

# Глава 1

## Предварительные сведения

### § 1. Предмет изучения

#### 1.1. Основные определения и обозначения

Напомним некоторые понятия, хорошо известные из курса анализа.

**Определение 1.1.** Уравнением с частными производными называется уравнение, содержащее частные производные неизвестной функции многих переменных  $u = u(x_1, \dots, x_n)$ . Наивысший порядок входящих в уравнение производных называется *порядком* уравнения.

**Определение 1.2.** Всякий упорядоченный набор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  неотрицательных целых чисел называется *мультииндексом*. Используется обозначение  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Мультииндексу  $\alpha$  отвечает линейный оператор  $\alpha$ -й частной производной

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

действие которого заключается в дифференцировании функции  $\alpha_i$  раз по переменной  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Замечание 1.1.** Хорошо известно, что если функция  $u(x)$  является  $|\alpha|$  раз непрерывно дифференцируемой в окрестности точки  $x$ , то смешанная производная  $D^\alpha u(x)$  не зависит от того, в каком порядке происходит дифференцирование по переменным  $x_1, \dots, x_n$ .

**Определение 1.3.** Открытое связное подмножество  $Q$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  называется *областью*.

**Определение 1.4.** Точка  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  называется *граничной точкой* множества  $Q$ , если любой шар  $B_\varepsilon(x^0)$ ,  $\varepsilon > 0$ , имеет непустое пересечение как с множеством  $Q$ , так и с его дополнением  $\mathbb{R}^n \setminus Q$ . Совокупность всех граничных точек множества  $Q$  называется его *границей* и обозначается  $\partial Q$ . *Замыкание* множества  $Q$  есть  $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$ .

**Определение 1.5.** Уравнение с частными производными называется *линейным*, если неизвестная функция и ее частные производные присутствуют в нем в виде линейной комбинации.

Всякое линейное уравнение с частными производными в области  $Q \subset \mathbb{R}^n$  выглядит следующим образом:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x) \quad (x \in Q).$$

Здесь *коэффициенты уравнения*  $a_\alpha(x)$  и *правая часть уравнения*  $f(x)$  — заданные функции. Будем говорить, что линейное уравнение с частными производными имеет порядок  $m$  в точке  $x \in Q$ , если

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x)| \neq 0 \quad (x \in Q).$$

Используя альтернативное обозначение частных производных в случае  $m = 2$ , можно записать

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}(x) + a_0(x) u(x) = f(x) \quad (x \in Q),$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| \neq 0 \quad (x \in Q).$$
(1.1)

Имея в виду замечание 1.1, можно считать, что  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  в каждой точке области  $Q$ . Несмотря на то, что есть важные примеры уравнений с комплексными коэффициентами (например, нестационарное уравнение Шрёдингера), с точки зрения многих приложений коэффициенты естественно предположить вещественнозначными функциями. Уравнение (1.1) называется *однородным*, когда  $f = 0$ . В противном случае оно называется *неоднородным*. Выражение  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}$  есть *старшая часть* уравнения (1.1), а остальные слагаемые в левой части уравнения (1.1) представляют собой *младшие члены* уравнения.

**Определение 1.6.** Для области  $Q$  и неотрицательного целого числа  $k$  обозначим через  $C^k(Q)$  множество всех  $k$  раз непрерывно дифференцируемых в  $Q$  функций, а через  $C^k(\bar{Q})$  множество всех тех функций из  $C^k(Q) \cap C(\bar{Q})$ , производные которых вплоть до порядка  $k$  допускают непрерывное продолжение в  $\bar{Q}$ , где  $C(\bar{Q})$  — множество всех функций, непрерывных в замыкании  $\bar{Q}$  области  $Q$ .

**Определение 1.7.** Множество  $\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in Q: \varphi(x) \neq 0\}}$  называется *носителем* функции  $\varphi \in C(Q)$ . В случае, когда множество  $\text{supp } \varphi \subset Q$  компактно, функцию  $\varphi$  называют *финитной*. Совокупность всех финитных функций из  $C^k(\overline{Q})$  обозначается  $C_0^k(Q)$ .

Положим также

$$C^\infty(Q) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(Q), \quad C^\infty(\overline{Q}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{Q}), \quad C_0^\infty(Q) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(Q).$$

**Определение 1.8.** Говорят, что граница  $\partial Q$  области  $Q$  принадлежит классу  $C^k$ , если для любой точки  $x^0 \in \partial Q$  найдутся такой номер  $i \in \{1, \dots, n\}$  и такой шар  $B_r(x^0)$ , что множество  $\partial Q \cap B_r(x^0)$  однозначно проецируется вдоль оси  $Ox_i$  на  $(n-1)$ -мерную область  $D = D(x^0, i, r)$  в пространстве переменных  $x' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  и

$$\partial Q \cap B_r(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n: x_i = \varphi(x'), x' \in D\},$$

где  $\varphi \in C^k(\overline{D})$ .

