Джон Конвей: человек, который играл в математику

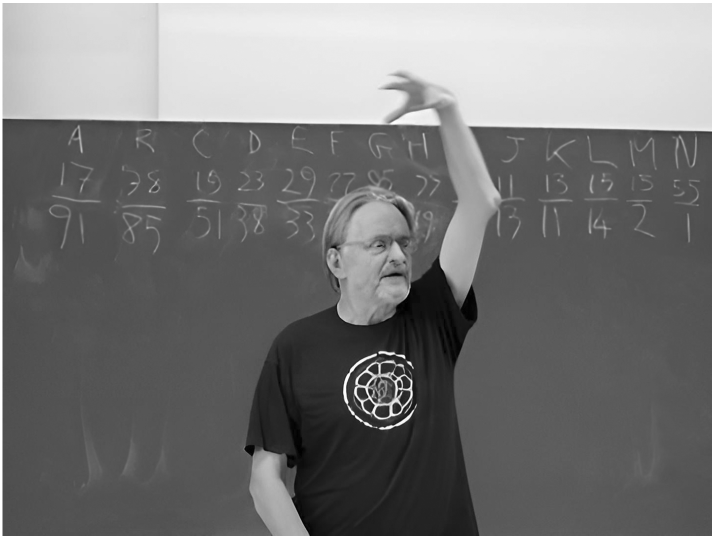
Д. Шляйхер

Джон Конвей был одним из самых легендарных математиков нашего времени: глубочайший исследователь, он в то же время много интересовался занимательной и «повседневной» математикой, получая результаты и открывая пути, важные для всех нас. Он всегда был готов включиться в игру, особенно если придумал её сам. Он был единственным в своём роде — как математик, как учитель, как друг. Невозможно воздать должное всем граням его личности, но я хотел бы осветить те из них, которые наиболее впечатлили меня; см. также [CI].

§ 1. Математика повседневности: дни недели и фаза луны

Позвольте мне начать с «математики повседневности». Один из многих талантов Конвея — замечать взаимосвязи, которые никто больше не видел. Это позволило ему за секунды вычислять день недели для любой даты в прошлом, настоящем и будущем. Часто ему хватало лишь около 15 секунд, чтоб вычислить день недели для 10 (!) случайных дат. Это достигалось благодаря не только быстроте его ума, но и открытому им «алгоритму судного дня». Алгоритм основан на наблюдении, что в любом году следующие даты приходятся на один и тот же день недели: 4/4, 6/6, 8/8, 10/10 и 12/12 (4 апреля, …, 12 декабря). Если, например, вспомнить, что в 2021 г. все эти даты приходятся на воскресенье, то можно сразу сказать, что день рождения Конвея, 26 декабря, в 2021 г. тоже воскресенье — через две недели после «декабрьского судного дня». Правило «судного дня» (описанное

Сокращённая и отредактированная версия опубликована на английском языке: «The Mathematical Intelligencer», June 2021, v. 43, № 6, p. 1–13. Частичная поддержка работы: European Research Council, Advanced Grant 695621 HOLOGRAM..



Джон Хортон Конвей в августе 2012 г. читает лекцию
по Фрактрану в Университете Якобса (Бремен)

в дополнении A) весьма замечательно — и особенно замечательно то, что явно никто его не заметил до Конвея.

Ненамного труднее вычислить в уме с разумной точностью фазу луны, снова для любой даты в прошлом, настоящем и будущем. Это ещё одна формула, открытая Конвеем, — неожиданно простая, если сравнить её с достаточно сложной точной формулой, которую даёт физика. Как следствие, можно легко вычислить, когда будет пасха в любом данном году (Карл Фридрих Гаусс вывел для этого свою формулу). Мы объясним метод Конвея в дополнении B.

