Глава 1

Геометрия кубических кривых

§ 1. Сложение точек кубической кривой

Плоской алгебраической кривой называется множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — ненулевой многочлен.

На некоторых плоских кривых существуют естественные групповые законы сложения точек. Простейшими примерами таких кривых являются прямая и окружность.

Для того чтобы определить сложение точек на прямой, зафиксируем на ней некоторую точку O. Суммой точек прямой X и Y будем считать такую точку Z, что $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$. Очевидно, что точки прямой образуют коммутативную группу относительно этой операции сложения.

Суммой двух точек $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ и $(r\cos\beta, r\sin\beta)$ окружности $x^2 + y^2 = r^2$ будем считать точку $(r\cos(\alpha+\beta), r\sin(\alpha+\beta))$.

Этот закон сложения точек геометрически можно проинтерпретировать следующим образом. Пусть $E = (r, 0)$, A и B — произвольные точки единичной окружности. Проведем через точку E прямую, параллельную прямой AB; она пересекает окружность в точке C. Будем считать точку C суммой точек A и B (рис. 1).

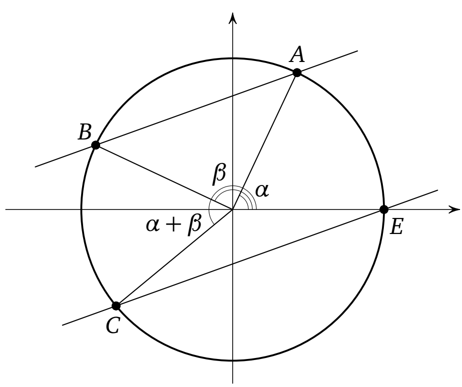

Рис. 1

В таком виде определение годится для любой коники, т. е. кривой второго порядка.

Фиксируем на конике некоторую точку E и будем считать суммой точек A и B точку, в которой прямая, проведенная через точку E параллельно прямой AB, вторично пересекает конику. Коммутативность полученной операции очевидна, нулевым элементом служит точка E. Для нахождения элемента $-A$ нужно провести через точку A прямую, параллельную касательной в точке E. Закон ассоциативности проверяется несколько сложнее. Рассмотрим на конике точки A, B и C. Обозначим точки $A+B$ и $B+C$ через P и Q соответственно. Равенство

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

эквивалентно следующему утверждению: «Если A, B, C, E, P и Q — точки коники, причем $AB \parallel EP$ и $BC \parallel EQ$, то $AQ \parallel CP$». Это частный случай теоремы Паскаля о шестиугольнике, вписанном в конику.

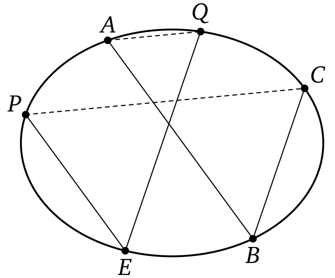

Рис. 2

Для параболы $y=x^2$ с фиксированной точкой $E=(0,0)$ суммой точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будет точка $(x_1+x_2, y_1+y_2+2x_1x_2)$. Для гиперболы $x^2-y^2=1$ с фиксированной точкой $E=(1,0)$ суммой точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будет точка $(x_1x_2+y_1y_2, y_1x_2+y_2x_1)$. При параметризации $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$ это сложение соответствует сложению параметра t.

Кубической кривой называется плоская алгебраическая кривая $\sum\limits_{i,j} a_i x^i y^j = 0$, где наибольшее значение $i+j$ равно трем. На любой неособой кубической кривой (свойства этих кривых мы подробно обсудим в § 3) тоже существует естественный закон сложения точек.

