Занятие 1
Строим подвижные чертежи

Подвижные чертежи — мощный инструмент для решения геометрических задач. Однако построение правильного подвижного чертежа к задаче часто само по себе оказывается интересной геометрической задачей! На этом занятии мы будем учиться строить различные подвижные чертежи, а использовать их начнём со следующего занятия.

Откуда берётся подвижность чертежа? Дело в том, что в каждой задаче этого занятия условия задают не одну фигуру, а целое семейство фигур. В фигуре есть фиксированные элементы и подвижные элементы (точки, отрезки, прямые, окружности и т. д.). Решением задачи считается правильный подвижный чертёж. Проверка чертежа осуществляется так.

1. *При перемещении подвижного элемента фиксированные элементы должны оставаться на месте.*

2. *При перемещении подвижного элемента можно получить последовательно всё семейство фигур, удовлетворяющих условиям задачи.*

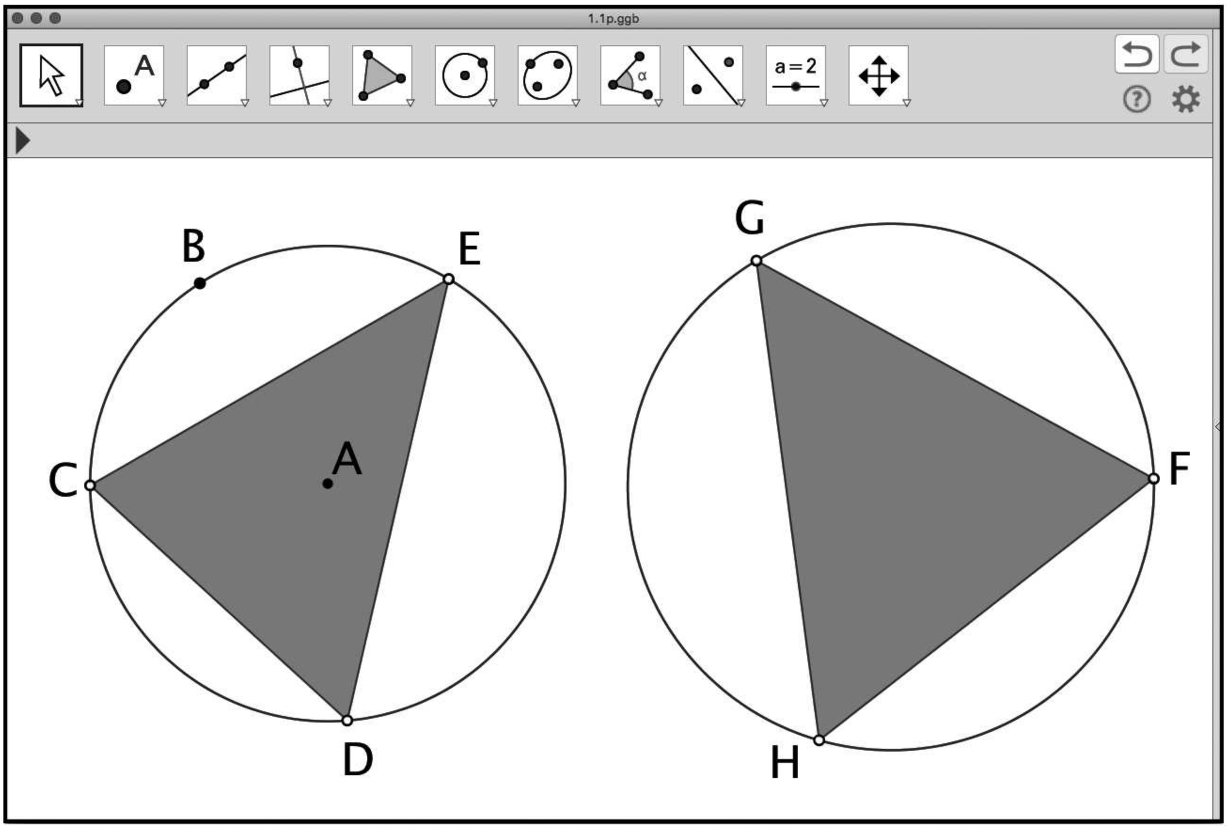
1 (ч). а) Постройте треугольник, вершины которого лежат на фиксированной окружности.

