

Предисловие

В 2017 году исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося российского математика В. И. Арнольда.

Владимир Игоревич был одним из основателей Независимого московского университета и Московского центра непрерывного математического образования. Он был председателем попечительского совета, прочитал в МЦНМО множество интереснейших лекций, каждое лето преподавал на школе «Современная математика» в Дубне. Многие свои книги он опубликовал в нашем издательстве. Мы рады представить сборник, посвященный его 80-летию.

В первой части собраны статьи Владимира Игоревича: его рассказы о детстве, обучении в университете, решении тринадцатой проблемы Гильберта, становлении КАМ-теории.

В эту часть также вошли воспоминания В. И. об А. Н. Колмогорове, Я. Б. Зельдовиче, В. А. Рохлине, статьи о творчестве А. Пуанкаре, И. Г. Петровского, Н. Н. Боголюбова, Ю. Мозера и два интервью В. И. Арнольда, в которых он рассказывает о своей жизни и творчестве.

Во второй части книги собраны воспоминания коллег и друзей.

В 2014 году в издательстве AMS вышла замечательная книга «Arnold: Swimming Against the Tide» (Eds.: В. А. Khesin, S. L. Tabachnikov), в которой представлены воспоминания друзей, коллег, учеников В. И. Арнольда и активных участников его семинара. Они публикуются в третьей части нашей книги.

Мы признательны Ю. С. Ильяшенко, С. К. Ландо, С. Л. Табачникову, Б. А. Хесину и А. Г. Хованскому за помощь при подготовке этого сборника.

В книге использованы фотографии из семейного архива В. И. Арнольда. Часть фотографий была предоставлена Американским математическим обществом. Авторы фотографий: В. В. Ахломов, Т. Белокриницкая, Ю. Пошель, С. Третьякова, М. Хесина, Б. Хесин. Фотографии на с. 6 вклейки были предоставлены Е. А. Ермаковой, на с. 2 вклейки — Е. А. Ляпуновой. Фотография А. Д. Сахарова и В. И. Арнольда на с. 14 вклейки предоставлена Архивом Сахарова (г. Москва, фонд 1, оп. 1, ед. хр. 15, лист 23, автор фото F. Híbon). Мы выражаем всем им искреннюю благодарность.

К некоторым статьям написаны примечания. Они помещены в конце книги и в основном имеют библиографический характер. Кроме того, в конце книги мы помещаем (увы, заведомо неполный) перечень трудов В. И. Арнольда, составленный на основе списка работ из замечательной книги «Владимир Игоревич Арнольд. Избранное — 60» (М.: ФАЗИС, 1997) и дополненный данными сайта Math-Net.

Не будем здесь перечислять всех наград и достижений Владимира Игоревича — обо всём этом подробно написано в настоящем сборнике, который открывается статьей «Владимир Игоревич Арнольд глазами учеников».

*Исполнительный директор МЦНМО
И. В. Яценко*

Владимир Игоревич Арнольд

глазами учеников

К семидесятилетию со дня рождения

О работах Владимира Игоревича написано много. Еще одна статья вряд ли добавит что-нибудь новое. Мы попытаемся начать новый сюжет — Арнольд глазами учеников. Эти строки субъективны и очень многое оставляют в стороне. Мы надеемся, что продолжение последует: новый сюжет достоин книги, а не статьи.

В Староконюшенном переулке близ Арбата стоит старинная школа с большими окнами, бывшая Медведниковская гимназия, а ныне 59-я школа. Ее двухэтажной высоты актовъ зал украшен гипсовыми орлами с крыльями, распростертыми под потолком. На сцене от пола до потолка, во всю двухэтажную высоту зала, возвышались в полный рост портреты вождей — Ленина и Сталина. Владимир Игоревич учился в этой школе, когда оба портрета еще стояли нетронутыми, а часть преподававших в школе учителей помнили дореволюционное время.

Математику в 59-й школе вел один из лучших учителей Москвы — Иван Васильевич Морозкин. Школьники во все времена хорошо владели искусством изводить учителей, но на уроках Морозкина вопрос о дисциплине не стоял. «Сотри эту гадость и напиши другую», — говорил он растерявшемуся у доски ученику. «Как стоишь?! Где нога? Нога где?» — кричал он криво ставшему ученику, вызванному отвечать с места. Он учил, как не надо писать математические тексты. «Что ты пишешь: очевидно? Понтрягин, лучший геометр мира, слеп, он ничего очами не видит!» И он же умел зажигать творческий огонь в своих учениках. Уже в пятом классе, в первый год знакомства, он давал задачи без всяких комментариев, требовавшие полного напряжения от самых сильных. «Две старушки вышли на рассвете, и каждая шла с постоянной скоростью. Одна шла из A в B , другая — из B в A . Они встретились в полдень и, не прекращая движения, дошли одна в B в 4 часа вечера, а другая в A в 9 часов вечера. Во сколько в тот день встало солнце?»