**Пример 1.1.** Пусть  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2: |x| < 1\}$ . В окрестности точек  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$  граница  $\partial Q = \{x \in \mathbb{R}^2: |x| = 1\}$  представляет собой график бесконечно дифференцируемых функций  $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$  и  $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$  соответственно, при этом ее невозможно представить в виде графика функции  $x_1 = x_1(x_2)$ . Аналогично вблизи точек  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$  граница есть график функций  $x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}$  и  $x_1 = -\sqrt{1 - x_2^2}$  соответственно, но не график функции  $x_2 = x_2(x_1)$ . В окрестности любой другой точки  $\partial Q$  возможны оба представления. Итак,  $\partial Q \in C^\infty$ .

**Определение 1.9.** Для областей  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  и натурального числа  $k$  биекция  $f: U \rightarrow V$ , для которой все координатные функции отображений  $f$  и  $f^{-1}$  принадлежат  $C^k(U)$  и  $C^k(V)$  соответственно, называется *диффеоморфизмом класса  $C^k$*  или, короче,  $C^k$ -диффеоморфизмом.

Если  $\partial Q \in C^k$ , то отображение

$$y_1 = x_1 - x_1^0, \quad \dots, \quad y_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-1}^0, \quad y_n = x_n - \varphi(x')$$

(в обозначениях определения 1.8 считаем, что  $i = n$ ) является  $C^k$ -диффеоморфизмом некоторой окрестности  $U$  точки  $x^0$  на окрестность  $V$  начала координат, причем образом множества

$\partial Q \cap U$  будет часть гиперплоскости  $y_n = 0$ . Другими словами, границу класса  $C^k$  можно локально распрямить посредством  $C^k$ -диффеоморфизма. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что якобиан этого отображения равен 1, и применить теорему об обратном отображении.

## 1.2. Классификация линейных уравнений второго порядка

По уравнению (1.1) построим матрицу

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Будучи симметричной, она имеет в точности  $n$  вещественных собственных значений (с учетом кратностей) в каждой точке области. Обозначим через  $n_+ = n_+(x)$  количество положительных собственных значений, через  $n_- = n_-(x)$  — отрицательных, а через  $n_0 = n_0(x)$  — кратность нулевого собственного значения. Имеем  $n_+ + n_- + n_0 = n$ .

**Определение 1.10.** Если  $n_+ = n$  или  $n_- = n$ , то уравнение (1.1) называется *эллиптическим* в точке  $x$ . Если  $n_+ = 1$ ,  $n_- = n - 1$  или  $n_+ = n - 1$ ,  $n_- = 1$ , то уравнение (1.1) называется *гиперболическим* в точке  $x$ . Если  $n_+ + n_- = n$  и  $n_+ \geq 2$ ,  $n_- \geq 2$ , то уравнение (1.1) называется *ультрагиперболическим* в точке  $x$ . Если же  $n_0 > 0$ , то уравнение (1.1) называется *параболическим* в точке  $x$ .

**Замечание 1.2.** Вообще говоря, числа  $n_+$ ,  $n_-$  и  $n_0$  зависят от  $x$ , поэтому тип уравнения может быть разный в разных точках области.

**Пример 1.2.** Знаменитый пример эллиптического уравнения — это *уравнение Пуассона*  $-\Delta u = f$ , где  $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$  есть *оператор Лапласа*. Уравнением Пуассона описываются и малые упругие деформации мембраны, и стационарное распределение температуры, и электростатический потенциал системы зарядов.

**Пример 1.3.** *Волновое уравнение*  $u_{tt} - \Delta u = f$ , в котором искомая функция  $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$  зависит от  $n$  пространственных переменных  $x_1, \dots, x_n$  и времени  $t$ , имеет гиперболический тип в любой пространственно-временной области  $(n + 1)$ -мерного пространства  $\mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ . Волновое уравнение описывает распространение колебаний в упругой среде.

**Пример 1.4.** Уравнением теплопроводности называется уравнение  $u_t - \Delta u = f$  относительно  $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ . Оно принадлежит параболическому типу в любой пространственно-временной области  $(n + 1)$ -мерного пространства  $\mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ . Уравнение теплопроводности описывает процесс распространения тепла. Обычно уравнение теплопроводности рассматривают при  $t > 0$ .