б) Проведите окружность через три вершины фиксированного треугольника.

Построение. а) Проведём окружность с центром A, проходящую через точку B, построим на ней три точки C, D, E, отметим треугольник с вершинами C, D, E.

б) Построим треугольник FGH, проведём окружность через три его вершины.

Проверка. Статические чертежи к этим задачам выглядят одинаково, однако подвижные чертежи ведут себя совершенно по-разному! Если пошевелить вершины треугольника, то в задаче а) они будут «бегать» по непо-



движной окружности, а в задаче б) будут двигаться как угодно, изменяя при этом саму окружность. В задаче а) надо зафиксировать окружность, для чего мы строим сначала её, а потом уже треугольник. В этом случае говорят, что окружность является *предком*, а треугольник — её *потомком*. В задаче б), наоборот, надо зафиксировать треугольник. Для этого мы сначала строим треугольник, а потом проводим окружность. В этом случае треугольник является *предком*, а окружность — его *потомком*.

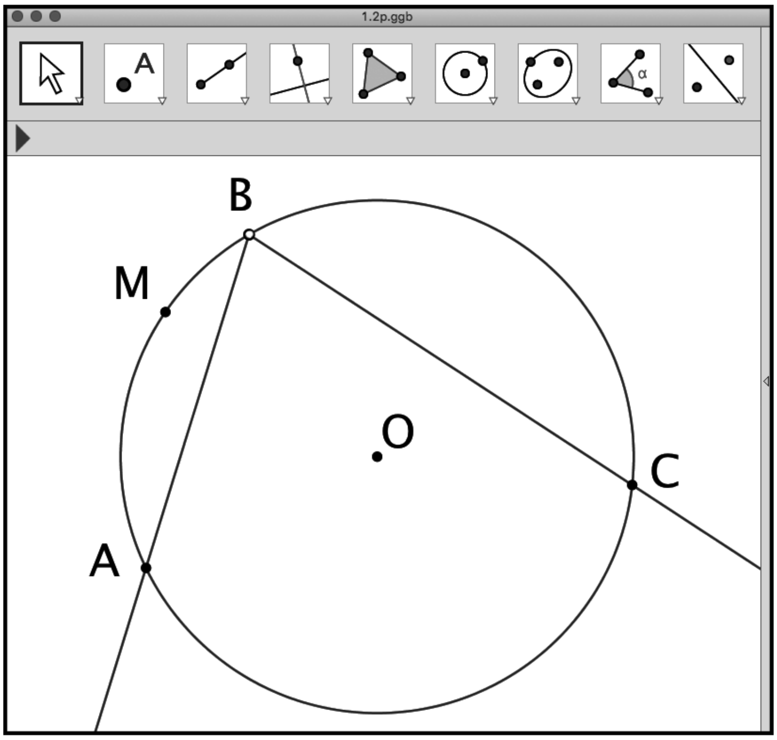
Замечание. Возможен такой порядок решения этой задачи: сначала учитель демонстрирует школьникам два готовых чертежа и показывает разницу их поведения, «шевеля» вершины треугольников. Потом учитель вводит иерархию «предки-потомки» и вместе со школьниками строит аналогичные чертежи.

2. В фиксированную окружность впишите угол, опирающийся на фиксированную дугу (это значит, что точки пересечения сторон угла с окружностью фиксированы, а вершина угла «бегает» по окружности).

