

Введение

Математическая индукция не входит в школьную программу. Однако стоит хоть немного продолжить изучение математики: в матклассе, на кружках, в вузе — индукция тут как тут. Но вот парадокс: из тех, кто изучал её, умеют ей пользоваться немногие. А. Д. Мышкис, преподававший математику в инженерных вузах с сильной математикой, отмечал в [2], что «студенты не понимают доказательств по индукции, они в них не верят!» В чём причина? В сложности? Это верно. Но производная и интеграл тоже ведь не простые понятия, однако ими уверенно владеет гораздо больший процент изучавших. Недостаточно времени на её преподавание? Но приходилось видеть классы, где отдельно на индукцию отводилось по несколько часов каждый год с 8 по 11 класс без особого улучшения.

Расширение роли олимпиад вызвало бурный рост сети кружков, классов и летних школ, где к олимпиадам готовят. Возраст учеников снижается, квалифицированных преподавателей катастрофически не хватает. Занятия ведут малоопытные студенты, и темы, уместные для восьмиклассников, излагаются шестиклассникам, а то и пятиклассникам. В результате положение с индукцией стало ещё хуже. Малоосмысленные слова про индукционный переход приходится теперь частенько слышать даже от школьников, не умеющих раскрыть скобки в выражении $a(b+1)$. Попытки же указать незадачливому / новоиспечённому / неопытному преподавателю (обозначим его НП) на это несоответствие встречают возражения: а вот эту задачу с престижного Энского турнира вон тот шестиклассник Вася решил по индукции. Значит, могут, когда захотят?!

Ну так Вася — талант, он уже и векторы знает, а задача эта и без индукции прекрасно решается. Но НП молод и горяч, энергии в нём — через край. Он искренне уверен, что, укладывая асфальт формальной индукции поверх тропинки скромных знаний юного ученика, он строит в его голове первоклассную автостраду, по которой тот помчится к победам. НП ещё не видел, как через годик от слоя асфальта останутся

засохшие комки, о которые школьник будет спотыкаться. Что делать? Запреты в век интернета НП не остановят... Пришлось вспомнить совет: не можешь предотвратить — возглавь. И я сел писать эту книгу.

Итак, в чём же проблемы преподавания индукции? Сложность не в том, что в ней много составляющих. Хуже то, что достаточно заметная часть этих составляющих преподавателями не осознаётся.

Первое: суть индукции мало похожа на её форму. НП уверен, что форма и есть суть, и индукция и в самом деле состоит только из базы и перехода. Его восхищает идея: произносишь рассуждение, названное «индукционный переход», — и утверждение мгновенно становится верным для *всех* значений n . Но на взгляд ученика это как заклинание экстрасенса в телестудии, которое якобы превращало обычную воду в целебную у всех зрителей. Как результат, действия так обученных школьников по сути сводятся к произнесению заклинаний. В стандартных случаях эти заклинания мало отличаются от правильных рассуждений, и НП засчитывает их за правильное решение. В чуть менее стандартных задачах часть нужных слов не произносится, но на ответ это не влияет, поэтому решение засчитывается, но с оговорками и снижением баллов. В мало-мальски нестандартных задачах решение обваливается, и НП решает, что такие задачи ученикам «не по зубам» и тратить время на них не нужно.

На деле суть индукции проста: *на высоту легче не запрыгивать и не взлетать, а восходить по ступенькам лестницы*. Обычно лестница едва намечена или её нет, тогда придётся её найти, принести и самому установить, а в сложных случаях и самому построить. Строить можно и нужно так, как удобнее: снизу вверх, сверху вниз, даже с двух сторон навстречу и т. п.

Стандартное обучение учит ходить только по готовым лестницам («увидел n — доказывай по индукции»). Поэтому хочется, конечно, научить видеть место для лестницы, видеть ступеньки и прилаживать их друг к другу. Увы, так поставленная цель не конкретна и воспринимается школьниками плохо.

Формальное введение индукции воспринимается чуть лучше, но уводит от сути (скажем, побуждает использовать толь-

ко лесенки, построенные снизу вверх). Это как если бы ученик умел добираться до школы только одним способом: купить билет на метро, проехать, считая остановки, и выйти у школы. Но это мало помогает ученику самому добраться от дома до школы — но не знал бы, что делать, когда метро закрыто. Хуже того, такое обучение часто создаёт у ученика иллюзию, что именно так управляют поездом и прокладывают тоннель. Чтобы не плодить иллюзий, опытный преподаватель избегает формального введения индукции так долго, как может. Он понимает, что индукционный формализм — это как умение ходить строем: прежде чем этому учиться, надо научиться просто ходить. Ещё лучше научиться бегать, прыгать и при этом чувствовать себя свободно. Вот этим мы и займёмся.

Говоря прямо: эта книга — *не пособие по обучению индукции* для начинающих. Она не заменяет такие пособия, она всего лишь их предваряет, развивая у учеников необходимые навыки и постепенно внедряя *индуктивное мышление*.