§ 2. Игра «Жизнь»

Оба факта, о которых сказано выше, принадлежат «математике повседневности». Я узнал их от Джона и постоянно использую. Хотя они и удивительны, но, разумеется, это не результаты глубоких исследований. Прежде чем перейти к таковым, давайте рассмотрим самое, быть может, известное изобретение Конвея — *игру «Жизнь»*. На самом деле это *клеточный автомат*, который действует на бесконечной квадратной решётке (в действительности это не игра, так как игрок не требуется). Каждая клетка в решётке находится в одном из двух возможных состояний, «белом» или «чёрном» (или, что эквивалентно, например, «мёртвом» или «живом»). Если дано состояние всех клеток в некоторый момент времени, то состояние в следующий момент определяется очень простым правилом, причём для каждой клетки состояние зависит лишь от предыдущего состояния этой клетки и восьми её соседей (см. дополнение C). Правило простейшее, и замечательно, какую сложность оно порождает: у многих из нас написаны программы для визуализации этой «игры», и можно получить яркое впечатление, наблюдая её на анимированных вебсайтах вроде `https://en.wikipedia.org/wiki/Conway's_Game_of_Life`. Отсюда и её название: экран компьютера как бы оживает. На рис. 1 показана типичная возникающая конфигурация. Примечательно, что даже гугл по запросу «игра „Жизнь“» выдаёт эмуляцию игры прямо на экране с результатами поиска.

Имеются простые начальные конфигурации всего лишь из пяти живых клеток — они называются *планерами* и движутся через экран по диагонали. Есть и более сложные конфигурации, *планерные ружья*, которые периодически «выстреливают» планеры; см. рис. 1 и дополнение C.

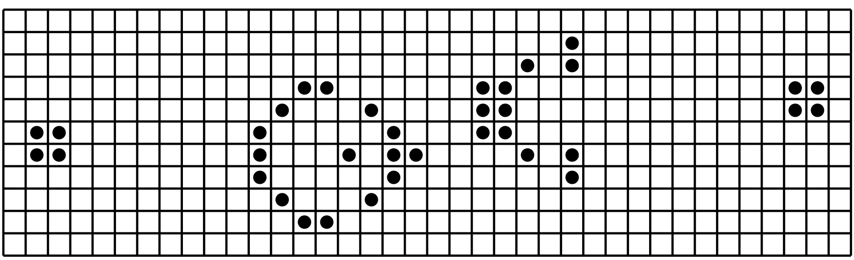


Рис. 1. Типичная конфигурация из игры «Жизнь»: живые клетки закрашены чёрным, а мёртвые клетки пусты. Данная конфигурация называется «планерное ружьё» и открыта Биллом Госпером

Больше всего впечатляет, что эта простейшая система полна по Тьюрингу: в принципе она способна выполнить любое вычисление, доступное самому продвинутому компьютеру (хотя гораздо медленнее). Сегодня это легко запрограммировать для компьютера, но Конвей создавал «Жизнь» примерно в 1970 г. на досках для игры в Го в комнате отдыха кембриджских математиков, используя помощь ряда студентов, отвечавших за различные части доски. Ранее было известно, что существуют клеточные автоматы, полные по Тьюрингу

(Джон фон Нейман описал один из них). Но их описание было основано на доказательстве соответствующих свойств, а Конвей был убеждён, что почти любой не совсем тривиальный клеточный автомат должен быть полон по Тьюрингу: Конвей верил в возможность «построить его без построения», предоставив простоте выполнять работу по созданию сложности. Он проверил методом проб и ошибок множество простейших возможных систем, пока не нашёл ту, которая сделала его знаменитым. Это была «мечта его юности» (Jugendtraum), лежавшая в основе многого сделанного им: простейшие системы должны иметь значительную, если не универсальную мощь.

В частности, игра «Жизнь» неразрешима: нет алгоритма для проверки, приведёт ли произвольная начальная конфигурация (из конечного количества клеток) к заданной конечной конфигурации. В противном случае игру можно было бы использовать для эмуляции любых компьютерных программ и таким образом решить проблему остановки — образец неразрешимой компьютерной проблемы.

Создав игру «Жизнь», Конвей стал знаменит в сфере науки — далеко не только в математике, — а также в области занимательной математики, после того как журнал «Scientific American» в 1970 г. представил игру широкой аудитории. Тот факт, что очень простая начальная конфигурация может привести к очень сложному и непредсказуемому поведению, породил множество интерпретаций и гипотез, например, что простые детерминированные системы могут допускать макроскопическое поведение, соответствующее наличию «сознания» и «свободы воли».

Иногда Конвею приписывают сожаление о том, что он изобрёл игру «Жизнь», и даже «ненависть» к ней; как я понимаю, его задевало, что его «сводят» к одному этому достижению [CI, p. 570]; но это вполне могло измениться со временем.

