Предисловие

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет собой учебник по уравнениям с частными производными. Небольшая по объему и рассчитанная на широкую аудиторию, она адресована студентам третьего курса, обучающимся по направлениям «Математика» и «Прикладная математика и информатика». В основу учебника легли лекции, читаемые А. Л. Скубачевским на протяжении 30 лет сначала в Московском авиационном институте, а затем в Российском университете дружбы народов.

Предполагается, что студент знаком с основами математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, а также теории функций и функционального анализа в рамках классических университетских курсов. Тем не менее в первой главе, посвященной введению в предмет, для удобства читателя приведены также необходимые краткие сведения из теории функций и функционального анализа, поскольку эти дисциплины обычно читаются одновременно с курсом уравнений с частными производными.

Фундаментом для изложения материала в книге служит функциональный подход, который связан с понятием обобщенного решения и пространствами Соболева. Этот подход, впервые примененный С. Л. Соболевым [16], послужил основой для современной теории уравнений с частными производными. Благодаря работам С. Л. Соболева возник также ряд новых направлений в анализе, таких как теория обобщенных функций, теория функциональных пространств, теоремы вложения и др. В учебнике этот подход демонстрируется на модельных уравнениях второго порядка: уравнении Пуассона, уравнении теплопроводности и волновом уравнении. Однако он позволяет обобщить основные результаты, изложенные в учебнике, на случай более общих уравнений соответствующего типа с переменными коэффициентами.

Вторая глава учебника — введение в теорию пространств Соболева. В третьей главе рассматриваются краевые задачи для эллиптических уравнений, а в четвертой — смешанные задачи и задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов.

Пятая глава посвящена теории полугрупп линейных операторов. В конце учебника приведен ряд упражнений разной степени сложности, охватывающий все изложенные темы.

Построенная на основе пространств Соболева теория уравнений с частными производными представлена замечательными учебниками О. А. Ладыженской [8], В. П. Михайлова [11], С. Г. Михлина [12]. Книга [1] в течение многих лет служила одним из основных сборников задач по уравнениям с частными производными. Несомненно, заслуживает внимания и относительно недавно вышедший задачник [21]. Их мы рекомендуем использовать для углубленного изучения предмета.

В предлагаемом вниманию читателей учебнике в той или иной степени используется большинство источников из приведенного списка литературы. Главное же его отличие связано с изложением теории полугрупп и ее применения к эволюционным уравнениям (благодаря этому единым методом исследуются смешанные задачи и задача Коши), а также с использованием современной техники, которая позволила упростить ряд доказательств. Отметим, что данный учебник является новой редакцией учебника [26, 27], изданного на английском языке малым тиражом в Российском университете дружбы народов для подготовки иностранных студентов.

Авторы глубоко признательны Т. А. Суслиной за внимательное чтение рукописи, полезные советы и исправление ряда неточностей. Улучшению книги способствовал ряд ценных замечаний О. В. Бесова, С. Б. Куксина и А. И. Назарова. Авторы также благодарны В. В. Козлову и Г. В. Демиденко за внимание к данной работе.

Часто используемые обозначения:

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;
$\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ — вещественная положительная полуось;
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;
$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство;
$\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство;
$B_r(x^0)$ — шар радиуса r с центром в точке x^0;
B_r — шар радиуса r с центром в нуле;
$S_r(x^0)$ — сфера радиуса r с центром в точке x^0;
σ_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$;
$\square$ — конец доказательства.

Через $c, k, c_1, c_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ обозначены положительные постоянные, не зависящие от входящих в неравенства функций.