Закон сложения несовпадающих точек произвольной кубической кривой можно определить следующим образом. Отметим на

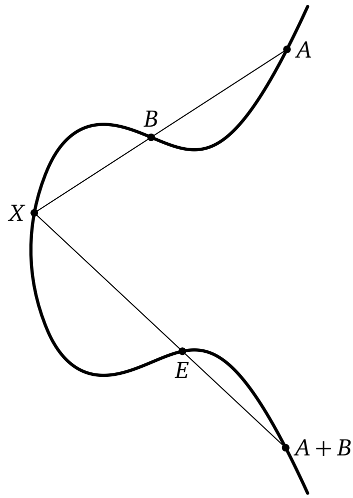

Рис. 3

ней произвольную точку E. Чтобы сложить точки A и B, проведем прямую AB. Она пересечет кубическую кривую в некоторой точке X. Точку пересечения прямой XE с кубической кривой будем считать суммой точек A и B (рис. 3).

В определении сложения дважды использовано следующее свойство кубической кривой: если прямая пересекает ее в двух точках, то она пересекает ее еще ровно в одной точке. Это свойство кажется почти очевидным. В самом деле, из уравнения прямой $ax+by+c=0$ можно выразить x или y и подставить в уравнение кубической кривой. Получим уравнение третьей степени. По условию у него есть два вещественных корня, а значит, должен быть и третий вещественный корень.

В действительности все не так просто. И дело не только в том, что уравнение может иметь кратные корни: его степень может оказаться меньше трех. С этим нам еще придется разобраться (см. § 2), потому что иначе операция сложения точек будет неполноценной: складывать можно будет не все точки.

Коммутативность полученной операции очевидна. Легко проверить также, что E — нулевой элемент. Докажем ассоциативность операции.

Равенство $(A+B)+C=(A+C)+B$ эквивалентно тому, что точка пересечения прямых, соединяющих точки $A+B$ и C, $A+C$ и B,

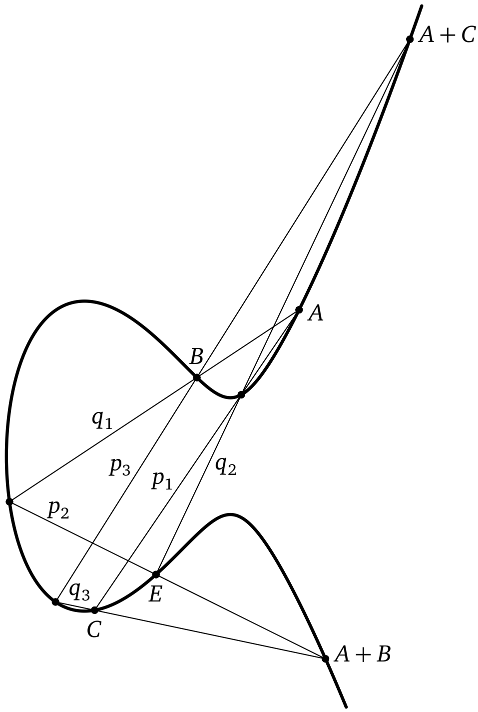

Рис. 4

лежит на кубической кривой (рис. 4). Обозначим изображенные на рис. 4 прямые следующим образом:

$$p_1 = AC, \quad p_2 = E(A+B), \quad p_3 = B(A+C),$$
$$q_1 = AB, \quad q_2 = E(A+C), \quad q_3 = C(A+B).$$

Будем считать, что все точки пересечения прямых p_i и q_j попарно различны. Тогда утверждение, которое нужно доказать, можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Пусть A_{ij} — точка пересечения прямых p_i и q_j, где $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, причем точки A_{ij} попарно различны. Про все точки A_{ij}, кроме точки A_{33}, известно, что они лежат на некоторой кубической кривой. Тогда точка A_{33} тоже лежит на этой кубической кривой.*

Доказательство. Пусть $p_i(x, y) = 0$ и $q_j(x, y) = 0$ — уравнения прямых p_i и q_j. Тогда уравнение третьей степени $p_1 p_2 p_3 = 0$ задает тройку прямых p_1, p_2 и p_3, а уравнение $q_1 q_2 q_3 = 0$ задает трой-