§ 3. Фрактран

Мечту юности Конвея материализует ещё одно его изобретение — Фрактран. Его вдохновила задача о знаменитой классической последовательности — «$(3n+1)$-проблема», известная также под многими другими именами, например как «проблема Коллатца»: возьмём произвольное натуральное n; если оно чётно, разделим его на 2, а если нечётно — заменим на $3n + 1$. Повторим это с полученным числом, и так до бесконечности. Например, число 14 (чётное) переходит в 7;

это число нечётно и переходит в 22, затем в 11, затем в 34, затем в 17, 52, 26, 13 и т. д. Все когда-либо проверенные натуральные числа в итоге приземляются на цикл $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$ (и это проверено до многих миллиардов), но никому не удалось объяснить почему.

Конвей предложил простое концептуальное обобщение, а именно Фрактран [C-F]. «Программа» Фрактрана — это конечный список дробей, например

$$\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, \frac{55}{1}.$$

Рассмотрим такую итерационную процедуру, как в проблеме Коллатца: для данного натурального числа n найдём первую дробь p/q в списке, при умножении которой на n получается целое число (иначе говоря, найдём первый знаменатель, который делит n), а затем заменим n на произведение np/q. Повторим это с полученным числом. Как и в проблеме Коллатца, имеется конечное количество случаев в зависимости от свойств делимости n, и в каждом случае n заменяется его образом при простом отображении (таком как $n \mapsto 3n+1$ или умножение на дробь). Этот конкретный список дробей обладает замечательным свойством: если начать с 2 и выполнять итерации до бесконечности, то окончательный список чисел содержит бесконечно много степеней двойки, а их показатели в том порядке, в каком они появляются, — это в точности простые числа! Разумеется, это не свойство простых чисел, а следующий результат об универсальности: любая вычислимая функция может быть вычислена с помощью такого конечного списка дробей! Иначе говоря, Фрактран тоже полон по Тьюрингу. Существует даже конечный список дробей, который универсален в том смысле, что может вычислить какую угодно вычислимую функцию. От такого списка дробей не требуется большая длина: достаточно 23 дробей, и до сих пор стоит одна из задач, поставленных Конвеем, — построить самый короткий из таких списков. (Конвей говорит, что однажды ему дали универсальную программу Фрактрана, состоящую всего из семи дробей, хотя и очень сложных; но Конвей потерял эту бумажку, а создавший её студент давно умер. Задача остаётся!)

Поскольку Фрактран полон по Тьюрингу, он алгоритмически неразрешим: невозможно определить, оборвётся ли когда-нибудь (например, достигнув единицы) наперёд заданный набор дробей, начинающийся с определённого числа. Это приводит к вопросу, какое наименьшее количество дробей приводит к неразрешимости. Как показывает список Конвея, для неразрешимости заведомо достаточно 23 дробей; согласно рассказу, приведённому выше, может хватить и семи дробей. Ясно, что двух дробей не хватит; но каково наименьшее количество? Неразрешима ли $(3n+1)$-проблема?

Конвей верит, что достаточно трёх случаев. Он построил следующую «немузыкальную перестановку» (amusical permutation)[1], см. [C-A]: если число n чётно, положим $n=2k$ и заменим n на $3k$; если n нечётно, представим его как $4k+1$ или $4k-1$ и заменим соответственно на $3k+1$ или $3k-1$. Ясно, что получается перестановка на множестве всех целых чисел. Легко видеть, что некоторые числа порождают периодическую последовательность; например, 2 переходит в 3, а 3 переходит снова в 2. Для других целых чисел это не столь очевидно. Конвей, в частности, утверждает, что

(1) орбита числа 8 не периодична, а, напротив, уходит на бесконечность;

(2) утверждение (1) верно, но не может быть доказано;

…

$(n+1)$ утверждение (n) верно, но не может быть доказано.

На самом деле Конвей говорит: все мы знаем, что в математике есть верные, но недоказуемые теоремы, но мы склонны думать, что они для нас далеки и темны, а на самом деле «зверь рядом». В статье [C-A], где описана «немузыкальная перестановка», Конвей подчёркивает, что очень многие результаты «очевидно» верны и «очевидно» недоказуемы. И заканчивает дерзким утверждением, что если кто-то разочарован тем, что статья не содержит доказательств, — ну как раз в этом и дело! Мечта юности Конвея в своём лучшем виде!