Первое неверное «построение». Строят окружность по центру O и точке M, затем выбирают точку M в качестве вершины угла. Тогда точка M будет двигаться вместе со всей окружностью. Дело в том, что точка M определяет саму окружность, поскольку является для неё предком.

Второе неверное «построение». Строят окружность по центру O и точке M, затем отмечают на окружности точку B и проводят из неё два луча BA и BC, причём точки A и C отмечают не на окружности. Тогда при движении точки B по окружности неподвижными остаются точки A и C, а точки пересечения лучей с окружностью движутся. Дело в том, что точки A и C являются предками лучей, поэтому именно они остаются неподвижными на лучах.

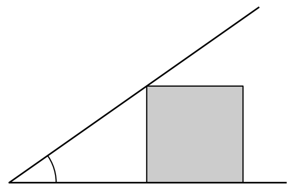
Построение. Сначала построим окружность по центру O и точке M, лежащей на окружности, *затем* отметим *на окружности* три новые точки A, B, C. Проведём лучи BA и BC.



Проверка. Будем двигать точку B. Она движется по окружности, окружность фиксирована, точки A и C тоже.

Замечание. Здесь хитрость состоит в том, что все три точки A, B, C надо отмечать на уже готовой окружности, тогда они будут потомками для окружности.

3. Зафиксирован острый угол. Постройте квадрат, у которого две смежные вершины лежат на одной стороне угла, третья вершина лежит на другой стороне угла, а четвёртая вершина — внутри угла. Сколько может быть таких квадратов?



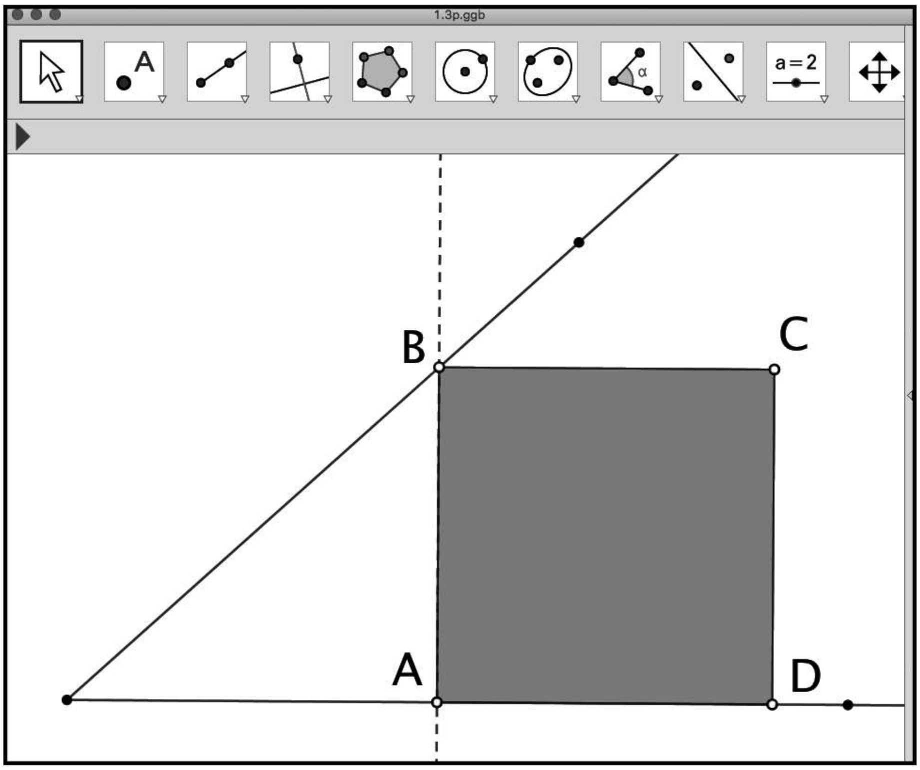
Построение. Построим угол (два луча с общей вершиной). Выберем на стороне угла точку A, восстановим из неё перпендикулярную прямую к этой стороне угла, на пересечении прямой с другой стороной угла отметим точку B. Дальше возможны варианты.

