, генерируемым точечными заряженными материальными частицами. А сейчас мы выпишем лагранжиан, описывающий электромагнитное поле само по себе.

Основной объект, играющий роль $\varphi(x)$ в этом полевом лагранжиане, — это векторный потенциал $A_\mu(x)$. Наш «скалярный» опыт говорит о том, что кинетическая часть лагранжиана должна быть квадратична по производным A_μ . Можно написать следующее симпатичное лоренц-инвариантное выражение для плотности лагранжиана:

$$\mathcal{L}^{\text{эл-магн}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (7.53)$$

(коэффициент $-1/4$ — это стандартная конвенция).

Плотность (7.53) имеет замечательную симметрию, называемую *калибровочной*. Она инвариантна относительно преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi(x), \quad (7.54)$$

где $\chi(x)$ есть произвольная функция пространственных координат и времени. В самом деле,

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \chi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

Таким образом, в отличие от обычных симметрий типа вращательной или лоренцевой симметрии с конечным числом параметров преобразований (такие симметрии обычно называют *глобальными*), калибровочная симметрия (7.54) есть *локальная* симметрия с бесконечным числом параметров.

В некотором смысле калибровочная симметрия — не вполне симметрия, но свойство, отражающее избыточность нашего описания электромагнитного поля в терминах переменных $A_\mu(x)$. Прямой физический смысл имеет тензор $F_{\mu\nu}$, включающий электрическое и магнитное поля, а не потенциал¹ $A_\mu(x)$.

Именно свойство калибровочной симметрии отличает плотность (7.53) от другой возможной лоренц-инвариантной структуры²

$$(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) \equiv -A_\mu \square A^\mu. \quad (7.55)$$

Структура (7.55) не инвариантна относительно калибровочных преобразований (7.54).

Вообще говоря, плотность лагранжиана $\sim A_\mu j^\mu$, описывающая взаимодействие электромагнитного поля с материей, тоже не инвариантна относительно преобразований (7.54). Однако сам лагранжиан (7.27) *инвариантен* с точностью до полной временной производной — это следует из сохранения тока (7.29) (и, значит, действие $S = \int L dt$ полностью инвариантно).

Плотность лагранжиана (7.40) свободного скалярного поля включает кинетическую часть $(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi)$ и потенциальную часть $-m^2 \varphi^* \varphi$. Можно попытаться также включить потенциальный член для электромагнитного поля. Легко написать релятивистский инвариант:

$$\mathcal{L}_{\text{пот}}^{\text{эл-магн}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu. \quad (7.56)$$

¹ Действительно, мы можем легко измерить E и B , но не φ и A .

² Плотность лагранжиана определена с точностью до полной производной, которая не даёт вклада в действие (7.35).

Однако выражение (7.56) калибровочно не инвариантно и не годится по этой причине.

«Но почему оно не годится? — может спросить читатель. — Требование лоренц-инвариантности я признаю. Лоренцева симметрия — это фундаментальная симметрия нашего мира, и её надо уважать. Но чем плоха лоренц-инвариантная теория массивного векторного поля с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu? \quad (7.57)$$

Да, она калибровочно не инвариантна. Нет, она калибровочно не инвариантна. И что с того?»

Ответ на этот законный вопрос следующий. *Свободная* теория (7.57) ничем не плоха. Проблемы возникают при попытке включить взаимодействие с материей. Оказывается, калибровочно неинвариантная *квантовая* полевая теория (на классическом уровне проблем нет), описывающая взаимодействие массивного векторного поля с материей, *неперенормируема* (мы уже отмечали это в главе 5 и будем обсуждать детально в главе 12). И, значит, она внутренне не самосогласована.

Лагранжевы уравнения движения, следующие из плотности

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eA_\mu j^\mu, \quad (7.58)$$

— это уравнения Максвелла¹

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu. \quad (7.59)$$

Когда внешние токи отсутствуют, эти уравнения описывают распространение света, квантами которого являются безмассовые фотоны.

С другой стороны, уравнение движения, следующее из формулы (7.57), имеет вид

$$(\square + m^2)A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (7.60)$$

¹ Это компактная четырёхмерная запись второй пары уравнений Максвелла в системе (4.31). Первая пара уравнений в системе (4.31) — это просто следствие уравнения (4.32).

Это уравнение Прока похоже на уравнение КФГ¹. Фоковские состояния соответствующего квантового полевого гамильтониана — массивные частицы с единичным спином.

Теперь мы понимаем, чем обусловлена безмассовость физического фотона². Она следует из калибровочной инвариантности лагранжиана электромагнитного поля (7.53), которая в свою очередь необходима, чтобы сделать теорию перенормируемой!

Обратите внимание на то, что только пространственные компоненты вектор-потенциала входят в лагранжеву плотность (7.58) с временными производными. Таким образом, истинные динамические переменные суть только $A(t, \mathbf{x})$, но не $A_0(t, \mathbf{x})$. Поля $A_0(t, \mathbf{x})$ играют роль лагранжевых множителей. Наличие в \mathcal{L} лагранжевых множителей отражает калибровочную избыточность описания системы в терминах переменных A_μ , которую мы отмечали выше. Обобщённые импульсы, отвечающие динамическим переменным $A_i(t, \mathbf{x})$, — это электрические поля:

$$P_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_i} = F^{0i} = -E_i. \quad (7.61)$$

Канонический гамильтониан электромагнитного поля имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\mathbf{P}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (7.62)$$

¹ Это объясняет, кстати, наш выбор знака в формуле (7.56) — мы хотим получить уравнение с осцилляторными, а не экспоненциально растущими решениями; см. примечание на с. 150.

² Экспериментальный верхний предел для фотонной массы составляет $m_\gamma < 3 \cdot 10^{-27}$ эВ. Он следует из дальнего действия электромагнитного взаимодействия — того факта, что электромагнитные поля могут простираться на большие расстояния. Мы уверены, что в нашей Галактике существуют дальнедействующие магнитные поля, потому что наблюдаемый нами свет звёзд немного поляризован, а это можно объяснить только его взаимодействием с межзвёздными магнитными полями. Поэтому комптоновская длина волны фотона не может быть намного меньше размера Галактики.