Я давно осознал, что эта юношеская мечта заслуживает более последовательного изложения. Оно должно связать универсальность игры «Жизнь» и Фрактрана, двух ранних («юношеских») изобретений Конвея, с неразрешимостью его перестановки (одна из его поздних публикаций); так что, похоже, Конвей не забывал свою мечту в течение всей жизни (и без сомнения намеревался к ней вернуться [Ro, p. 168]). Я помогал в редактировании его статьи [C-A] о «немузы-

[1] Игра слов, характерная для Конвея. В этой перестановке появляется константа, измеряющая отклонение музыкального тона от чистого (его «немузыкальность»). Но слово amuse означает «забавлять», и Конвей пишет о перестановке: it has amused me to call it amusical (мне было забавно назвать её немузыкальной). — *Прим. составителей.*

кальной перестановке» (совместно с Алексом Рыба). В ранних версиях Конвей связывал эти идеи с работами Гёделя по неразрешимости и с проблемой остановки для машины Тьюринга. Алекс и я усиленно поддерживали его в намерении показать эти важные взаимосвязи, но в итоге Джон решил, что статья окажется лучше без них, и удалил уже написанный текст о взаимосвязях. Я продолжал подталкивать его к тому, чтобы написать обо всём этом, но он решил, что эта тема — лишь предмет «моей одержимости». В итоге мы пришли к ситуации «моя одержимость против его одержимости», и я был вынужден сдаться. Лишь недавно я осознал, что эта идея была юношеской мечтой Конвея; в его биографии [Ro] она возникает повсюду. Я по-прежнему хочу, чтобы кто-нибудь подробно написал об этой его мечте — «глубочайшем вопросе жизни, Вселенной и вообще всего».

§ 4. Игры Конвея и сюрреальные числа

Одно из открытий Конвея, наиболее впечатляющих меня, — его теория игр и «сюрреальных» чисел. Можно утверждать, что он ввёл в рассмотрение больше чисел, чем кто-либо другой, и, быть может, никто не сумеет ввести больше в некоем строгом смысле. Его определения просты почти до неправдоподобия, и однако он создаёт новый мир чисел, ПОЛЕ, содержащее и действительные числа, и ординалы. Я следую традиции Конвея писать ПОЛЕ большими буквами, так как этот объект слишком велик, чтобы содержаться в каком-либо множестве: даже одних ординалов слишком много, чтобы охватить их обычной теорией множеств, а Конвей с лёгкостью создаёт свои числа с арифметикой, необходимой для поля, и всё это — игры с весьма естественными правилами! (Можно возразить, что ординалы — столь же многочисленный класс, как сюрреальные числа Конвея, и они были известны до Конвея; но их арифметика бедна, и в ней отсутствует даже коммутативность сложения.)

Мы говорим об играх двух участников, которых обычно называют Левые и Правые; это игры двух лиц с полной информацией, такие как шахматы и Го: никаких случайностей, никаких тайных карт на руках. И опять Конвей чувствует, что, хотя шахматы и удовлетворяют нужным определениям, всё же эта игра «не совсем хороша»: её правила слишком сложны (она не обладает «божественной простотой»). Как всегда, ему нравится сложность, возникающая из очень простых правил.

Определения игр и чисел Конвея очень просты и естественны, хотя эта простота может требовать некоторого пояснения. После дальнейшего упрощения они имеют примерно следующий вид.

Определение (игры и числа).

(1) Если L и R — два множества игр, то упорядоченная пара (L, R) является *игрой*.

(2) Все игры создаются таким образом.

(3) Игрок может *выиграть*, если у противника нет хорошего хода.

(4) Игра называется *числом*, если ни один из участников не имеет намерения делать ход (в любой из своих позиций).

Кратко объясним, что это значит; дальнейшие подробности приведены в дополнении D.

Игра полностью определяется множеством возможных ходов двух игроков, а каждый такой ход сам по себе является игрой, которая также характеризуется множеством возможных ходов. Так что надо рассматривать игру не как «шахматы с множеством общих правил, например, что ладья всегда ходит по прямой», а скорее как «конкретную ситуацию в такой игре, где все фигуры занимают определённые позиции». В такой ситуации возможные ходы для отдельного игрока — это в действительности ситуации, в которые можно перейти. Таким образом, L — множество возможных ситуаций (=игр), в которые могут перейти Левые, а R — аналогичное множество для Правых. Например, в начальной ситуации шахмат игрок Белые располагает множеством из 20 возможных ситуаций, куда можно перейти (каждая из восьми пешек может продвинуться на одну или две клетки, а оба коня имеют по два хода), и аналогично для Чёрных. Каждая из этих 20 ситуаций сама по себе является игрой с возможными ходами для Белых и Чёрных.