«Я обдумывал эту задачу весь день, — вспоминает Арнольд, — и решение снизошло на меня как откровение. Испытанный мною тогда (1949) восторг открытия был в точности тем же, который я испытал при решении более серьезных проблем...» В 1957 г. Иван Васильевич показывал своим ученикам тонкий оттиск из Докладов Академии наук: «Третьекурсник решил проблему Гильберта. За это полагается докторская!»

Но Арнольду за эту работу, завершающую решение 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях, дали лишь кандидатскую степень. Когда кто-то из членов Ученого совета отдела (теперь Института) прикладной математики предложил дать Арнольду докторскую, другой член совета сказал: «Подождем. У Арнольда есть другие результаты».

Прежде чем переходить к этим результатам, сделаем одно отступление. В студенческое время Владимир Игоревич был последовательно учеником А. Г. Витушкина, Е. Б. Дынкина и, наконец, А. Н. Колмогорова. Андрей Николаевич и предложил Арнольду в качестве курсовой 13-ю проблему Гильберта о суперпозициях. Эта проблема имеет алгебраический вариант, называемый проблемой резольвент. Если 13-я проблема Гильберта усилиями Колмогорова и Арнольда полностью решена, то проблема резольвент до сих пор открыта. Владимир Игоревич нашел замечательные результаты и в этой проблеме. Они связаны с изучением топологии многозначных алгебраических функций и их дискриминантов. Как всегда, эти результаты Владимира Игоревича имели огромный резонанс. Они не только совершенно преобразили облик теории групп кос Артина, но и стимулировали возникновение новых разделов теории узлов и новых вариантов теории Галуа.

В начале 60-х годов по мехмату пронесся слух, что Арнольд решил задачу трех тел, которую не мог решить Пуанкаре. Владимир Игоревич читал спецкурс по теории КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера, которая тогда еще так не называлась). Корреспонденту, пришедшему перед лекцией интервьюировать Арнольда, сказали, что лектор молод и трудно отличим от студентов. «Выберите того, кто посolidнее». Корреспондент выбрал, подошел к А. Б. Катку, тогда третьекурснику, а сейчас известному математику, работающему в Соединенных Штатах, и обратился к нему: «Профессор, расскажите...» Арнольд был не только молод, как слушавшие его студенты, но и, как они, небогат. Одна из студенток начала 60-х вспоминает, как Владимир Игоревич приходил вести упражнения по анализу в ботинках, подошва одного из которых была подвязана шнурком.

В 1963 г. вышли в «Успехах» две большие статьи Арнольда, сохранившие первое полное изложение теории КАМ. Героический период создания новой теории был закончен. Ждали, чем удивит нас Арнольд в следующем году. Следующий, 1964 год, принес диффузию Арнольда. Оказалось, что в гамильтоновых системах более чем с двумя степенями свободы устойчивости может не быть: колмогоровские торы не разделяют пространства, и орбита может дрейфовать между ними, уходя сколь угодно далеко. Диффузии Арнольда посвящены книги и множество статей. С ней связана проблема, которую эксперты считают основной в теории гамильтоновых систем: типична ли диффузия Арнольда?

В 1965 г. Арнольд начал читать блистательный спецкурс «Наглядная топология». Но спецкурс был прерван к огорчению и одновременно радости слушателей: Арнольда выпустили за границу! Оформление этой поездки продолжалось годы, с тех пор как Арнольд еще был студентом. И вот профессор Арнольд поехал во Францию как студент профессора Лере.