Вариант 1. Из точки B проведём прямую, перпендикулярную AB, и на ней внутри угла отложим отрезок BC, равный BA. Для этого проведём окружность с центром B, проходящую через точку A, и на пересечении с прямой отметим точку C. После этого скроем окружность, чтобы не загромождать чертёж (если мы *скрываем* объект, то его потомки продолжают отображаться, а если *удаляем*, то все потомки исчезают вместе с ним). Через точку C проведём прямую, параллельную BA, на пересечении с первой стороной угла отметим точку D. Отметим $ABCD$ как многоугольник и скроем вспомогательные прямые, чтобы чертёж хорошо «читался». (Для удобства проверки иногда лучше не скрывать вспомогательные объекты, а отмечать их пунктиром, бледным цветом и т. д. В случае необходимости можно показать все скрытые объекты.)

Вариант 2. Воспользуемся готовым инструментом и на отрезке BA построим квадрат.

Проверка. Перемещая точку A по стороне угла, будем для каждого её положения получать свой квадрат.

Замечание. Что будет, если потянуть чертёж за точку-потомка (например, B, C или D)? В «Геогебре» ничего не изменится. В «Живой математике» и «Математическом конструкторе» весь чертёж сдвинется как целое, не «деформируясь». Мы будем считать, что чертёж в любой программе не зависит от потомков. Очевидно, *фиксированные элементы надо строить раньше, чем подвижные, которые от них зависят*.

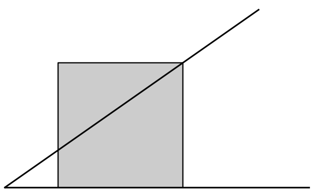


Задачи для самостоятельного решения

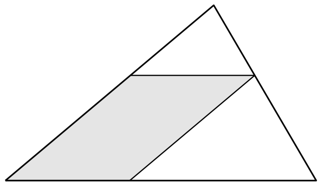
Ученики выполняют подвижные чертежи на компьютере, учитель принимает их. Способ проверки чертежа учителем изложен в специальном разделе каждой задачи. Полезно при проверке демонстрировать удобства качественного оформления чертежа («эту линию скроем, а эту выделим другим цветом — теперь легко видна ошибка»).

Указания школьникам. Чертёж должен хорошо читаться — используйте разные цвета, толщину линий, скрывайте вспомогательные линии. Буквы на чертеже должны быть такими же, как в условии.

4. Зафиксирован угол меньше 45 градусов. Постройте квадрат, у которого две смежные вершины лежат на одной стороне угла, третья вершина лежит на другой стороне угла, а четвёртая вершина — *вне угла*. Сколько может быть таких квадратов?

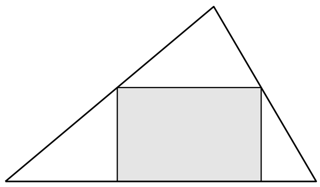


5. *Параллелограммом* называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны. Впишите в фиксированный треугольник ABC параллелограмм так, что одна его вершина совпадает с вершиной A исходного треугольника, а другие три лежат на его сторонах. Сколько может быть таких параллелограммов для данного треугольника?



6. *Хордой* называют отрезок, концы которого лежат на окружности. Постройте две взаимно перпендикулярные хорды фиксированной окружности, проходящие через фиксированную точку внутри окружности (не совпадающую с центром).

7. Впишите в фиксированный остроугольный треугольник ABC прямоугольник так, чтобы одна сторона прямоугольника лежала на отрезке AB, а две оставшиеся вершины — на отрезках AC и BC.