Разумеется, такое определение игры рекурсивно в высокой степени. И как придать ему смысл, если для того, чтобы определить игру, мы уже нуждаемся в двух множествах игр? Но ведь некоторое множество игр имеется всегда: пустое множество. Соответственно, тривиальная игра — это игра, где у игроков нет возможных ходов; она называется нулевой игрой, но она вполне корректно определена (правда, скучновата). Условие (2) требует, чтобы каждая игра в итоге заканчивалась: более точная формулировка — чтобы не было бесконечной последовательности ходов из одной позиции в другую. Это основа многих индуктивных доказательств Конвея.

Игрок проигрывает, если его очередь ходить, но возможных ходов нет (множество ходов пусто), и тогда выигрывает другой. Это закодировано в условии (3): игрок выигрывает, если у противника вообще нет ходов или, рекурсивно, если независимо от действий противника у него всегда есть «хороший ход», так что он никогда не останется без возможных ходов, пока это не произойдёт с противником. Это условие неявно означает, что игроки ходят по очереди.

Самым естественным образом из игр образуется абелева ГРУППА (снова большими буквами). Противоположный элемент для игры — та же игра, где игроки обменялись множествами возможных ходов. Способ сложения двух и более игр тоже естествен: игрок выбирает одну из игр-слагаемых и делает в ней ход, ничего не меняя в остальных играх. Это определение вполне естественно для многих игр, включая Го (но в меньшей степени для шахмат): отсюда возникает теория эндшпилей в Го, которая в некоторых ситуациях позволяет побеждать больших мастеров.

Наконец, условие (4) выделяет интересное подмножество в множестве игр, в терминологии Конвея — *числа*; точную формулировку мы приводим в дополнении D. Чтобы отличить их от известных видов чисел, их часто обозначают термином «числа Конвея» или «сюрреальные числа», следуя Кнуту [K]. Заранее совсем не ясно, что такое определение ведёт к чему-то содержательному, но это действительно так. В частности, такие числа можно умножать и делить, и мы получаем ПОЛЕ.

Отсюда совсем легко извлечь ординалы: ординал (порядковое число) — это число Конвея, в котором множество R пусто, а L состоит лишь из ординалов. Снова рекурсивное определение. Если не считать пустых множеств R, оно сводится к тому, что ординал — множество (меньших) ординалов. Полное упорядочение возникает из условия (2). На языке игр получаем следующее: Правые не имеют никаких ходов вообще, а Левые могут пойти из данного ординала в любой меньший ординал. Такое правило даёт некоторое преимущество Левым, но эту игру можно добавить, например, к шахматам, или к любому ординалу, или к противоположной ему игре, и такие суммы могут оказаться вполне интересными.

Чуть труднее извлечь отсюда действительные числа. Если в условии (1) ограничиться конечными множествами, мы получим все диадические числа (т. е. числа вида $k/2^n$), так что какие-то бесконечные множества необходимы. Легко описать игры, в которых один игрок имеет преимущество в три хода перед другим; нахожу занятным, что столь же легко описать игры, где один из игроков имеет преимущество ровно в полхода или в семь шестнадцатых хода. Но нетрудно построить также игры, где преимущество одного из игроков составляет ровно треть хода или ровно π ходов. И столь же легко строятся игры, где преимущество бесконечно велико или бесконечно мало. Несколько примеров мы приводим в дополнении D. При построении действительных чисел представляется, что технически (но не педагогически) гораздо легче делать это методом Конвея: при традиционном способе вначале нужно построить натуральные числа, затем целые, рациональные и наконец действительные, попутно доказывая снова и снова множество свойств. Напротив, «сюрреальные» числа Конвея сразу строятся вполне легко, и по существу единственный трудный шаг — избавиться от всех лишних «недействительных» чисел. (См. в [K] занимательный рассказ об открытии сюрреальных чисел.)