В Париже обнаружилось, что студент и профессор по-разному смотрят на природу турбулентности. Лере считал, что турбулентность вызывается потерей единственности: решения уравнений Навье — Стокса с гладкими начальными условиями теряют гладкость и становятся настолько нерегулярными, что для них больше не выполняется теорема единственности. Ветвление решений, связанное с неединственностью, и объясняет явление турбулентности по Лере. Следует отметить, что в 30-е годы Лере доказал глобальную по времени теорему существования слабых, т. е. негладких, как позже стали говорить обобщенных, решений уравнений Навье — Стокса с трехмерной областью течения. Напротив, следуя Ландау и Хопфу, Арнольд считал, что уравнение Навье — Стокса ведет себя как бесконечномерная дифференцируемая динамическая система. Решения этой системы гладкости не теряют, но приближаются к гиперболическому аттрактору. Экспоненциальное разбегание траекторий на аттракторе и их хаотическое поведение и порождают невозможность эксперимента и турбулентность в гидродинамике. Спор Арнольда и Лере не разрешен до сих пор. Основная проблема — существуют ли гладкие решения уравнения Навье — Стокса, определенные глобально по времени для любого гладкого начального условия, — включена в число «проблем тысячелетия». Математический институт Клэя обещает за ее решение миллион.

Что до законченных результатов, Арнольд доказал, что решения уравнения Эйлера течения идеальной жидкости — это не что иное,

как геодезические на группе диффеоморфизмов области течения. Как обычно, эта работа Владимира Игоревича была подхвачена другими математиками. В той же работе (1966) Арнольд открыл экспоненциальную неустойчивость специальных решений уравнений Эйлера на поверхностях и доказал невозможность долгосрочного прогноза погоды, правда в том упрощающем предположении, что Земля имеет форму тора.

Из Франции Арнольд привез известие о возникновении под влиянием работ Хасслера Уитни и Рене Тома новой науки — теории особенностей. Всем своим ученикам он давал задачу: классифицировать особенности отображений общего положения плоскости на себя — и при этом указывал, что теория особенностей имеет точно локализованную дату рождения — 1955 год, когда появилась работа Уитни об этой классификации (о складках и сборках Уитни). Долгое время с тех пор семинар, который вел В. И. Арнольд, назывался «Теория особенностей». До поездки Владимира Игоревича во Францию он назывался «Динамические системы», а в последние годы называется просто «Семинар Арнольда».

Вскоре после возвращения Арнольда из Франции на его семинаре обсуждалась «последняя геометрическая теорема Пуанкаре». Согласно этому результату, открытому Пуанкаре и доказанному Биркгофом, отображение кольца в себя, «поворачивающее граничные окружности в разные стороны» и сохраняющее площадь, имеет не менее двух неподвижных точек. Владимир Игоревич нашел неожиданное многомерное обобщение этой теоремы. Согласно гипотезам Арнольда, гамильтоново дифференциальное уравнение на произвольном симплектическом многообразии с периодическим по времени гамильтонианом имеет много периодических орбит (нижняя оценка числа периодических траекторий зависит от топологии многообразия). Владимир Игоревич доказал свои гипотезы лишь для достаточно малых гамильтонианов. Сейчас эти гипотезы в основном доказаны. Их доказательства потребовали тяжелого труда и затянулись на долгие годы. В результате возникла симплектическая топология — новая интенсивно развивающаяся область математики.

Владимир Игоревич Арнольд страстно пропагандировал философию общности положения, восходящую к Пуанкаре, Андронову — Понтрягину, Уитни и Тому. Согласно этой философии, решение любой классификационной задачи должно начинаться с исследования случаев общего положения и только после этого можно переходить к изучению вырожденных случаев в порядке возрастания коразмерности вырождения. Вырожденные случаи следует изучать вместе

с их деформациями. Исследование вырожденных случаев, пока не изучен общий, — напрасный труд.

Эту идеологию Владимир Игоревич систематически применял в исследованиях по теории особенностей. На ней основан и его подход к теории локальных бифуркаций, совершенно преобразивший ее облик. Его дипломник А. Шошитайшвили доказал принцип сведения, позволивший отбросить лишние «гиперболические» переменные в исследовании локальных бифуркаций. Другой его студент Р. Богданов исследовал первую бифуркацию коразмерности 2, в которой вместе с локальными явлениями возникают нелокальные: петля сепаратрисы и рождающиеся из нее предельные циклы. «Не зря я запустил двух человек с двух сторон», — говорил потом Владимир Игоревич.

Арнольд опубликовал лишь одну статью по локальным бифуркациям коразмерности 2, исследовав потерю устойчивости автоколебаниями. Вместе с работой Богданова эти исследования открыли новую эпоху в теории локальных бифуркаций. Теория бифуркаций ростков векторных полей и отображений с вырождениями коразмерности 2 создана в основном Арнольдом и его учениками.