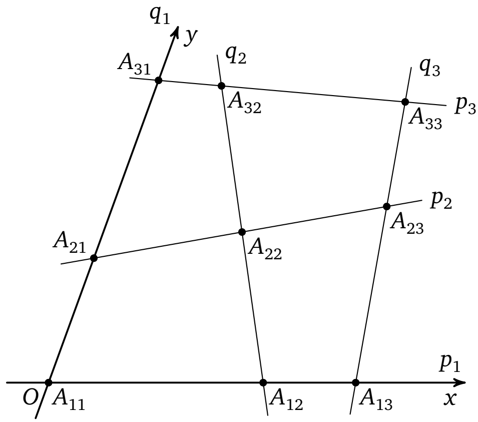

Рис. 5

ку прямых q_1, q_2 и q_3. Кубическая кривая $\alpha p_1 p_2 p_3 + \beta q_1 q_2 q_3 = 0$ проходит через все точки A_{ij}. Оказывается, в таком виде можно представить уравнение любой кубической кривой, проходящей через восемь из девяти точек A_{ij}. Докажем это. Выберем в качестве осей координат прямые p_1 и q_1, т. е. будем считать, что $p_1(x, y) = y$ и $q_1(x, y) = x$. Пусть рассматриваемая кубическая кривая задается уравнением $P(x, y) = 0$. Функции $P(0, y)$ и $yp_2(0, y)\, p_3(0, y)$ обращаются в нуль в трех точках A_{11}, A_{21} и A_{31}, лежащих на оси Oy (рис. 5). Кроме того, эти функции — многочлены степени не более трех. Следовательно,

$$P(0, y) = \alpha y\, p_2(0, y)\, p_3(0, y).$$

Аналогично $P(x, 0) = \beta x\, q_2(x, 0)\, q_3(x, 0)$. Рассмотрим многочлен

$$Q(x, y) = P(x, y) - \alpha y\, p_2(x, y)\, p_3(x, y) - \beta x\, q_2(x, y)\, q_3(x, y).$$

Ясно, что $Q(0, y) = P(0, y) - \alpha y\, p_2(0, y)\, p_3(0, y) = 0$.

Многочлен

$$a_0(y) + a_1(y)\, x + a_2(y)\, x^2 + \ldots$$

тождественно равен нулю при $x = 0$ лишь в том случае, когда $a_0(y) = 0$, т. е. этот многочлен делится на x. Аналогичные рассуждения показывают, что многочлен $Q(x, y)$ делится и на y, т. е.

$$Q(x, y) = xy\, Q_1(x, y).$$

Степень многочлена $Q(x, y)$ не превосходит трех, поэтому $Q_1(x, y)$ — линейная функция или константа. Вспомним теперь, что в точках A_{22}, A_{23} и A_{32} обращаются в нуль многочлены P, p_2p_3 и q_2q_3, а значит, в этих точках обращается в нуль и многочлен Q. А так как во всех этих точках $xy \neq 0$, то в них обращается в нуль и линейная функция Q_1. Точки A_{22}, A_{23} и A_{32} не лежат на одной прямой, а для ненулевой линейной функции f уравнение $f(x, y) = 0$ определяет прямую. Следовательно, $Q_1 = 0$, т. е. $P = \alpha p_1 p_2 p_3 + \beta q_1 q_2 q_3$. В частности, точка A_{33} лежит на кривой $P(x, y) = 0$. □

Мы доказали также, что любая кубическая кривая, проходящая через точки A_{ij}, задается уравнением $\alpha p_1 p_2 p_3 + \beta q_1 q_2 q_3 = 0$. Иными словами, такие кривые образуют однопараметрическое семейство.

С помощью теоремы 1 можно получить очень простые доказательства двух классических теорем.