Положительная игра определяется очень просто: в ней L имеет выигрышную стратегию, кто бы ни начинал; и игра является *отрицательной*, если R имеет выигрышную стратегию, кто бы ни начинал. Разумеется, исход игры мог бы зависеть от того, L или R делает первый ход. Игра называется *нулевой*, если начинающий проигрывает (т. е. второй игрок выигрывает). И наконец, бывают *нечёткие* игры, в которых выигрышную стратегию имеет первый игрок. Ясно, что любая игра принадлежит одному из этих четырёх классов в зависимости от исхода.

Вполне элементарно доказывается, что прибавление нулевой игры к любой другой не меняет исход (см. дополнение D); этим оправдывается её название. В нечётких играх у каждого игрока есть стимул сделать ход — и, значит, эти игры не являются числами, согласно условию (4). Числа, во вполне строгом смысле, «не хотят, чтобы в них играли; они хотят, чтобы их складывали», а победитель определяется просто по знаку суммы.

Отметим, кроме чисел, и другой интересный и важный класс игр. Если в случае чисел два игрока должны делать разные ходы, то *равноправная* (*беспристрастная*) *игра* такова, что оба игрока имеют одно и то же множество возможных ходов — в начале и в течение всей игры. Таким образом, можно отождествить множества L и R и свести их определение к следующему: *равноправная игра есть множество равноправных игр*; *все равноправные игры создаются таким образом*. (Чтобы подчеркнуть аналогию с п. (1) данного выше определения игр, можно сказать так: *если G — любое множество равноправных игр, то множество G называется равноправной игрой*.)

Частный случай равноправных игр — игра Ним: из данной кучи предметов игрок при очередном ходе удаляет любое положительное количество предметов, так что куча становится строго меньше. Разумеется, это тривиальная игра: если изначальная куча непуста, первый игрок выигрывает, удалив всю кучу. Но ситуация становится интереснее при сложении таких игр самым естественным способом: при каждом ходе игрок уменьшает одну из куч, а остальные кучи не трогает (в точности конвеевское стандартное определение сложения игр, и это приводит как раз к стандартной игре Ним). На самом деле у Конвея эти кучи вполне могут быть бесконечными: их размер может быть любым ординалом, а ход может привести к любому меньшему ординалу.

Основная теорема о равноправных играх следующая: любая равноправная игра, конечная или нет, равна единственной куче для Нима, которая соответствует ординалу; поэтому Конвей называет такую кучу «нимбер»[2)]. Первый игрок выигрывает всегда, когда размер этой кучи не равен нулю. Вся трудность — в вычислении размера (Ним-значения) этой кучи, и в принципе есть простое правило: рассмотрим множество всех возможных ходов (напомним, что равноправная игра как раз и есть это множество); по предположению индукции все эти ходы являются нимберами (т. е. равны ординалам), а Ним-значение игры равно наименьшему нимберу, который не лежит в этом множестве. (Для конечных игр это часто называют *теорией равноправных игр Шпрага — Гранди*, но отметим, что определение Конвея попутно расширяет эту теорию на игры размером с любой ординал.)

Позвольте мне закончить этот параграф простым, но, может быть, удивительным наблюдением: в конкретной игре нередко оказывается, что можно определить, кто из двух игроков имеет выигрышную стратегию, но это не даёт ключа к отысканию этой стратегии. Например, можно ввести правило, что первый игрок делает ход по своему выбору, а затем второй игрок может выбрать, будут ли они продолжать как обычно или поменяются ролями. Так что если первый игрок сделает очень сильный первый ход, то второй наверняка захочет перехватить эту выигрышную позицию, а если ход был слабым, то второй радостно с этим согласится. В результате второй игрок теоретически имеет выигрышную стратегию, но этот факт совершенно не помогает реально

[2)] От слов «ним» и «number (число)». — *Прим. составителей.*

выиграть. Например, такой выбор сторон после первого хода часто применяется в известной (и горячо рекомендуемой читателю) игре Гекс, и по ней проводятся серьёзные турниры — по игре, в которой известно, что у второго игрока есть выигрышная стратегия!