Ниже мы расшифруем, о каких навыках идёт речь. Без многослойной подушки задачной и математической культуры сложное понятие индукции не уложится и не закрепится в голове ученика, как не лягут рельсы на грунт без насыпи. Усвоение навыков требует времени — как по числу занятий (5–10), так и по общей продолжительности (год-два). С другой стороны, эти занятия полезны независимо от того, будет ли в конце усвоена индукция или нет.

Перечислим нужные навыки, пока без привязки к индукции. Нужно уметь:

1) строить большие конструкции с использованием повторяющихся элементов и блоков;

2) находить закономерность в последовательности чисел или объектов;

3) пошагово, от объекта к объекту, распространять неизменное свойство (инвариант) на некоторое множество объектов;

4) включать отдельную конструкцию или задачу в серию однотипных, отличающихся лишь значением параметра, исследовать случаи малых значений параметра и переносить замеченные закономерности на случаи больших значений;

5) следить за развитием процесса с помощью выбора удобного параметра-счётчика, игнорирующего несущественные подробности и предсказуемо меняющегося на каждом шаге; уметь организовывать нужный процесс;

6) строить конструкции пошагово, составляя её из наглядных добавок и выбирая очередную добавку в зависимости от текущего состояния;

7) строить конструкцию постепенно, проходя через промежуточные «частичные» конструкции, не являющиеся полными меньшими примерами;

8) находить связь сложного «серийного» объекта с его предшественником, выстраивать конструкции и цепочки доказательств «сверху вниз», сводя сложное к более простому.

«Ого! — скажет преподаватель, прочитав список. — Да тут и за 5 лет не успеть! Неужели всё это нужно? А попроще и покороче нельзя?»

Попроще можно. Формальный список дан для преподавателя с целью показать, что предварительная подготовка обязана быть основательной. Учеников таким списком мы пугать не будем. Откройте занятия и посмотрите на задачи. Всё это давалось шести- и семиклассникам, а первое занятие даже пятиклассникам. Если не грузить школьников приведёнными выше словами про навыки и умения, то задачи они решают бойко и охотно, а навыки приобретают по ходу дела. Особенно если преподаватель вовлекает их в обсуждения, где ненавязчиво расставляет правильные акценты, и подкидывает подобные задачи в промежутках между занятиями из этой книжки.

Покороче не стоит. Без тех или иных навыков понимание индукции будет неполноценным. Можно, конечно, некоторые навыки усваивать с нуля *вместе* с индукцией, но это создаст ученикам лишние трудности. Ведь легче и индукцию изучать «по индукции», то есть выстроив сначала лесенку из вспомогательных навыков. Тем более что предварительно эти навыки достаточно лишь привить, а не усвоить в совершенстве. Пары лет на это заведомо хватит.

Итак, целью этого курса является *неформальное* знакомство с математической индукцией. Каждому пункту списка навыков соответствует одно-два занятия этой книги, кроме пункта 2 (соответствующее занятие можно взять из кни-

ги [1]). Внешняя простота может побудить торопливых преподавателей устроить недельный курс или даже попытаться втиснуть все темы в одно-два занятия. Но тогда цель создания культурного слоя не будет достигнута.

Само по себе каждое занятие имеет понятную ученикам ближнюю цель и только знакомит учеников с кругом идей. Для отработки навыков надо будет включать аналогичные задачи в занятия на другие темы. Через месяц-другой идеи занятия станут восприниматься учениками как нечто само собой разумеющееся. Тогда можно переходить к следующему занятию из списка. Слово «индукция» до восьмого занятия упоминать не стоит, иначе школьники, уже «обученные» индукции, начнут втискивать свои свободные рассуждения в навязанные индукцией рамки. Пусть лучше индукция до поры до времени остаётся как дальняя цель за кадром и в голове преподавателя.

В помощь преподавателю в конце каждого занятия есть текст под заголовком «Идеология». В нём пояснены подробнее как непосредственные цели занятия, так и связи данного занятия с индукцией. Надеюсь, это поможет преподавателю ненавязчиво сориентировать учеников в нужном направлении.

Благодарности. В первую очередь автор благодарен А. А. Марачёву: многочисленные обсуждения планировавшейся им книги об индукции побудили автора углубить своё понимание индукции, что и стало плодотворным толчком к написанию этой книги. Автор благодарен многочисленным коллегам, чей опыт и подборка задач так или иначе повлияли на отношение автора к индукции, в наибольшей степени — А. С. Штерну, И. С. Рубанову и М. А. Берштейну. Автор благодарен К. А. Кнопу, Л. Э. Медникову и И. А. Чернявской за ряд полезных критических замечаний. Наконец, огромная благодарность А. В. Антропову за внимательное прочтение рукописи и содержательные предложения, помогшие заметно улучшить книгу.