Оглавление

Предисловие

В настоящей монографии, самым непосредственным образом относящейся к тем вероятностно-статистическим разделам, которые именуют «*теория принятия решений*» и «*статистический последовательный анализ*», основной акцент делается на те стохастические проблемы «скорейшего обнаружения в задачах о разладке», которые возникают при динамическом анализе статистических данных.

Примером могут служить задачи скорейшего обнаружения случайно появляющихся «целей», задачи обнаружения спонтанно возникающих эффектов, задачи скорейшего обнаружения момента появления арбитража (в финансовой математике) и т. п. Для многих информационных систем весьма актуальна разработка методов скорейшего обнаружения нежелательных случайно появляющихся «внедрений» и создания методов защиты от кибератак.

Как станет ясно из дальнейшего, большинство рассматриваемых задач скорейшего обнаружения удобно формулировать как *задачи об оптимальной остановке*, где момент остановки идентифицируется с моментом поднятия «тревоги» о появлении «разладки». В этой связи мы уделяем значительное внимание как общей теории оптимальных правил остановки, так и методам решения конкретных задач этой теории.

Изложение в книге будет вестись и для случая дискретного, и для случая непрерывного времени. Первый случай *дискретного времени* с принципиальной точки зрения сравнительно прост (если время конечно) в силу наличия здесь рекуррентных соотношений и мощного метода индукции назад, позволяющего проводить рассуждения шаг за шагом.

Случай *непрерывного времени* технически более сложен и требует, как правило, более сложного анализа, в том числе и стохастического с привлечением понятий стохастического исчисления: мартингала, супермартингала, стохастического интеграла и т. п.

Подчеркнем, что одним из основных процессов с непрерывным временем в книге будет процесс *броуновского движения*, для которого во многих задачах удается получить точные решения с привлечением хорошо развитого математического аппарата для этого процесса.

Настоящее изложение примыкает к нашей книге «Статистический последовательный анализ» [50], где последние два параграфа в заключительной главе 4 посвящены некоторым задачам о разладке (в варианте **A** по терминологии данной книги). К настоящему времени вышло несколько монографий, которые касаются тем настоящей книги. Это монографии [16, 34, 56, 57, 97, 101, 113], в которых читатель найдет полезный материал, касающийся общей теории оптимальных правил остановки и ее применений в теории вероятностей, математической статистике и приложениях, включая финансовую математику.

Существенная часть настоящей книги была выполнена в рамках гранта РНФ № 14–21–00162 и использовалась на лекциях «Школы анализа данных» в Яндексе. Автор признателен И. Б. Мучнику за многочисленные советы и полученные рекомендации. Мои ученики М. Житлухин и А. Муравлёв в течение ряда лет работали над проблемами, излагаемыми в диссертациях [59, 60]. Некоторые их результаты вошли в настоящее издание.

Автор приносит глубокую благодарность Е. А. Макаровой, осуществившей компьютерный набор, и Ю. Н. Торхову, за издание книги. Автор благодарен Т. Б. Толозовой за редакционную работу.

Москва, июнь 2016

А. Ширяев
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Введение

Как это следует из названия книги и вышеприведенного предисловия, основное ее содержание посвящено задачам о «разладке». Однако мы уделяем значительное внимание также теории оптимальных правил остановки и ее развитию, дающим тот материал, который необходим нам для отыскания методов решения соответствующих задач.

Настоящее введение преследует двоякую цель — изложить основные *положения* как теории оптимальных правил остановки, так и теории оптимизации в решении задач о «разладке».

I

Главы III–V посвящены теории оптимальных правил остановки решения задач типа

$$V = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathrm{E} G_\tau,$$

где $\mathfrak{M}$ — класс таких моментов остановки $\tau = \tau(\omega)$, что $\tau(\omega) < \infty$ (или $\mathrm{P}(\tau(\omega) < \infty) = 1$), и G_t, $t \geqslant 0$, — функции выигрыша при остановке в момент t. Функция V называется *ценой*.

Все вероятностные объекты предполагаются заданными на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathrm{P})$ с неубывающим непрерывным справа семейством σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, причем мера P такова, что $\mathscr{F}$ пополнена по P и каждая σ-алгебра $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$, содержит P-нулевые множества из $\mathscr{F}$. (Все это говорит о том, что рассматриваемое фильтрованное пространство удовлетворяет так называемым *обычным* условиям [73, 84].)

Моменты остановки $\tau \in \mathfrak{M}$ по определению предполагаются удовлетворяющими условиям $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$ при всех $t < \infty$. Функции выигрыша G_t предполагаются $\mathscr{F}_t$-измеримыми. Основной интерес в задаче $V = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathrm{E} G_\tau$ состоит в отыскании цены V и оптимальных моментов τ^* (если таковые существуют).