§ 5. Теория групп, лунный свет и Монстр

Теперь обратимся к исследованиям Конвея, находящимся на переднем крае науки. Группы — один из самых важных блоков в построении всей математики (и других сфер деятельности, столь различных, как физика, химия и искусство). Понимание устройства групп начинается с «простых» групп: тех, которые нельзя дальше упростить взятием факторгрупп. При этом известна полная классификация конечных простых групп: к ним относятся циклические группы простых порядков, группы чётных перестановок конечных множеств, ряд так называемых «групп типа Ли», а также 26 «спорадических» групп. Эта классификация всех конечных простых групп — одно из монументальнейших достижений всей математики, потребовавшее нескольких тысяч страниц текста (часть из них появилась совсем недавно).

Особенно трудно было разобраться с 26 спорадическими группами, и даже задним числом никто не составил из них единую картину. Некоторые из них открыл Матьё в 1861 г., а все остальные найдены за восемь лет с 1965 по 1973 г. Некоторые спорадические группы имеют гигантский размер: «Монстр» состоит из более чем 10^{53} элементов. Конвей в 1969 г. открыл три спорадические группы, все они — в большей по размерам групп половине списка.

Простые группы и особенно спорадические группы выглядят совершенно таинственно (это слова неспециалиста). Важный вклад Конвея заключался в разработке и составлении, при поддержке коллег, объёмной книги под названием «АТЛАС конечных групп» [C-W]. В ней сделана попытка представить структуру и собрать всю информацию об этих группах, и сейчас работа над ней продолжается как онлайн-проект.

Монстр, самая большая из спорадических групп, выглядит особенно таинственно. Коснёмся одного его свойства, которое оказалось столь мистическим, что Конвей назвал его «лунный свет» (в смысле «слишком безумно, чтобы быть реальным»).

Группа получает дополнительную структуру, если рассматривать её как группу симметрий геометрического объекта, и эта геометрия помогает понять группу гораздо лучше, чем её абстрактные свойства.

Монстр может действовать на векторных пространствах разной размерности: в размерности 1 он действует тривиально; следующие размерности, где он действует (неприводимым образом), — это 196 883, затем 21 296 876 и т. д.

Теперь совершим скачок в совсем другую область математики — теорию эллиптических кривых. Такую кривую можно описать как множество всех точек вида

$$(x, y) \in K \times K\colon \ y^2 = 4x^3 - ax - b,$$

где K — любое (алгебраически замкнутое) поле. Эллиптические кривые играют важнейшую роль во всей математике (Эндрю Уайлс решил заняться доказательством последней теоремы Ферма, как только Герхард Фрей осознал её связь с эллиптическими кривыми). Любая эллиптическая кривая над $\mathbb{C}$ биголоморфно эквивалентна комплексному тору, который получается, если профакторизовать $\mathbb{C}$ по некоторой решётке $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, где $\operatorname{Im} \tau > 0$. Часто оказывается, что различные значения τ приводят к эквивалентным решёткам и, следовательно, к эквивалентным эллиптическим кривым; на верхней комплексной полуплоскости определена хорошо известная функция j, для которой $j(\tau) = j(\tau')$ в точности тогда, когда соответствующие эллиптические кривые эквивалентны. Этот инвариант глубоко изучался разными методами. В частности, хорошо известно, что для $q = e^{2\pi i\tau}$ мы имеем

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196\,884q + 21\,493\,760q^2 + \ldots$$

Первое поразительное наблюдение состоит в том, что здесь присутствует число 196 883, сдвинутое на единицу. Иначе говоря, коэффициент в разложении функции j равен сумме размерностей первых двух представлений Монстра.

Более того, $21\,296\,876 + 196\,883 + 1 = 21\,493\,759$: следующий коэффициент равен сумме размерностей первых трёх представлений Монстра. Мистика? Призрак? Лунный свет!

Подобная закономерность продолжает действовать и для дальнейших коэффициентов. Это заметил Джон Маккей, который обращался к различным специалистам по теории групп. В конце концов они посоветовались с Джоном Конвеем, который знал столь много о строении групп и умел находить закономерности, как никто другой. В результате появилась статья Конвея и Саймона Нортона «Monstrous moonshine» [CN], в которой содержится объяснение этих загадок (и введён термин «лунный свет» в данном смысле).

Ясно, что это лишь начало потрясающего «сговора» между теорией групп, Вселенной и вообще всем; разумеется, с участием квантовой гравитации. Сюда относится и сделанное в статье [CN] предположение об «обобщённом лунном свете», т. е. о том, что подобные замечательные связи должны существовать и для групп, отличных от Монстра.