**Пример 1.5.** Вот простейший пример ультрагиперболического уравнения:

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} - u_{x_4 x_4} = 0, \quad u = u(x_1, \dots, x_4).$$

Во всех приведенных примерах мы имеем дело с канонической формой уравнения, т. е. формой, в которой отсутствуют смешанные производные. Можно попытаться упростить структуру уравнения (1.1) при помощи подходящей замены координат. Возьмем любой локальный  $C^2$ -диффеоморфизм  $x = x(y)$  и положим  $v(y) = u(x(y))$ . Дифференцируя сложную функцию  $u(x) = v(y(x))$ , получаем

$$u_{x_i} = \sum_{p=1}^n v_{y_p} \frac{\partial y_p}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{p,q=1}^n v_{y_p y_q} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} + \dots$$

с точностью до слагаемых, содержащих первые производные функции  $v$ . Подставляя эти соотношения в уравнение (1.1), получим эквивалентное уравнение относительно  $v(y)$ :

$$\sum_{p,q=1}^n b_{pq}(y) v_{y_p y_q} + \text{младшие члены} = g(y),$$

где  $g(y) = f(x(y))$  и

$$b_{pq}(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \Big|_{x=x(y)} \quad (p, q = 1, \dots, n),$$

или, с использованием матричных обозначений,

$$B = JAJ^T. \tag{1.2}$$

Здесь  $B$  — аналогичная  $A$  матрица, составленная из коэффициентов  $b_{pq}$ , а  $J$  — матрица Якоби отображения  $y = y(x)$ . Поскольку матрица  $J$  невырожденная, числа  $n_+$ ,  $n_-$  и  $n_0$  для матрицы  $B$  в точке  $y(x)$  такие же, как и для матрицы  $A$  в точке  $x$ . Иными словами, приведенная выше классификация инвариантна относительно диффеоморфизмов. Кроме того, формулу (1.2) можно использовать для

приведения уравнения (1.1) к каноническому виду. При фиксированной точке  $x = x^0$  достаточно найти такую невырожденную постоянную матрицу  $J$ , что матрица  $JA(x^0)J^T$  окажется диагональной. Совершив затем линейную замену  $y = Jx$ , в новых переменных получим  $b_{pq}(y^0) = 0$ ,  $p \neq q$ . Как всякая вещественная симметричная матрица,  $A(x^0)$  обладает ортонормированным базисом из собственных векторов в  $\mathbb{R}^n$ , так что в качестве  $J$  всегда можно взять матрицу, у которой по строкам располагаются эти собственные векторы. В данном случае уравнение приводится к каноническому виду посредством ортогонального преобразования.

Заметим, что если коэффициенты  $a_{ij}$  в старшей части уравнения (1.1) постоянны, то описанная замена переменных приводит уравнение к каноническому виду сразу во всей области.

**Пример 1.6.** Приведем уравнение  $u_{x_1 x_2} = 0$  к каноническому виду в  $\mathbb{R}^2$ .

Для построения  $J$  находим ортонормированный базис из собственных векторов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записав характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

вычисляем собственные значения матрицы  $A$ :  $\lambda = \pm 1/2$ . Для координат  $e_1$  и  $e_2$  собственного вектора имеем

$$e_1 = e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

$$e_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Составляем искомую матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

и соответствующую замену переменных

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{2}},$$

представляющую поворот координатных осей на угол  $\pi/4$  против часовой стрелки и приводящую уравнение  $u_{x_1x_2} = 0$  к виду одномерного волнового уравнения  $v_{y_1y_1} - v_{y_2y_2} = 0$ .

### 1.3. Постановка некоторых задач математической физики

Уравнения с частными производными редко рассматривают отдельно, сами по себе. В приложениях они обычно сопровождаются начальными и (или) граничными условиями, которые соответствуют физическому смыслу задачи.

#### 1. Задача Коши для волнового уравнения

В случае задачи Коши волновое уравнение

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \quad (1.3)$$

рассматривается во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ , а при  $t = 0$  дополнительно задаются значения  $u(x, t)$  и  $u_t(x, t)$ :

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (1.4)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (1.5)$$

Соотношения (1.4), (1.5) называются начальными условиями. Задача нахождения решения уравнения (1.3), удовлетворяющего условиям (1.4), (1.5), называется задачей Коши для волнового уравнения.

#### 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

В задаче Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \quad (1.6)$$

рассматриваемого во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ , лишь значения  $u(x, t)$  задаются при  $t = 0$ :

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (1.7)$$

Задача (1.6), (1.7) называется задачей Коши для уравнения теплопроводности.

#### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона

Уравнение Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (1.8)$$

в (ограниченной) области  $Q \subset \mathbb{R}^n$  часто рассматривается вместе с одним из следующих трех *граничных условий*:

$$u|_{\partial Q} = \gamma(x) \quad (x \in \partial Q), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q} = \gamma(x) \quad (x \in \partial Q) \quad (1.10)$$

или

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u \right) \Big|_{\partial Q} = \gamma(x) \quad (x \in \partial Q). \quad (1.11)$$

Здесь  $\nu = \nu(x)$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $\partial Q$  в точке  $x \in \partial Q$ ,  $\partial u / \partial \nu$  — нормальная производная на  $\partial Q$ , а  $\sigma(x)$  — известная неотрицательная функция на  $\partial Q$ . Условие (1.9) предписывает заданные значения искомой функции  $u(x)$  на  $\partial Q$ . Задача (1.8), (1.9) называется *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей*. В условии (1.10) на  $\partial Q$  задаются значения нормальной производной  $\partial u / \partial \nu$ . Задача (1.8), (1.10) называется *задачей Неймана* или *второй краевой задачей*. Условие (1.11) связывает граничные значения искомой функции и ее нормальной производной. Задача (1.8), (1.11) называется *задачей Робена* или *третьей краевой задачей*. Во всех случаях функция  $\gamma$  — известная функция, заданная на  $\partial Q$ . Однородное уравнение (1.8),  $\Delta u = 0$ , называется *уравнением Лапласа*.

#### 4. Смешанные задачи для волнового уравнения

В случае, когда волновое уравнение рассматривается в пространственной области  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , естественно ставить *начально-краевую*, или, по-другому, *смешанную* задачу. В такой постановке волновое уравнение

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega_T = Q \times (0, T)) \quad (1.12)$$

дополняется как начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (x \in Q), \quad (1.13)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (x \in Q), \quad (1.14)$$

так и граничными условиями, которые могут быть первого типа

$$u|_{\Gamma_T} = \gamma(x, t) \quad ((x, t) \in \Gamma_T = \partial Q \times (0, T)), \quad (1.15)$$

второго типа

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_T} = \gamma(x, t) \quad ((x, t) \in \Gamma_T) \quad (1.16)$$



или третьего типа

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x, t)u \right) \right|_{\Gamma_T} = \gamma(x, t) \quad ((x, t) \in \Gamma_T). \quad (1.17)$$

Здесь  $\nu = \nu(x)$  — единичный вектор внешней нормали к боковой поверхности  $\Gamma_T$  цилиндра  $\Omega_T$  в точке  $(x, t) \in \Gamma_T$ ,  $\partial u / \partial \nu$  — нормальная производная на  $\Gamma_T$  и  $\sigma(x, t)$  — известная неотрицательная функция на  $\Gamma_T$ . Задача (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) называется *первой начально-краевой задачей* или *первой смешанной задачей* для волнового уравнения. Задача (1.12), (1.13), (1.14), (1.16) называется *второй начально-краевой задачей* или *второй смешанной задачей* для волнового уравнения. Задача (1.12), (1.13), (1.14), (1.17) называется *третьей начально-краевой задачей* или *третьей смешанной задачей* для волнового уравнения. Здесь  $\gamma$  — заданная функция на  $\Gamma_T$ .

## 5. Смешанные задачи для уравнения теплопроводности

Аналогично для уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega_T = Q \times (0, T)) \quad (1.18)$$

в (ограниченной) пространственной области  $Q \subset \mathbb{R}^n$  задача (1.18), (1.13), (1.15) называется *первой начально-краевой задачей* или *первой смешанной задачей* для уравнения теплопроводности. Задача (1.18), (1.13), (1.16) называется *второй начально-краевой задачей* или *второй смешанной задачей* для уравнения теплопроводности. Задача (1.18), (1.13), (1.17) называется *третьей начально-краевой задачей* или *третьей смешанной задачей* для уравнения теплопроводности.

Конечно, фигурирующие в приведенных задачах начальная функция  $\varphi$  и граничная функция  $\gamma$  имеют различный физический смысл в зависимости от типа уравнения и типа краевого условия.

## § 2. Необходимые сведения из функционального анализа и теории функций

### 2.1. Интеграл Лебега

В этом пункте достаточно коротко будут изложены основные факты, связанные с интегралом Лебега. Читателям, интересующимся доказательствами, порекомендуем книги [5, гл. V] и [14, гл. 10]. Конструкция интеграла Лебега обладает рядом преимуществ по