Эти вопросы рассматриваются в гл. III–V главах для случаев и дискретного, и непрерывного времени, при этом основными методами исследования являются следующие два — «мартингальный» и «марковский».

При исследовании сформулированной задачи в случае дискретного времени мы начинаем со случая, когда задача рассматривается на *конечном* временно́м интервале ($n \leqslant N$). В этом случае существует хорошо известный метод исследования — метод *обратной индукции*, позволяющий (по крайней мере принципиально) найти и цену $V^N = \sup_{\tau \leqslant N} \mathrm{E} G_\tau$, и оптимальный момент остановки (гл. III, § 1).

В случае *бесконечного* временно́го горизонта основной метод исследования основан на понятии *существенного супремума* (гл. III, § 2). В отличие от случая конечного горизонта здесь может случиться, что нет оптимального момента и следует обращаться к «ε-оптимальным» моментам (см. подробнее [16, 50]).

Одним из наиболее изученных и интересных случаев теории оптимальных правил остановки является тот, когда функция выигрыша G_t имеет *марковское* представление, т. е. $G_t = G(t, X_t)$, где $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — марковский процесс. В дискретном времени этому случаю посвящена гл. IV, а случай непрерывного времени излагается в гл. V. Замечательным здесь оказывается то, что для задачи $V(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathrm{E}_x G(X_\tau)$ решение вопроса о структуре оптимального момента остановки $\tau^* \in \mathfrak{M} = \{\tau : \tau < \infty\}$ сводится к отысканию области *продолжения наблюдений* $C = \{x : V(x) > G(x)\}$ и области *остановки наблюдений* $D = \{x : V(x) = G(x)\}$. Уже отсюда видно, что для отыскания оптимального момента остановки (если он существует) надо уметь находить функции цены $V(x)$, являющиеся (при достаточно общих условиях) наименьшими супергармоническими мажорантами функции выигрыша $G(x)$.

В целом гл. III–V дают достаточно подробный материал об оптимальных правилах остановки, на который мы опираемся для построения теории решения задач о «разладке».

II

Задачи о «разладке» будут рассматриваться в гл. I–II (дискретное время) и в гл. IV–X (непрерывное время).

Для случая дискретного времени начнем с задач, рассмотренных еще в 1920–30-х годах В. А. Шухартом (W. A. Shewhart) в связи с контролем качества индустриальной продукции [105, 106]. Эти задачи поучительны не только с точки зрения их важности в контроле качества, но и тем, что они четко показывают, почему «моменты остановки» играют ключевую роль в описании процедур контроля и как с их помощью можно формулировать задачи отыскания оптимальных процедур контроля.

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — измерения, полученные в ходе наблюдений за независимыми случайными величинами $X_1, X_2, \ldots$, характеризующими, скажем, размер выпускаемого изделия. Пусть также есть некоторый неизвестный (случайный или нет) параметр θ («скрытый параметр»), принимающий значения в множестве $\{1, 2, \ldots, \infty\}$ (иногда удобно считать, что в множестве $\{0, 1, \ldots, \infty\}$). Случай $\theta = \infty$ будем интерпретировать как то, что все время идет *нормальный* ход индустриального процесса («без брака»). В этом случае все наблюдаемые величины являются независимыми и одинаково распределенными, скажем, с плотностью распределения $f^\infty(x)$, $x \in R$.

Случай $\theta = 1$ (или $\theta = 0$) интерпретируется как случай, когда изначально идут *бракованные* изделия. В этом случае предполагается, что величины $X_1, X_2, \ldots$ снова являются независимыми и одинаково распределенными с плотностями $f^0(x)$, $x \in R$.

Практически типичным является тот случай, когда с самого начала имеет место нормальный ход (т. е. наблюдения имеют плотность $f^\infty(x)$), а затем в некоторый момент θ происходит «сбой», или, как мы говорим, наступает «разладка», состоящая в том, что у наблюдений $X_\theta, X_{\theta+1}, \ldots$ плотность распределения вероятностей становится равной $f^0(x)$, в то время как наблюдения $X_1, X_2, \ldots, X_{\theta-1}$ имеют плотность $f^\infty(x)$, отвечающую нормальному ходу индустриального процесса.

В своих работах В. А. Шухарт предложил для скорейшего обнаружения момента «сбоя» θ процедуры (так называемые *контрольные карты*), которые призваны вырабатывать подачу сигнала тревоги о появлении «сбоя».

