

## Предисловие

Ведущей мыслью автора при написании настоящей книги было, прежде всего, издание значительно *расширенного* курса лекций по теме «броуновское движение и винеровская мера», имеющей широкие связи с дифференциальными уравнениями в частных производных, комплексным анализом, теорией функций, математической физикой...

Автор в течение ряда лет читал по этой теме лекции для студентов и аспирантов механико-математического факультета МГУ, слушателей научно-образовательного центра в МИАНе и Школы анализа данных в Яндексе.

Существенную часть книги составляет материал, который автор планировал прочитать и который, вообще говоря, следовало бы читать в продвинутых вероятностных курсах. Некоторый материал докладывался автором на различных научных мероприятиях — конференциях, симпозиумах, специальных семинарах. Исследователи в области теории вероятностей и ее применений, а также представители других математических дисциплин, думается, найдут в книге много нового для себя и своей работы. По теме книги существует огромная литература — статьи, монографии, препринты, записки лекций, в том числе и в электронном виде. Многие из них указаны в библиографии к книге, в тексте читатель увидит большое число ссылок на используемые материалы.

*Броуновское движение*, или *винеровский процесс*, является одним из фундаментальных процессов в математике и физике и вообще в естествознании. Физические предпосылки броуновского движения излагаются во введении. Там же описывается, какие аспекты этого движения стали интересными для математиков, а из оглавления читатель увидит, какой математический аппарат, основанный главным образом на вероятностных понятиях, представлен в книге. Читатель увидит также, что по стилю изложения часть материала книги носит лекционный характер. Иногда мы приводим результаты в общем виде, но доказываем лишь в простейших (так сказать, «одномерных») случаях, что вызвано и временными ограничениями, и желанием, чтобы, скажем, студенты приводили общие доказательства в «многомерных» случаях, например, как части своих курсовых проектов.

Изложение темы «броуновское движение и винеровская мера» требует большого *вспомогательного* материала из разных разделов математики. Чтобы сделать изложение как можно более замкнутым, нам пришлось дать необходимый материал из векторного анализа, сведения об элементах теории потенциала, о фундаментальных решениях и функциях Грина... Броуновское движение и решения стохастических дифференциальных уравнений (прямых и обратных) самым непосредственным образом связаны с уравнениями в частных производных (прямыми и обратными). Поэтому приводится необходимая информация об этих последних уравнениях. Броуновское движение и винеровскую меру часто рассматривают как предельные объекты в функциональной центральной предельной теореме (принцип инвариантности). Именно с этим обстоятельством связано то, что мы помещаем большой материал о слабой сходимости в метрических пространствах.

С броуновским движением связана теория оптимального управления в системах, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Эта теория самым непосредственным образом связана с вариационным исчислением и теорией оптимального управления в детерминистических системах. Именно поэтому мы приводим большой материал, относящийся к вариационному исчислению и результатам теории оптимального управления в детерминистических системах.

Отметим также, что в книге дается большой библиографический материал, из которого читатель может увидеть, какими источниками автор пользовался в своих лекциях и при написании книги, а также ознакомиться с разнообразной литературой по теме «броуновское движение и винеровская мера». В частности, во многих местах книги читатель встретит разнообразный интересный материал о структурных свойствах броуновского движения.

Автор выражает свою искреннюю признательность главному редактору издательства МЦНМО Ю. Н. Торхову, Е. А. Макаровой, В. В. Шувалову и Т. Б. Толозовой за помощь в издании книги.

Автор выражает благодарность Фонду содействия развитию науки «Институт „Вега“» и лично генеральному директору Фонда К. Ю. Климову за финансовую поддержку в издании книги.

Москва, 2022 г.

А. Ширяев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
Школа анализа данных Яндекса