Теорема 2 (Паскаль)**.** *Точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть $p_1 = AB$, $q_1 = BC$, $p_2 = CD$, $q_2 = DE$, $p_3 = EF$, $q_3 = AF$ (рис. 6). В качестве кубической кривой возьмем кривую, заданную уравнением $Ql = 0$, где $Q = 0$ — уравнение окружности, $l = 0$ — уравнение прямой UV, а U и V — точки пересечения прямых p_1 и q_2, p_3 и q_1 соответственно. Пусть W — точка пересечения прямых p_2 и q_3. Про все остальные точки пересечения прямых p_i и q_j известно, что они лежат на кривой $Ql = 0$. Следовательно,

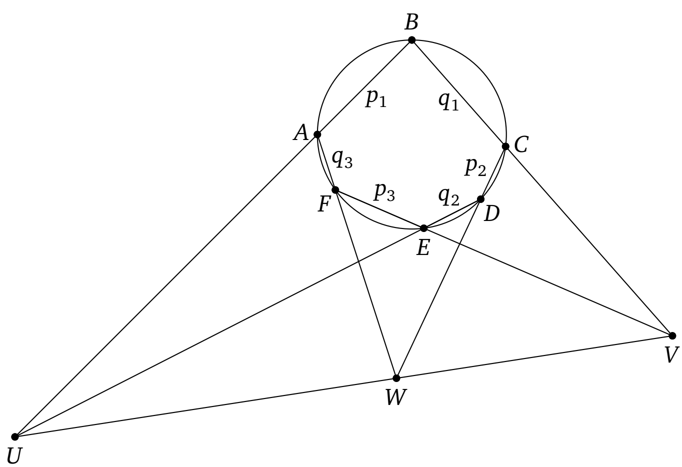

Рис. 6

точка W тоже лежит на этой кривой, причем именно на прямой l, а не на окружности. □

Вместо окружности $Q=0$ можно взять любую кривую второго порядка. В частности, можно считать, что $Q=pq$, где p и q — линейные функции. В этом случае мы получим теорему Паппа.

Теорема 3 (Папп)**.** *На прямой p взяты точки A, C и E, на прямой q взяты точки B, D и F. Прямые AB и DE, BC и EF, AF и CD пересекаются в точках U, V и W соответственно* (*рис.* 7)*. Тогда точки U, V и W лежат на одной прямой.*

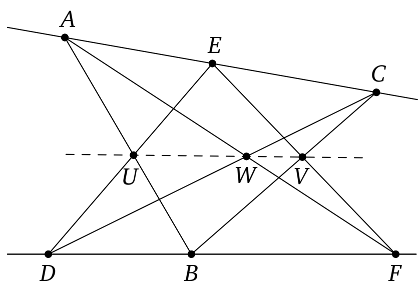

Рис. 7

Доказательство. Дословно повторим доказательство теоремы Паскаля, считая, что $Q=pq$ — уравнение, задающее пару прямых p и q. □

Теорему 1 иногда приходится применять и в тех случаях, когда некоторые из точек A_{ij} совпадают. Поэтому следует понять, как нужно изменить ее формулировку, чтобы она оставалась верной и в таких ситуациях. Попарное различие точек A_{ij} использовалось для обоснования двух утверждений:

1) в точках A_{22}, A_{23} и A_{32} величина xy отлична от нуля, поэтому линейная функция Q_1 в них обращается в нуль;

2) эти точки не лежат на одной прямой, поэтому $Q_1 \equiv 0$.

В процессе доказательства теоремы 1 используются лишь ограничения многочлена P на прямые p_i и q_j. Поэтому можно ожидать, что вместо попарного различия точек A_{ij} достаточно предположить следующее: «Если две (соответственно три) точки A_{ij}, лежащие на прямой p_i или q_j, совпадают, то ограничение многочлена P на эту прямую имеет в этой точке корень кратности два (соответственно три)». Это изменение относится и к точке A_{33}.