Конвей и Нортон выдвинули «гипотезу лунного света»: Монстр действует на бесконечномерном пространстве, и все его видимые конечномерные представления соответствуют инвариантным подпространствам конечной размерности. Эту гипотезу позже доказал Ричард Борчердс, в прошлом ученик Конвея, который был в 1998 г. награждён Филдсовской медалью в том числе и за эту работу.

«Сговор» заходит гораздо дальше. Лунный свет, включая его обобщения, имеет существенные связи с теорией струн — математической теорией элементарных частиц, которую развивал нобелевский лауреат Ричард Фейнман. Бесконечномерное представление Монстра можно интерпретировать как структуру, лежащую в основе конформной теории поля (в размерности два), так что Физика создаёт связь между двумя разными областями математики. Затем приходят чёрные дыры и квантовая гравитация, а также гипотезы Эда Виттена — всё это связано с «лунным светом» Конвея, но эта связь далеко выходит за рамки нашей статьи.

К предыдущему имеют отношение и структуры, называемые *решётками*. Это регулярные периодические структуры в $\mathbb{R}^n$ при произвольном n, например упомянутое выше $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ или положения центров апельсинов, упорядоченно сложенных в продовольственном магазине. Решётки особенно интересны и важны, когда у них есть дополнительная структура, например вращательная симметрия, и в действительности они образуют естественный геометрический объект, на котором можно изучать группы в качестве групп симметрии решёток. Много изучался и глубокий вопрос о плотнейшей упаковке сфер в произвольной размерности. Для размерности 3 это знаменитая гипотеза Кеплера (на практике её решает каждый продовольственный магазин, как описано выше, но формальное доказательство ускользало от математиков столетиями, пока не было завершено Хейлзом в 1998 г.). Для высших размерностей эта тема несёт много сюрпризов.

Например, в размерности 24 существует знаменитая решётка, которая называется *решёткой Лича*. Она была открыта в 1967 г., через три года после того, как молодой Конвей получил докторскую степень в Кембридже. Конвей всю жизнь имел репутацию человека с острым умом, но неорганизованного. Вскоре после публикации о решётке Лича доброжелательный наставник предложил ему: «было бы неплохо найти группу симметрий этой решётки». Конвей решил в этот раз быть организованным и составил план, какие дни и часы предстоящих недель он выделит для изучения этого вопроса; этот ритм должен поддерживаться, пока вопрос не будет решён. Случилось так, что Конвей решил этот вопрос во время самых первых послеполуденных занятий, и это мгновенно сделало его знаменитым. При изучении этой группы симметрий Конвей открыл спорадические группы и выработал понимание простых групп, которое приводит ко многим результатам, полученным ранее.

Джон Конвей столь же блестяще излагал математические результаты, как и получал их. Вместе с Нилом Слоуном он написал основополагающую книгу «Упаковки шаров, решётки и группы» [CS]. Влияние этой книги трудно преувеличить; процитируем оценку Джан-Карло Рота из МТИ: «Это лучший обзор лучших работ в одной из лучших областей математики, написанный лучшими людьми. Он станет лучшим чтением для лучших студентов, интересующихся лучшей математикой, какая сегодня развивается».

Как показывает название книги, решётки часто бывают тесно связаны с оптимальными упаковками сфер, и не только в размерности 3. В частности, решётка Лича приводит к замечательной упаковке в размерности 24 (недавно показано, что она оптимальна). Но зачем нам заботиться об оптимальных упаковках сфер в размерности 24? Разумеется, математическая любознательность — всегда хороший ответ (несомненно, достаточный для многих математиков, включая Конвея); но в данном случае ответ совсем другой: такая упаковка порождает методы кодирования, которые позволяют оптимально использовать в каналах связи коды, исправляющие ошибки. Конвей даже получил в США патент на это достижение, и результаты Конвея цитировались в последующих патентах, в том числе зарегистрированных американским Агентством национальной безопасности (АНБ) [Ro, p. 314].

§ 6. Ещё о математических исследованиях Конвея

В этом параграфе мы кратко опишем ещё некоторые из многочисленных достижений Конвея в математических исследованиях. Одна из их тем — *квадратичные формы*: это полиномиальные функции от любого количества переменных, у которых степень каждого слага-