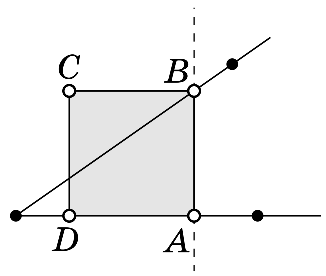


8. Постройте квадрат с фиксированным центром.

9*. Постройте правильный (равносторонний) треугольник с фиксированным центром.

Построения

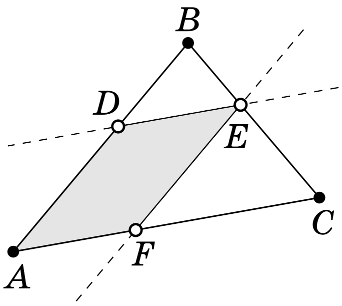
4. Сначала строим фиксированные элементы, в данном случае угол. Выберем на стороне угла точку A, восстановим из неё перпендикулярную прямую к стороне угла, на пересечении прямой с другой стороной угла отметим точку B. Далее можно воспользоваться готовым инструментом и на отрезке AB построить квадрат $ABCD$, а затем скрыть прямую AB.



Проверка. Перемещая точку A по стороне угла, будем для каждого её положения получать свой квадрат. Точки B, C, D не влияют на чертёж.

Замечание. Если при построении квадрата выбрать точки A и B в неправильном порядке, то получим квадрат с четвёртой вершиной внутри угла, как в задаче 3.

5. Начертим треугольник ABC. Отметим на стороне AB точку D, проведём через неё прямую, параллельную стороне AC. На пересечении прямой со стороной BC отметим точку E. Из точки E проведём прямую, параллельную AB, на пересечении со стороной AC отметим точку F. Отметим параллелограмм $ADEF$ как многоугольник и выделим его цветом, отличным от цвета треугольника ABC. Можно также скрыть прямые DE и EF.

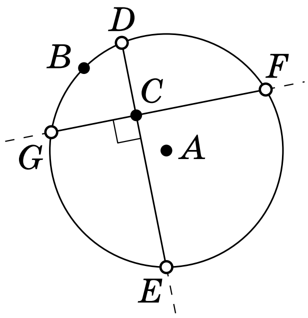


Проверка. Перемещая точку D по стороне, будем для каждого её положения получать свой параллелограмм, вписанный в треугольник. От точек E и F ничего не зависит.

Замечание. Можно в качестве «стартовой» выбирать точку на стороне AC и даже на стороне BC. В последнем случае можно через одну точку провести сразу обе прямые, параллельные сторонам.

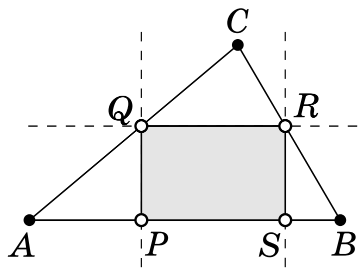
6. Сначала построим окружность (по центру A и точке B, лежащей на окружности), внутри неё отметим точку C.

Затем проведём луч DC с вершиной D на окружности. На втором пересечении его с окружностью отметим точку E. Проведём хорду DE и скроем луч DC. Через точку C проведём прямую, перпендикулярную к DE, она пересечёт окружность в точках F и G. Проведём хорду FG и скроем прямую FG.



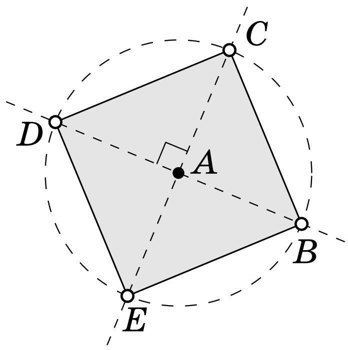
Проверка. При движении точки D по окружности обе хорды вращаются вокруг точки C, не меняя окружности! Точки E, F, G не влияют на чертёж.