Покажем, что так сформулированная теорема 1 остается верной. Доказательство того, что многочлен

$$Q = P - \alpha p_1 p_2 p_3 - \beta q_1 q_2 q_3$$

делится на $xy = p_1 q_1$, сохраняется без изменений. Если $A_{ij} = A_{ik} = A$, то в точке A ограничение P на p_i имеет корень кратности два, ограничение $p_1 p_2 p_3$ тождественно равно нулю, а ограничение $q_1 q_2 q_3$ имеет корень кратности два, так как $q_j(A_{ij}) = 0$ и $q_k(A_{ik}) = 0$. Следовательно, в точке A ограничение Q на p_i имеет корень кратности два. Для прямой q_j, а также в случае трех совпадающих точек рассуждения аналогичны. Теперь ясно, что в точках A_{22}, A_{23} и A_{32} линейная функция Q_1 по-прежнему обращается в нуль. В том случае, когда некоторые из этих точек совпадают, нужно воспользоваться тем, что ненулевая линейная функция на прямой не может иметь корень кратности два. Что же касается утверждения теоремы 1, то ясно, что для ограничения функции $\alpha p_1 p_2 p_3 + \beta q_1 q_2 q_3$ на прямую p_3 кратность корня в точке A_{33} равна количеству прямых q_j, проходящих через эту точку.

Для прямой l, касающейся кривой $F(X) = 0$ в точке X_0, ограничение F на l имеет в точке X_0 корень кратности два. В самом деле, пусть точка X_1 движется по этой кривой к точке X_0. Ограничение функции F на прямую $X_0 X_1$ имеет корни X_0 и X_1. В предельном положении прямая $X_0 X_1$ совпадает с l и корни X_0 и X_1 сливаются в один корень кратности два (рис. 8 *а*). Слияние трех корней происходит на касательной в точке перегиба (рис. 8 *б*). Более подробно точки кратного пересечения прямой и кубической кривой мы обсудим в § 3.

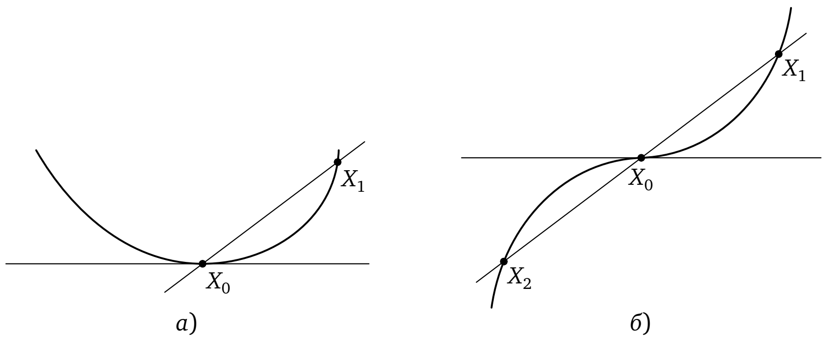

Рис. 8

Для кривых степени $n \geqslant 3$ теорему 1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* A_{ij} — *точка пересечения прямых* p_i *и* q_j, *где* $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *причем точки* A_{ij} *попарно различны. Про все точки* A_{ij}, *для которых* $i + j < n + 3$, *известно, что они лежат на кривой степени* n. *Тогда и остальные точки* A_{ij} *тоже лежат на этой кривой.*

Доказательство. Проведем индукцию по степени кривой n. База индукции $n = 3$ была рассмотрена при доказательстве теоремы 1. Пусть теперь $n > 3$. Выберем в качестве осей координат прямые p_1 и q_1. Пусть кривая, о которой идет речь в условии теоремы, задается уравнением $P_n(x, y) = 0$. Тогда $P_n(0, y) = \alpha p_1 \dots p_n$ и $P_n(x, 0) = \beta q_1 \dots q_n$. Рассмотрим многочлен $Q_n = P_n - \alpha p_1 \dots p_n - \beta q_1 \dots q_n$. Достаточно доказать, что $Q_n \equiv 0$. Легко проверить, что Q_n делится на $xy = p_1 q_1$, т. е. $Q_n = p_1 q_1 Q_{n-2}$. Остается доказать, что ненулевой многочлен Q_{n-2} степени не более $n - 2$ не может обращаться в нуль в точках A_{ij}, где $i, j \geqslant 2$ и $i + j < n + 3$ (на рис. 9 они изображены для $n = 5$). Предположим, что такой ненулевой многочлен Q_{n-2} существует. Его ограничение на прямую p_2 обращается в нуль в $n - 1$ точке $A_{22}, A_{23}, \dots, A_{2n}$. Следовательно, ограничение Q_{n-2} на эту прямую тождественно равно нулю, т. е. $Q_{n-2} = p_3 Q_{n-3}$. Многочлен Q_{n-3} обращается в нуль в точках, образующих аналогичную конфигурацию меньшего размера (на рис. 9 эти точки обведены). Эти рассуждения показывают, как делается шаг индукции. $\square$

