1. Введение

В этой книге мы расскажем о нескольких классических проблемах современной комбинаторики и теории графов, связанных с понятием раскраски. Наверняка многие читатели неоднократно сталкивались с этим понятием. Многие слышали, например, о знаменитой гипотезе четырех красок: на любой «достаточно хорошей» карте мира страны могут быть так покрашены, чтобы соседние страны имели разные цвета, а всего цветов было не больше четырех. А еще многие знают задачу о хроматическом числе плоскости: найти наименьшее число цветов, в которые можно так покрасить всю плоскость, чтобы каждые две точки, расстояние между которыми равно единице, были покрашены в разные цвета (см. [1], [2]).

В этой книге мы расскажем не об этих задачах. Но те задачи, о которых мы поговорим, сейчас играют колоссальную роль в дискретной математике, находятся в самом ее центре — на стыке идей и методов. В книге масса красивых рассуждений. Для достижения максимального «катарсиса» полезно владеть основами комбинаторики (см., например, [3]—[7]), теории графов (см. [8], [9]), теории пределов и асимптотик в дискретном анализе (см. [10]), теории вероятностей (см. [5], [11]) и линейной алгебры (см. [12]). Однако не стоит пугаться такого изобилия предметов. На самом деле от комбинаторики нужны только числа сочетаний (биномиальные коэффициенты), от теории графов — только базовое определение графа, от теории вероятностей — только ее комбинаторные аспекты (выбор случайного объекта из конечного множества, бросание монеты, математическое ожидание простейшей случайной величины), от асимптотик — просто понимание, например, того, что

$$n^2+n\sim n^2 \quad \text{при } n\to\infty$$

в том смысле, что предел отношения величин n^2+n и n^2 равен единице (ну, может, чуть посложнее, но мы все аккуратно и последовательно напомним), от линейной алгебры — только представление о том, что бывает пространство $\mathbb{R}^n$, а в нем векторы, матрицы, скалярные произведения... В общем, изложение будет доступно абсолютно любому закончившему второй курс и очень многим старшеклассникам, обучающимся в кружках, математических классах и всевозможных летних и не только летних олимпиадных и не только олимпиадных школах.

Книга основана на курсе, который автор прочитал в Дубне на летней школе «Современная математика» в июле 2019 года, а также на многочисленных его же лекциях на всевозможных сборах (в «Сириусе», «Команде», «Компьютеррии» и др.), на различных школах (Кировская ЛМШ, Комбинаторика и алгоритмы и др.) и университетах по всей России.

2. Задача для затравки

Для затравки рассмотрим следующую задачу. В классе учатся 30 человек. Из них отбираются 5 лучших комбинаторщиков, 5 лучших числовиков, 5 лучших вероятностников и так далее. Всего 15 пятерок. Конечно, эти пятерки лучших могут как угодно пересекаться: заранее мы не знаем, кто окажется сильнее в каком из направлений. Вопрос: *всегда ли* можно так рассадить наших 30 школьников по двум кабинетам, чтобы в каждом кабинете был хотя бы один представитель каждой из пятерок? Например, если все пятерки совпадают, то, очевидно, рассадка возможна. Но ведь есть огромное количество других вариантов! Может, если пятерки распределятся более хитро, то окажется, что, как ни рассаживай 30 школьников по двум кабинетам, обязательно найдется кабинет, в котором одна из пятерок находится целиком?

Ответ на вопрос все-таки положительный: да, такая рассадка *всегда* возможна. Решение очень простое и красивое! Оно основано на вероятностном методе в комбинаторике (ср. [13], [14]). В принципе здесь еще можно было бы обойтись без ссылок на теорию вероятностей, но будет лучше, если мы сразу воспользуемся именно вероятностной терминологией.

Итак, нам даны 15 пятерок. Обозначим их $M_1, \ldots, M_{15}$. Рассмотрим *случайную* рассадку школьников. Что это значит? Вообще говоря, что угодно, ведь случайность можно определять по-разному. Но мы будем понимать случайность максимально просто: каждый школьник отправляется в первый кабинет с вероятностью $\frac{1}{2}$, и с такой же вероятностью он идет во второй кабинет; выбор кабинета школьники осуществляют независимо друг от друга. Иными словами, мы как бы 30 раз бросаем симметричную монетку, и если монетка в i-м бросании падает решкой кверху, то i-й школьник идет в первый кабинет, иначе — во второй. Введем обозначение A_i, $i = 1, \ldots, 15$, для события, состоящего в том, что пятерка M_i целиком попала в один кабинет. Какова вероятность $\mathrm{P}(A_i)$ этого события? Поскольку выбор производится школьниками независимо, вероятности перемножаются, и мы получаем

$$\mathrm{P}(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}.$$

Теперь изучим вероятность того, что *хотя бы одна* пятерка целиком сидит в одном кабинете. Разумеется, это вероятность события $\bigcup\limits_{i=1}^{15} A_i$. Ясно, что

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{15} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{15} \mathrm{P}(A_i) = \frac{15}{16} < 1.$$

Значит, с *положительной* вероятностью имеет место противоположное событие, которое состоит в том, что ни одна пятерка целиком не сидит в одном из кабинетов. Но ведь это ровно то, что нужно! «Ни одна пятерка целиком не сидит» — это же то же самое, что «в каждом кабинете есть хотя бы один представитель каждой из пятерок». И это выполнено с положительной вероятностью. Если веротность рассадки с нужным свойством положительна, то такая рассадка точно есть. Как ее искать — другой вопрос. Но задача решена: рассадка есть всегда.

Отметим, что в нашем *решении* нигде не использовался тот факт, что всего школьников именно 30. Соответственно, возникает вопрос: а можно ли, по-прежнему пренебрегая исходным количеством школьников, вместо 15 взять большее число и получить тот же результат с возможностью рассадки? До шестнадцати дотянуть легко. В самом деле, все события A_i имеют непустое пересечение. Заведомо в этом пересечении находится дурацкая рассадка, при которой все школьники сидят в первом кабинете. Но тогда вероятность объединения *строго меньше* суммы вероятностей и наш метод снова срабатывает. Уже с семнадцатью такой номер не проходит...

Легко видеть, что для 126 пятерок ответ уже положительным не является. Странное число, да? Ну, сейчас разберемся! Мы же вольны в выборе исходного количества школьников. Давайте возьмем *все* пятерки, какие только можно составить из *девяти* человек. Их в аккурат $126 = C_9^5$. Попробуем теперь рассадить девятерых школьников по двум кабинетам. И вот не тут-то было! При любой рассадке в какой-то кабинет попадет не менее пяти школьников. Но у нас *каждая* пятерка сейчас «в деле». Значит, все плохо и мы имеем пример ситуации, когда ответ на первоначальный вопрос уже не является утвердительным.

Итак, для любых 16 пятерок ответ утвердительный, но *существуют* 126 пятерок, для которых ответ отрицательный. Все это приводит к общей постановке задачи, о которой мы и поговорим в следующем разделе.