В дальнейшем интуитивно понятный термин «сигнал тревоги» будет отождествляться с математически точно определенным понятием *момента остановки*.

В рассматриваемом случае, когда наблюдения могут быть представлены в виде последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_i \in R$, под моментом остановки понимаются такие величины $\tau = \tau(x)$, которые принимают значения в множестве $\{1, 2, \ldots, \infty\}$ и таковы, что для каждого $n \geqslant 1$ события $\{x : \tau(x) = n\} \in \mathscr{B}_n$, где $\mathscr{B}_n = \sigma(x : x_1, \ldots, x_n)$ есть σ-алгебра событий, порожденная ограничениями на первые n координат в векторах $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$. (С наглядной точки зрения, если $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$, причем $y_i = x_i$ для всех $i \leqslant n$, то из того, что $\tau(x) = n$, следует, что и $\tau(y) = n$.)

В качестве моментов $\tau = \tau(x)$, определяющих процедуру поднятия сигнала тревоги о появлении «сбоя», В. А. Шухарт предложил рассматривать просто устроенные моменты

$$\tau(x) = \inf\{n \geqslant 1 : x_n \in D\},$$

где D — некоторые множества в пространстве состояний R.

Разумеется, выбор множеств D определяется как плотностями $f^0(x)$ и $f^\infty(x)$, так и допущениями о том, что есть θ, и выбранными критериями качества, показывающими, *насколько* τ отклоняется от θ.

Если θ есть просто *числовой параметр*, то можно, например, обратиться к такому критерию.

Пусть $\mathfrak{M}_T = \{\tau : E^\infty \tau \geqslant T\}$ — класс тех моментов остановки τ, для которых среднее время $E^\infty \tau$ до подачи *ложной* тревоги (т. е. в предположении, что $\theta = \infty$) больше или равно T, где T — некоторая фиксированная положительная (обычно большая) константа.

Момент $\tau_T^* \in \mathfrak{M}_T$ можно, к примеру, назвать *оптимальным* (в минимаксном смысле), если, скажем,

$$\sup_{\theta \geqslant 1} \mathrm{E}^\theta(\tau_T^* - \theta \mid \tau_T^* \geqslant \theta) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{\theta \geqslant 1} \mathrm{E}^\theta(\tau - \theta \mid \tau \geqslant \theta). \qquad (1)$$

Здесь под E^θ понимается математическое ожидание относительно распределения P^θ (в $(R^\infty, \mathscr{B}(R^\infty))$), порождаемого наблюдениями $X_1, X_2, \ldots$ и разладкой, появляющейся в момент времени θ.

Задаче (1) и другим родственным задачам в дальнейшем будет уделяться много внимания (как в случае дискретного, так и в случае непрерывного времени).

В том случае, когда параметр θ является *случайной величиной* со значениями в множестве $\{1, 2, \ldots, \infty\}$, можно, например, искать такой момент τ_h^*, для которого

$$\sup_\tau \mathrm{P}(|\tau - \theta| \leqslant h) = \mathrm{P}(|\tau_h^* - \theta| \leqslant h), \qquad (2)$$

где $\sup_\tau$ берется по всем *конечным моментам остановки* и h — некоторая константа, $h \geqslant 0$.

Другим естественным критерием может служить, например, такой: найти момент $\tau_{\alpha,h}^*$, для которого

$$\inf_\tau \mathrm{P}((\tau - \theta)^+ \geqslant h) = \mathrm{P}((\tau_{\alpha,h}^* - \theta)^+ \leqslant h), \qquad (3)$$

где $\inf_\tau$ берется по классу $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ тех моментов остановки, для которых вероятность *ложной* тревоги удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{P}(\tau < \theta) \leqslant \alpha,$$

где α и h — некоторые заданные константы, $h > 0$.

В силу неравенства Чебышёва

$$\mathrm{P}((\tau-\theta)^+ \geqslant h) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\tau-\theta)^+}{h}$$

и для всякого $k > 0$ имеем

$$\mathrm{P}((\tau-\theta)^+ \geqslant h) = \mathrm{P}(e^{k(\tau-\theta)^+} \geqslant e^{kh}) \leqslant \frac{\mathrm{E}e^{k(\tau-\theta)^+}}{e^{kh}}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}((\tau-\theta)^+ \geqslant h) \leqslant \inf_{k>0} \frac{\mathrm{E}e^{k(\tau-\theta)^+}}{e^{kh}}.$$

Тем самым наряду с критериями (2) и (3) представляет интерес отыскание таких моментов τ^*_α и τ^{**}_α, для которых

$$\mathrm{E}(\tau^*_\alpha - \theta)^+ = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}(\alpha)} \mathrm{E}(\tau-\theta)^+$$

и

$$\mathrm{E}e^{k(\tau^{**}_\alpha-\theta)^+} = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}(\alpha)} \mathrm{E}e^{k(\tau-\theta)^+},$$

где $k > 0$.