Метод доказательства геометрических теорем с помощью семейства кривых $p_1 p_2 p_3 + \mu q_1 q_2 q_3 = 0$ был разработан немецким математиком Юлиусом Плюккером (1801—1868). Идея представить тройку прямых как вырожденную кубическую кривую оказалась

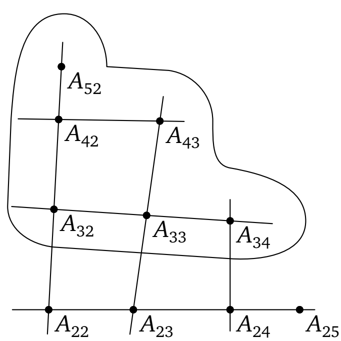

Рис. 9

весьма плодотворной. Доказательства многих сложных геометрических теорем сводились теперь к умелому подбору коэффициента μ, который стал часто появляться в статьях Плюккера. Такая алгебраизация геометрии не всем пришлась по душе. Якоб Штейнер (1796—1863), один из крупнейших геометров того времени, отказывался даже приписывать знаки геометрическим величинам и предпочитал вместо этого рассматривать различные варианты расположения точек. И при этом ему порой удавалось получать более тонкие и глубокие результаты, чем Плюккеру. О новых алгебраических методах в геометрии Штейнер отзывался неодобрительно.

Задачи

1. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, BC и AD — в точке Q. Кубическая кривая проходит через точки A, B, C, D, P, Q. Докажите, что касательные в точках P и Q пересекаются в точке, лежащей на этой кривой.

Указание. Примените теорему 1 в случае, когда $A_{31}=A_{32}$ и $A_{13}=A_{23}$.

2. Прямая пересекает кубическую кривую в точках A, B и C. Касательные в точках A, B и C пересекают кривую в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Указание. Примените теорему 1 в случае, когда $p_1=p_2$.

3. Восьмиугольник со сторонами $l_1, \ldots, l_8$ вписан в конику. Докажите, что восемь точек пересечения прямых l_i и l_j, где $j-i\equiv 3 \pmod 8$, лежат на одной конике.

Указание. Пусть $p_i=l_{2i-1}$, $q_i=l_{2i}$, $C_1=0$ — исходная коника, $C_2=0$ — коника, проходящая через пять из восьми оставшихся точек пересечения прямых p_i и q_j. Примените теорему 2 к кривой $C_1C_2=0$.

4. Докажите, что уравнение любой кривой степени $n-1$, проходящей через все точки пересечения прямых $p_1=0, \ldots, p_n=0$, имеет вид

$$p_1\ldots p_n\Big(\frac{\lambda_1}{p_1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{p_n}\Big)=0,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — некоторые константы. (Предполагается, что все точки пересечения попарно различны.)

Указание. Пусть $C=0$ — уравнение такой кривой. Рассмотрим прямую l, не проходящую через точки пересечения прямых p_i. Числа можно подобрать так, чтобы во всех n точках пересечения прямой l с прямыми p_i выполнялось равенство

$$C-p_1\ldots p_n\Big(\frac{\lambda_1}{p_1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{p_n}\Big)=0.$$

Такое же равенство выполняется тогда в n точках любой из прямых p_i.