В начале 70-х годов Владимир Игоревич классифицировал простые особые точки функций многих переменных, связав их с теорией дискретных групп, порожденных отражениями. Опять совершенно неожиданная связь двух объектов разной природы, и опять работа Арнольда вызвала поток замечательных результатов других математиков. На семинаре Арнольда обсуждалось всё на свете. Например, вещественная алгебраическая геометрия. Гильберт потратил много труда на построение плоских вещественных алгебраических кривых заданной степени, имеющих максимальное возможное число овалов. Неудачные попытки построения таких кривых с а priori возможной топологией расположения на проективной плоскости привели его к убеждению, что не все возможности действительно реализуются. Открытые задачи вещественной алгебраической геометрии Гильберт поместил в свою 16-ю проблему. Гудков решил одну из этих задач для кривых степени 6, но картина в целом оставалась совершенно неясной. Арнольд нашел общие удивительно красивые топологические препятствия, доказывающие, что многие а priori возможные расположения кривых с максимальным числом овалов не могут реализоваться. Работа Арнольда была подхвачена Рохлиным, Гудковым и их учениками. В результате вещественная алгебраическая геометрия вышла на совершенно новый современный уровень.

Первый результат, относящийся к алгебраической части 16-й проблемы Гильберта, был получен в середине прошлого века И. Г. Петровским. Он нашел замечательные оценки эйлеровых характеристик вещественных алгебраических множеств. Арнольд обнаружил, что удивительные неравенства Петровского тесно связаны с (открытой значительно позже) формулой Левина — Айзенбада — Химшиашвили, вычисляющей индекс особой точки векторного поля. Это открытие позволило Арнольду найти общие оценки индексов особых точек однородных (не обязательно градиентных) векторных полей, обобщающие неравенства Петровского (оценки Арнольда в отличие от неравенств Петровского точны). Владимир Игоревич связал оценки Петровского со смешанными структурами Ходжа в исчезающих когомологиях и объяснил, что неравенства Петровского, неравенства Харламова и формула Левина — Айзенбада — Химшиашвили теснейшим образом связаны между собой.

Каждую осень семинар Арнольда начинается с оглашения новых задач и гипотез Владимира Игоревича и длинного списка новых замечательных работ других математиков, которые, по его мнению, необходимо срочно разобрать и понять. К сожалению, у участников далеко не на всё хватает сил и времени. Многие задачи и гипотезы остаются на будущее. Решить задачу, поставленную Арнольдом, — большое счастье. Решения многих из них дали начало новым направлениям в математике. В 2000 г. издательство «Фазис» выпустило большой том «Задачи Арнольда». Ему предпослан эпиграф, который не нуждается в комментариях: «Я очень благодарен большому числу своих бывших и нынешних учеников, написавших эту книгу. В. И. Арнольд».

Поражает математическая интуиция Владимира Игоревича. Им были сформулированы сотни гипотез, часто основанных на множестве просчитанных им примеров. Часть гипотез можно найти в упомянутой книге «Задачи Арнольда», другие формулировались в его многочисленных лекциях. Ряд из них удалось доказать. Некоторые математики ставили своей целью опровергнуть какую-либо из гипотез Арнольда, однако никому это всерьез не удалось. Можно сказать, что опровержение гипотезы Арнольда в некотором смысле более почетно, чем ее доказательство.

Природа наградила Владимира Игоревича широким спектром необычайных талантов. Он стремится к совершенству в любом деле, за которое берется, будь то лыжные прогулки в плавках и купание в проруби, исследование переписки Гука и Ньютона или изучение творчества Пушкина. Удивительна его способность быстро решать

административные дела. Рецензии и рекомендации он пишет с ходу, почти без черновиков и без правок, удивительно точно схватывая суть проблемы. Трудно поверить, но Владимир Игоревич имел четкое представление и собственное мнение о каждой из сотен работ, представленных в журнал «Функциональный анализ и его приложения», которым он долгие годы руководил.

Владимир Игоревич — замечательный педагог. Специальные курсы и семинары, которые он читал и вел на мехмате МГУ с 50-х по 90-е годы, привлекали сотни слушателей. В более поздний период его лекции в Эколь Нормаль и в Институте Пуанкаре производили такое же яркое впечатление на студентов парижских университетов. Арнольду присуща яркая эмоциональная манера изложения. Его умение кратко, геометрически наглядно и проникая в самую суть излагать математические теории, историю науки и житейские мелочи просто необычайно.