Точно так же интерес представляют критерии

$$\inf_\tau \mathrm{E}|\tau-\theta| \quad \text{и} \quad \inf_\tau \mathrm{E}e^{k|\tau-\theta|},$$

где $\inf_\tau$ берется по классу *всех конечных моментов* остановки.

Несколько забегая вперед, отметим, что в задаче (2) в байесовской постановке, когда θ имеет *геометрическое* распределение, величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и $h = 0$, т. е. в задаче

$$\sup_\tau \mathrm{P}(\tau = \theta) = \mathrm{P}(\tau^*_0 = 0),$$

оптимальный момент τ^*_0 имеет следующую простую структуру:

$$\tau^*_0 = \inf\left\{n \geqslant 1 \colon \frac{f^0(x_n)}{f^\infty(x_n)} \in D^*_0\right\}.$$

В случае нормальных плотностей $f^0(x) \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ и $f^\infty(x) \sim \sim N(\mu_\infty, \sigma^2)$ можно показать, что

$$\tau^*_0 = \inf\{n \geqslant 1 \colon x_n \in A^*_0\}$$

для некоторого множества A_0^*. В сущности, это и было предложено В. А. Шухартом, хотя вопрос об оптимальности он не рассматривал.

После изложения в первых двух главах задач для дискретного времени мы переходим к случаю непрерывного времени, где основной (но не единственной) моделью является модель броуновского движения со сносом, зависящим от момента «разладки» θ:

$$X_t = \begin{cases} \sigma B_t, & t < \theta, \\ \mu(t-\theta) + \sigma B_t, & t \geqslant \theta, \end{cases} \tag{4}$$

где $\mu \neq 0$, $\sigma > 0$ (как правило, это известные константы), а θ — момент появления «разладки», который может быть или случайной величиной, или просто неизвестным параметром. Через $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ обозначается стандартное ($\mathrm{E}B_t = 0$, $\mathrm{E}B_t^2 = t$) броуновское движение. (Хотя модель (4) выглядит слишком частной, следует иметь в виду, что в силу известного вероятностного *принципа инвариантности* эта модель возникает в качестве *предельной* для многих моделей с дискретным временем, что и объясняет, что многие асимптотически оптимальные результаты для них оказываются точными для модели (4).)

Наш основной интерес для этих моделей будет относиться к следующим вариантам (**A**, **B**, **C**, **D**) задач о «разладке».

Вариант A. Требуется найти оптимальный момент $\tau_\alpha^* \in \mathfrak{M}_\alpha$, для которого

$$\mathrm{E}^G(\tau_\alpha^* - \theta)^+ = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_\alpha} \mathrm{E}^G(\tau - \theta)^+, \tag{5}$$

где $\mathfrak{M}_\alpha = \{\tau : \mathrm{P}^G(\tau < \theta) \leqslant \alpha\}$, а индекс «$G$» указывает на распределение вероятностей G момента «разладки» $\theta = \theta(\omega)$.

Для решения этой (байесовской) задачи мы, следуя принципу множителей Лагранжа, сначала рассматриваем задачу

$$\mathbb{A}(c) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}} [\mathrm{P}^G(\tau < \theta) + c\mathrm{E}^G(\tau - \theta)^+]. \tag{6}$$

Вариант B. Требуется найти

$$\mathbb{B}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathrm{E}^\theta(\tau - \theta)^+ \, d\theta, \tag{7}$$

где θ — параметр, $\theta \in [0, \infty)$, $\mathfrak{M}_T = \{\tau : \mathrm{E}^\infty \tau \geqslant T\}$; математическое ожидание E^∞ означает, что «разладка» появляется в момент $\theta = \infty$ (т. е. наблюдаемый процесс есть $X_t = \sigma B_t$, $t \geqslant 0$).

В этих вариантах возникают в качестве достаточных статистик *апостериорные вероятности* $\pi_t = \mathrm{P}^G(\theta \leqslant t \mid \mathscr{F}_t^X)$, $\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющие стохастическому дифференциальному уравнению (в случае экспоненциального распределения $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$)

$$d\pi_t = \Big(\lambda - \frac{\mu^2}{\sigma^2}\pi_t^2\Big)(1-\pi_t)\,dt + \frac{\mu}{\sigma^2}\pi_t(1-\pi_t)\,dX_t,$$

где $\pi_0 = \pi$, $0 \leqslant \pi \leqslant 1$, и (в варианте **B**) — процесс ψ_t, $t \geqslant 0$, удовлетворяющий уравнению

$$d\psi_t = dt + \frac{\mu}{\sigma^2}\psi_t\,dX_t.$$

В случае варианта **A** оптимальный момент остановки τ_A^* имеет вид $\tau_A^* = \inf\{t\colon \pi_t \geqslant A^*(c)\}$, а в варианте **B** — $\tau_B^* = \inf\{t\colon \psi_t \geqslant B^*(T)\}$, где $B^*(T) = T$ (гл. VI, §§ 2, 3).