7. Построим треугольник ABC с острыми углами A и B. Отметим на стороне AB произвольную точку P, проведём через неё прямую, перпендикулярную к AB. На пересечении прямой со стороной треугольника (пусть это будет сторона AC) отметим точку Q. Проведём через Q прямую, параллельную AB, на пересечении со стороной BC отметим точку R. Из R проведём прямую, перпендикулярную AB, на пересечении с AB поставим точку S. Построим четырёхугольник $PQRS$. Присвоим ему цвет, отличный от цвета треугольника ABC, скроем вспомогательные прямые.



Проверка. При движении точки P по отрезку AB прямоугольник движется, сохраняя прямые углы и оставаясь вписанным в треугольник ABC. При шевелении точек Q, R, S прямоугольник не изменяется.

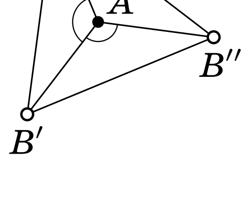
8. Отметим точку A — будущий центр. Инструмент «Квадрат» применить не получится, поскольку он строит квадрат по данной стороне. Воспользуемся тем, что диагонали квадрата пересекаются в его центре под прямым углом. Проведём прямую AB и проведём через точку A перпендикулярную ей прямую. Проведём окружность с центром в точке A, проходящую через точку B. Две прямые пересекут окружность в точках B, C, D, E. Отметим многоугольник с вершинами в этих точках. Это и будет искомый квадрат. Теперь можно сделать пунктирными окружность и прямые AB и AC.



Проверка. При движении точки B меняется размер квадрата, он поворачивается относительно точки A, но точка A остаётся центром.

Замечание. У квадрата есть две «степени свободы» — размер и ориентация. И то и другое должно меняться! Также возможно построение, при котором размер квадрата будет зависеть от одной точки, а угол поворота — от другой.

9*. Отметим точку A — будущий центр. Как и в предыдущей задаче, готового инструмента нет. Воспользуемся тем, что отрезки, соединяющие вершины правильного треугольника с его центром, образуют углы по $120°$. Проведём отрезок AB. Повернём его относительно точки A на угол $120°$, появится отрезок AB'. Проделаем с отрезком AB' ту же операцию, появится отрезок AB''. Отметим треугольник с вершинами в точках $BB'B''$. Это и будет искомый треугольник.



Проверка. При движении точки B треугольник меняет размер и вращается вокруг точки A, однако A остаётся центром.

Замечание. В свете этого решения предыдущую задачу 8 можно решить, построив отрезок AB и трижды последовательно повернув его на 90° относительно точки A.

Другой подход — построить произвольную окружность с центром A, построить на ней правильный шестиугольник с помощью шести равных окружностей, и отметить его вершины через одну.

В конце занятия полезно продемонстрировать дальнейшие возможности построенных чертежей: спросить, как изменяется угол ABC в задаче 2 при движении точки B, и измерить его (см. задачу Д46); спросить, по какой траектории движется точка C в задаче 3 и построить её след (см. задачу 3.2); спросить, у какого параллелограмма в задаче 5 площадь наибольшая, измерить её и найти точку E, соответствующую максимуму (см. задачу Д30). Это мотивирует школьников на дальнейшую работу с динамической геометрией.

Общее замечание для учителя. Сравнение задач на построение подвижных чертежей, приведённых в этом занятии, с традиционными задачами на построение, обычно решаемыми в 7 классе, приведено в таблице.

Категория задач	В чём состоит задача	Какими инструментами можно пользоваться	Определённость решения
Традиционные задачи на построение	Построить фигуру, в которой указанные элементы равны данным	Циркуль и линейка	Решение определено однозначно (или имеется конечное множество решений)
Задачи на построение подвижных чертежей	Построить подвижную фигуру, в которой указанные элементы фиксированы	Все инструменты программ динамической геометрии (параллельная прямая, перпендикуляр, квадрат и т. д.)	Есть семейство решений

См. также дополнительные задачи Д1—Д9.