Всё, что Владимир Игоревич прочел, понял, продумал, придумал, он спешит передать слушателям и читателям. Ни одна новая статья не залеживается недописанной. По его словам, если что-то не написал сразу, то потом возвращаться гораздо труднее. Из конспектов его курсов по теоретической механике, дифференциальным уравнениям, теории особенностей родились замечательные учебники, аналогов которым не было и нет. Несмотря на то что в курсах Арнольда суть вещей объясняется на простейших примерах, сдавать такие курсы было нелегко — в них мелочи не разжевывались, от слушателей предполагалась творческая работа.

Всегда, когда доказательство какого-нибудь факта опирается на длинную цепь преобразований и выкладок, Владимир Игоревич говорит: доказательство есть, а почему так — непонятно. Геометрическая наглядность и красота доказательств, полученных Арнольдом, — на самом деле плод многочасовых вычислений и оценок, произвести которые — большой труд. Иногда кажется, как же это просто — почему мы не придумали. А дело еще в огромной эрудиции, энциклопедическом образовании, знании разных, даже и не смежных областей математики и физики и многого другого.

Вся его жизнь — процесс познания и передачи новых знаний всем: ученикам, читателям, слушателям, среди которых школьники, студенты, ученые. Вот неполный список математиков, которые защитили кандидатские диссертации под руководством Арнольда: С. Анисов, Ф. Айкарди, Э. Белага, И. Богаевский, Р. Богданов, Л. Брызгалова, А. Варченко, В. Васильев, С. Вишик, М. Гарай, А. Гивенталь, В. Гинзбург, В. Горюнов, А. Давыдов, Х. Жолондек,

В. Закалюкин, М. Казарян, Ж. Капитанио, О. Карпенков, В. Карпушкин, О. Козловский, В. Костов, А. Кушниренко, Е. Ландис, С. Ландо, Л. Левантовский, А. Леонтович, О. Ляшко, В. Матов, М. Мишустин, Ж. Муссафир, Ф. Наполитано, Н. Нехорошев, Л. Ортис, О. Платонова, П. Пушкарь, А. Пяртли, Э. Розалес, А. Ройтварф, М. Севрюк, В. Седых, Р. Урибе, Э. Ферран, Б. Хесин, А. Хованский, И. Хорозов, Ю. Чеканов, Б. Шапиро, М. Шапиро, А. Шмелев, А. Шошитайшвили, И. Щербак, О. Щербак. На самом деле учеников у Арнольда было гораздо больше, но не все они защищались под его руководством. Многие из его учеников стали известными учеными.

Удивительно цельный и сильный характер и интеллект Владимира Игоревича ярко проявились и в процессе его выздоровления после трагического инцидента на велосипедной прогулке. Там, где обычный человек вообще бы не выжил, Арнольд проявлял просто чудеса. В самый тяжелый период, с трудом открывая глаза, он безошибочно вспоминал место работы каждого из более чем сотни участников конференции, подписавших присланное ему письмо.

Владимир Игоревич является одним из создателей и главой Попечительского совета Независимого московского университета (1991) и Центра непрерывного математического образования (1994), где работают со студентами и школьниками многие его ученики. В последние годы Владимир Игоревич сделал многое для того, чтобы планируемая в России реформа образования не стала губительной.

Арнольд написал более 600 статей, около 30 монографий и 4 учебника. Он пять раз был приглашенным докладчиком Международных математических конгрессов, из них дважды пленарным. Работы Владимира Игоревича изменили облик современной математики. Эти строки — скромная дань благодарности Арнольду за его титанический труд. Творчество Владимира Игоревича — бесконечная тема. Мы лишь едва коснулись результатов, полученных им в молодости. Эта творческая молодость никогда не прекращалась и продолжается сейчас. Как и десятилетия назад, Арнольда переполняют новые идеи, желание двигаться дальше в новые области, желание просвещать и работать, работать.

Так пожелаем Владимиру Игоревичу еще многих лет молодости на радость ему и всему математическому миру!

*А. Н. Варченко, В. А. Васильев, С. М. Гусейн-Заде, А. А. Давыдов,
В. М. Закалюкин, Ю. С. Ильяшенко, М. Э. Казарян,
А. Г. Кушниренко, С. К. Ландо, А. Г. Хованский*