Следующие варианты **C** и **D** являются *минимаксными* задачами.

Вариант C (первая минимаксная задача). Требуется найти величину

$$\mathbb{C}(T) = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}_T}\sup_{\theta\geqslant 0}\mathrm{E}^\theta(\tau-\theta\mid\tau\geqslant\theta),$$

где E^θ есть математическое ожидание по мере P^θ, отвечающей появлению разладки в момент времени θ.

Вариант D (вторая минимаксная задача). Требуется найти величину

$$\mathbb{D}(T) = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}_T}\sup_{\theta\geqslant 0}\operatorname*{ess\,sup}_{\omega}\mathrm{E}^\theta((\tau-\theta)^+\mid\mathscr{F}_\theta)(\omega)$$

и оптимальный момент остановки τ_D^*.

Весьма замечательно, что в этом варианте **D** оптимальным моментом является момент

$$\tau_D^* = \inf\{t\colon \gamma_t \geqslant d(T)\},$$

где $d = d(T)$ — корень уравнения

$$\frac{2\sigma^2}{\mu^2}[d - \log d - 1] = T,$$

а $\gamma = (\gamma_t)_{t\geqslant 0}$ есть так называемый CUSUM-процесс.

Хотя в варианте **C** оптимальный момент не найден, тем не менее можно утверждать, что $\mathbb{B}(T) \leqslant \mathbb{C}(T) \leqslant \mathbb{D}(T)$, где (для больших T)

$$\mathbb{B}(T) = \frac{1}{\nu}\Big[\log(\nu T) - 1 - \mathbb{C} + O\Big(\frac{\log^2 \nu T}{\nu T}\Big)\Big]$$

и

$$\mathbb{D}(T) = \frac{1}{\nu}\Big[\log(\nu T) - 1 + O\Big(\frac{1}{\nu T}\Big)\Big];$$

здесь $\nu = \mu^2/(2\sigma^2)$ (отношение «сигнал/шум») и $\mathbb{C} = 0{,}577\ldots$ — константа Эйлера (гл. VI, § 4, 5).

III

В гл. VII задача о «разладке» рассматривается и не в байесовском варианте (**A**), и не в параметрических вариантах (**B**, **C**, **D**), а в несколько необычной постановке (вариант **E**), когда «разладка» появляется на фоне *установившегося стационарного режима наблюдения*.

Эта постановка интересна с прикладной точки зрения, когда наблюдения за поиском «разладки» могут завершиться объявлением о ее появлении (что может быть и ложным), но непременно с последующим возобновлением (как, например, в радиолокации).

Здесь мы прежде всего исследуем вопрос о том, что дает в этих задачах использование классических методов статистических процедур Вальда и Неймана — Пирсона (§ 1, 2), а затем (при определенных условиях) рассматриваем вопрос об оптимальных процедурах наблюдения (§ 3). Весьма замечательно, что между этим вариантом **E** и вариантом **B** есть вполне определенная связь.

IV

Глава VIII носит название «Разладка на фильтрованных вероятностных пространствах». Она интересна прежде всего тем, что в ней распределение G момента θ может быть *произвольным*, в частности сосредоточенным на *конечном* временно́м интервале с равномерным распределением. В этом случае среди достаточных статистик появляется еще и временна́я переменная t, что делает задачи сугубо *неоднородными*. (Это проявляется, в частности, в том, что обычные прямолинейные границы, разделяющие области продолжения и остановки наблюдений, оказываются теперь *криволинейными*.)

Эта глава содержит также ряд интересных конкретных задач — о доверительных интервалах в задачах о разладке, о последовательном оценивании сноса у фрактального броуновского движения и др.

V

Последние две главы (IX и X) посвящены ряду конкретных задач, решаемых методами теории оптимальных правил остановки. К ним относятся (гл. IX) задача Вальда последовательного различения двух гипотез, задачи различения трех гипотез, последовательного различения сложных гипотез (сноса у броуновского движения) и др.

Глава X посвящена ряду задач финансовой математики, решаемых методами теории оптимальных правил остановки.